BULLETIN DE LA S. M. F.

M. GENTY

Sur les involutions d'espèce quelconque

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 106-112
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__106_0>

Sur les involutions d'espèce quelconque;

par M. Max Genty.

1. M. Guccia définit, dans ses *Leçons de Géométrie supérieure,* les involutions de degré n et d'espèce k. Une pareille involution, qu'il désigne par le symbole I_n^k, est une série linéaire k fois indéterminée de groupes de n points pris sur une droite ou

sur une courbe unicursale donnée; c'est-à-dire, telle que k points arbitraires de la droite ou de la courbe déterminent un groupe unique de n points appartenant à l'involution.

Analytiquement, une équation de la forme

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \ldots + \lambda_{k+1} U_{k+1} = 0,$$

dans laquelle les λ_i sont des paramètres arbitraires, et les U_i des polynômes de degré n par rapport à la variable t, au moyen de laquelle peuvent s'exprimer rationnellement les coordonnées de la courbe unicursale donnée, représente une involution de degré n et d'espèce k. Cette définition de l'involution I_n^k n'est autre que la traduction analytique de la définition géométrique donnée primitivement.

2. De la définition précédente, nous déduisons immédiatement qu'il existe une infinité de groupes d'une involution I_n^k possédant en un point donné un point multiple d'ordre $k' < k$. De plus, tous ces groupes appartiennent évidemment à une involution $I_{n-k'}^{k-k'}$ qui est dite *adjointe* au point multiple donné.

En particulier, un point donné considéré comme point multiple d'ordre k détermine un groupe unique de l'involution I_n^k. Nous voyons, d'après cela, qu'il doit exister un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant un point multiple d'ordre $k+1$. Nous allons rechercher ce nombre, que nous désignerons par u_n^k.

3. Nous emploierons dans ce but une démonstration plus courte que celle de M. Guccia. Le seul lemme analytique auquel nous aurons recours, et qui nous servira pour toutes les démonstrations qui suivent, est le principe de correspondance de Chasles que nous énonçons une fois pour toutes :

Si deux séries de points X *et* Y *se correspondent algébriquement, de telle sorte qu'à un point* X *correspondent* β *points* Y *et à un point* Y, α *points* X, *le nombre des coïncidences des points* X *et* Y *sera* $\alpha + \beta$.

Soit A un point donné de la courbe unicursale. Ce point considéré comme point multiple d'ordre k détermine un groupe unique de l'involution I_n^k, et, par conséquent, $n - k$ points M différents de A et appartenant à ce groupe. Il s'agit de déterminer, quand A parcourt la courbe donnée, le nombre des coïncidences du point A avec un des points M. Un des points M étant donné, les groupes de l'involution contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1} possédant u_{n-1}^{k-1} points multiples d'ordre k. Les points A et M se correspondent donc algébriquement entre eux, de telle façon qu'à un point A correspondent $n-k$ points M, et à un point M, u_{n-1}^{k-1} points A.

Donc, d'après le principe de correspondance de Chasles, le nombre des coïncidences du point A avec un des points M est $u_{n-1}^{k-1}+n-k$.

Nous avons donc l'équation de récurrence

$$u_n^k = u_{n-1}^{k-1} + n - k$$

qui, au moyen de l'équation initiale évidente

$$u_{n-k}^0 = n-k,$$

nous donne

$$u_n^k = (k+1)(n-k).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Théorème I. — *Dans une involution de degré n et d'espèce k, il existe $(k+1)(n-k)$ groupes possédant un point multiple d'ordre $k+1$.*

4. Nous allons maintenant démontrer que, si $n \geqq 2k$, il existe un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant k points doubles et nous allons rechercher ce nombre que nous désignerons par v_n^k. Soit A un point donné; les groupes de l'involution contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1}. Il existe v_{n-1}^{k-1} groupes de cette dernière involution possédant $k-1$ points doubles. En dehors de ces points doubles et du point A, tous ces groupes déterminent $v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1)$ points M correspondants à A, et il s'agit de déterminer le nombre des coïncidences du point A avec un des points M. Or, rien ne différenciant le point A des points M, à un point M correspondent également $v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1)$ points A. Donc le nombre des coïncidences est

$$2v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1).$$

Chacune de ces coïncidences fournit un groupe de l'involution I_n^k possédant k points doubles.

Mais on voit facilement que nous obtiendrons k fois le même groupe en faisant coïncider successivement le point A avec chacun des k points doubles. Nous avons donc, en définitive, l'équation de récurrence suivante

$$v_n^k = \frac{2}{k} v_{n-1}^{k-1}(n-2k+1),$$

qui, avec l'équation initiale

$$v_{n-k+1}^1 = 2(n-k),$$

donne

$$v_n^k = \frac{2^k(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}.$$

Nous avons donc l'énoncé suivant :

Théorème II. — *Dans toute involution de degré n et d'espèce k, si $n \geqq 2k$, il existe $\frac{2^k(n-k)!}{k!\,(n-2k)!}$ groupes de cette involution possédant k points doubles.*

Ce théorème a été démontré par M. Émil Weyr, et M. Guccia l'énonce sans en donner de démonstration.

5. Nous allons continuer dans le même ordre d'idées et démontrer qu'il existe un nombre fini de groupes d'une involution I_n^k possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à $k'+1$ et $k-k'+1$, k' étant un nombre quelconque plus petit que k.

Appelons X_1 le nombre cherché; les groupes de I_n^k ayant en un point donné A un point multiple d'ordre h' appartiennent à une involution $I_{n-k'}^{k-k'}$. Il existe $(k-k'+1)(n-k)$ groupes de cette involution possédant un point multiple d'ordre $k-k'+1$. En dehors de ces points multiples et du point A, tous ces groupes déterminent donc $(k-k'+1)(n-k)(n-k-1)$ points M qui correspondent au point A. Il s'agit de déterminer le nombre des coïncidences du point A avec les points M. Or le point M étant donné, les groupes de I_n^k contenant ce point appartiennent à une involution I_{n-1}^{k-1}, et il existe un nombre X_2 de groupes de cette involution possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à k' et $k-k'+1$.

Donc, d'après le principe de correspondance de Chasles, nous avons

$$X_1 = (n-k)(n-k-1)(k-k'+1) + X_2.$$

Nous obtiendrons, par des raisonnements analogues,

$$X_2 = (n-k)(n-k-1)(k-k'+1) + X_3,$$

X_3 étant le nombre des groupes d'une involution I_{n-2}^{k-2} possédant deux points multiples d'ordres $k'-1$ et $k-k'+1$. Nous arriverons successivement ainsi à l'équation finale

$$X_{k'+1} = (n-k)(n-k-1)(k-k'+1),$$

car $X_{k'+1}$ n'est autre que le nombre des combinaisons des groupes d'une involution possédant un point simple et un point multiple d'ordre $k-k'+1$. Nous déduirons donc, par addition des équations précédentes,

$$X_1 = (k'+1)(k-k'+1)(n-k)(n-k-1).$$

Nous avons, par suite, cette proposition :

Théorème III. — *Dans une involution de degré n et d'espèce k, il existe $(k'+1)(k-k'+1)(n-k)(n-k-1)$ groupes possédant deux points multiples d'ordres respectivement égaux à $k'+1$ et $k-k'+1$.*

6. Si nous appliquons le théorème I à l'involution particulière I_n^{n-1}, nous en déduisons qu'une pareille involution a n points multiples d'ordre n. Représentons par $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les n valeurs du paramètre t qui correspondent aux n points de l'involution I_n^{n-1}, et désignons, pour abréger, par $[t]^n$, $[t]^{n-1}$, $[t]^{n-2}$, ... la somme des produits n à n, $n-1$ à $n-1$, $n-2$ à $n-2$, ... de ces n quantités t_i. On voit facilement que l'involution I_n^{n-1} pourra être représentée par une équation de la forme

$$(1) \qquad A_0[t]^n + A_1[t]^{n-1} + \ldots + A_{n-1}[t]^1 + A_n = 0.$$

Les valeurs de t qui correspondent aux n points multiples s'obtiendront en faisant, dans l'équation (1),

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_n = z.$$

Ces n valeurs de t sont donc les racines de l'équation

$$(2) \qquad A_0 z^n + C_n^1 A_1 z^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} A_{n-1} z + A_n = 0,$$

C_n^i représentant le nombre des combinaisons de n objets i à i. Soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines de l'équation (2); en prenant pour les quantités z_i les mêmes notations que pour les quantités t_i, nous tirons de l'équation précédente

$$\begin{aligned}
A_0[z]^1 &= -C_n^1 A_1,\\
A_0[z]^2 &= C_n^2 A_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
A_0[z]^{n-1} &= (-1)^{n-1} C_n^{n-1} A_{n-1},\\
A_0[z]^n &= (-1)^n A_n.
\end{aligned}$$

Remplaçons, dans le premier membre de l'équation (1), les quantités $[t]^i$ par les $[z]^i$ correspondants; nous obtenons, au facteur A_0 près,

$$A_0[(-1)^n A_0 A_n + (-1)^{n-1} C_n^1 A_1 A_{n-1} + \ldots - C_n^1 A_1 A_{n-1} + A_0 A_n].$$

Cette expression s'annule identiquement dans le cas où n est impair; nous obtenons donc le théorème suivant :

Théorème IV. — *Toute involution d'ordre n et d'espèce $n-1$ présente n points multiples d'ordre n. Dans le cas où n est impair, ces points multiples appartiennent à un même groupe de l'involution.*

M. Appell a démontré ce théorème dans le cas de $n = 3$ et il l'a appliqué fort élégamment à la recherche des propriétés polaires des cubiques gauches. On conçoit que le théorème IV puisse conduire à un grand nombre de propriétés géométriques.

Prenons, par exemple, une conique Γ et un point A de cette courbe. Tous les cercles passant par ce point ont, en commun avec Γ, trois points M, autres que A, formant évidemment une involution I_3^2. Appliquons à cette involution le théorème IV; nous en déduisons la propriété suivante qui est bien connue :

Par un point A *d'une conique* Γ, *on peut mener à cette courbe trois cercles osculateurs dont les points de contact* M_1, M_2, M_3 *sont différents de* A. *Ces trois points sont situés avec le point* A *sur un même cercle.*

7. Les théorèmes que nous venons de démontrer dans les paragraphes précédents permettent de déterminer immédiatement le nombre des surfaces algébriques de degré donné soumises à des conditions déterminées et ayant, avec une courbe gauche unicursale donnée, un contact d'ordre supérieur.

Soit une courbe gauche unicursale de C_n de degré n. Le théorème I nous donne les nombres suivants :

Nombre de plans tangents menés à C_n par une droite donnée D :

$$2(n-1).$$

Si la droite D a r points communs avec C_n, le nombre précédent doit être diminué de $2r$.

Nombre de plans osculateurs menés à C_n par un point donné P :

$$3(n-2).$$

Si le point P est un point multiple d'ordre r de la courbe C_n, le nombre précédent doit être diminué de $3r$.

Nombre de plans surosculateurs à la courbe C_n :

$$4(n-3).$$

Nombre de sphères osculatrices à C_n et passant par un point donné P :

$$4(2n-3).$$

Si le point P est un point multiple d'ordre r de C_n, le nombre précédent doit être diminué de $4r$.

Nombre de sphères surosculatrices à C_n :

$$5(2n-4).$$

Le théorème II nous conduira également, et avec autant de facilité, aux nombres suivants :

Nombre de plans tritangents à une courbe C_n :

$$\tfrac{4}{3}(n-3)(n-4)(n-5).$$

Nombre de sphères quadritangentes à C_n :

$$\tfrac{2}{3}(2n-4)(2n-5)\,2n-6)(2n-7).$$

Enfin, le théorème III nous conduira, de la même façon, aux nombres suivants :

Nombre de plans à la fois osculateurs et tangents à C_n :

$$6(n-3)(n-4).$$

Nombre de sphères à la fois osculatrices et tangentes à C_n :

$$8(2n-4)(2n-5).$$

Nous arrêtons cette énumération un peu longue, en faisant remarquer avec quelle facilité la méthode que nous venons de donner permet d'arriver à la détermination de ces nombres.