

# BULLETIN DE LA S. M. F.

BLUTEL

## **Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 20 (1892), p. 92-96

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1892\\_\\_20\\_\\_92\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__92_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation  
entière; par M. BLUTEL.*

**THÉORÈME I.** — *Toute fonction entière  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  des  
racines d'une équation*

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0,$$

*à coefficients quelconques, peut se mettre sous forme d'une  
fonction entière par rapport aux coefficients de cette équation,*

et par rapport à  $m - 1$  racines  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ , cette nouvelle fonction étant de degré  $p$  par rapport à  $x_{m-p}$ . Cette transformation n'est possible que d'une seule façon.

Démontrons d'abord la première partie du théorème pour une fonction entière  $f(x_1, x_2)$  des racines d'une équation du second degré

$$x^2 + p_1 x + p_2 = 0.$$

Si l'on tient compte de la relation  $x_1 + x_2 + p_1 = 0$ , on obtient

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, -p_1 - x_1).$$

Cette dernière fonction, où l'on remplacerait  $x_1^2$  autant de fois que possible par  $-(p_1 x_1 + p_2)$ , prendrait finalement la forme  $a + x_1 b$ , où  $a$  et  $b$  sont des fonctions entières de  $p_1$  et  $p_2$ .

Supposons donc la propriété démontrée pour une équation de degré  $m - 1$  et cherchons à l'étendre à une équation de degré  $m$ . Soit une fonction entière  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  des racines d'une équation entière

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0.$$

On peut la regarder simplement comme une fonction entière de  $x_2, x_3, \dots, x_m$  qui sont les racines de l'équation

$$x^{m-1} + (x_1 + p_1)x^{m-2} + (x_1^2 + p_1 x_1 + p_2)x^{m-3} + \dots + x_1^{m-1} + p_1 x_1^{m-2} + \dots + p_{m-1} = 0.$$

Comme telle, elle se mettra sous forme d'une fonction entière des coefficients de cette équation et, par suite, de  $x_1, p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$ , fonction entière aussi par rapport à  $x_2, x_3, \dots, x_{m-1}$  et de degré  $m - 2$  par rapport à  $x_2$ , de degré  $m - 3$  par rapport à  $x_3$ , etc.

Soit

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_{m-1})$$

cette nouvelle fonction; en tenant compte de la relation

$$x_1^m + p_1 x_1^{m-1} + \dots + p_m = 0,$$

on la ramènera à ne contenir  $x_1$  qu'au degré  $m - 1$ , et l'on aura alors la forme énoncée. Nous verrons plus loin que cette forme ne peut s'obtenir que d'une seule façon.

Il résulte immédiatement de là que toute fonction rationnelle

$$\frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{F(x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)}{F_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)},$$

où les fonctions  $f_1$  et  $F_1$  possèdent les propriétés énoncées dans le théorème précédent.

THÉORÈME II. — *Si la fonction rationnelle*

$$R = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{F(x_1, x_2, \dots, x_m)}$$

*est une fonction symétrique, les deux polynômes  $f_1$  et  $F_1$  de la remarque précédente regardés comme fonctions entières de  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ , dont les coefficients sont des polynômes par rapport à  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , ont leurs coefficients proportionnels et la valeur de la fonction symétrique est égale au rapport de deux coefficients correspondants.*

Dans le cas de deux racines, on a

$$R = \frac{f(x_1, x_2)}{F(x_1, x_2)} = \frac{a(p_1, p_2) + x_1 b(p_1, p_2)}{A(p_1, p_2) + x_1 B(p_1, p_2)}.$$

Cette fonction rationnelle du premier degré par rapport à  $x_1$  conserve la même valeur si l'on remplace  $x_1$  par  $x_2$ , à cause de la symétrie de  $R$ ; cet échange n'altère d'ailleurs pas les valeurs de  $p_1$  et  $p_2$  ni, par suite, les coefficients  $a, b, A, B$ .

On en conclut qu'elle est indépendante de  $x_1$  et, par suite, que

$$\frac{a(p_1, p_2)}{A(p_1, p_2)} = \frac{b(p_1, p_2)}{B(p_1, p_2)} = R.$$

Dans le cas général, on a

$$\begin{aligned} R &= \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_m)}{F(x_1, x_2, \dots, x_m)} = \frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})}{F_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1})} \\ &= \frac{a(x_1, x_2, \dots, x_{m-2}) + x_{m-1} b(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}{A(x_1, x_2, \dots, x_{m-2}) + x_{m-1} B(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}, \end{aligned}$$

$a, b, A, B$  étant aussi des fonctions entières de  $p_1, p_2, \dots, p_m$ .

Puisque  $R$  est une fonction symétrique, elle ne change pas si l'on y remplace  $x_{m-1}$  par  $x_m$ , échange qui ne modifie pas  $p_1, p_2, \dots, p_m$  ni, par suite, les fonctions  $a, b, A, B$ . On en conclut, comme plus haut, que l'on a

$$R = \frac{a(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}{A(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})} = \frac{b(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}{B(x_1, x_2, \dots, x_{m-2})}.$$

Chacun de ces nouveaux rapports est de la forme

$$\frac{u(x_1, x_2, \dots, x_{m-3}) + x_{m-2}v(x_1, x_2, \dots, x_{m-3}) + x_{m-2}^2 w(x_1, x_2, \dots, x_{m-3})}{U(x_1, x_2, \dots, x_{m-3}) + x_{m-2}V(x_1, x_2, \dots, x_{m-3}) + x_{m-2}^2 W(x_1, x_2, \dots, x_{m-3})}.$$

Leur valeur ne change pas, si l'on y remplace  $x_{m-2}$  successivement par  $x_{m-1}$  et par  $x_m$ , à cause de la symétrie de  $R$ ; comme ils sont du second degré seulement par rapport à  $x_{m-2}$ , on en conclut qu'ils n'en dépendent pas, c'est-à-dire que l'on a

$$R = \frac{u}{U} = \frac{v}{V} = \frac{w}{W}$$

et trois autres égalités semblables.

La même démonstration peut évidemment se répéter de proche en proche, et l'on aura finalement pour  $R$  une suite de rapports dont les termes ne dépendent plus, en dehors de  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , que de la seule racine  $x$ , qu'ils renferment au degré  $m - 1$ ; comme ils conservent la même valeur lorsqu'on y remplace  $x$ , successivement par les  $m - 1$  autres racines, on conclut qu'ils ne renferment pas  $x$ , ce qui démontre le théorème.

CONSEQUENCES. — 1° Toute fonction rationnelle symétrique peut se mettre sous la forme

$$\frac{\omega(p_1, p_2, \dots, p_m)}{\Omega(p_1, p_2, \dots, p_m)},$$

$\omega$  et  $\Omega$  désignant deux polynômes; elle peut donc être regardée comme un quotient de deux polynômes symétriques par rapport aux racines  $x_1, x_2, \dots, x_m$ .

2° On peut remarquer aussi que si une fonction entière

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

est symétrique et si on la met sous la *forme réduite* indiquée dans le théorème I, elle se réduira à son terme indépendant de  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ . En effet, on peut la regarder comme une fonction rationnelle symétrique dont le dénominateur est 1 ; appliquant le théorème II, on voit que les coefficients des divers termes renfermant  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$  au numérateur de la forme réduite sont tous nuls.

*On déduit de là un perfectionnement important à la méthode de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques entières.*

On commencera par faire disparaître dans la fonction symétrique une racine quelconque  $x_m$  par exemple, puis on ramènera la fonction à ne plus contenir une autre racine  $x_{m-1}$  qu'au premier degré ; ce résultat obtenu, on négligera tous les termes renfermant  $x_{m-1}$ . On ramènera la fonction restante à ne plus contenir une nouvelle racine  $x_{m-2}$  qu'au second degré, puis on négligera tous les termes renfermant encore  $x_{m-2}$ , etc.

3° La réduction d'une fonction entière quelconque

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

n'est possible que d'une seule façon.

Si l'on avait en effet de deux façons différentes

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m), \\ f(x_1, x_2, \dots, x_m) &= f'_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m), \end{aligned}$$

on aurait

$$R = 1 = \frac{f_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)}{f'_1(x_1, x_2, \dots, x_{m-1}, p_1, p_2, \dots, p_m)}.$$

L'application du théorème II à cette fonction symétrique montre qu'il y a bien égalité entre les coefficients des deux fonctions  $f_1$  et  $f'_1$  regardées comme polynômes par rapport à  $x_1, x_2, \dots, x_{m-1}$ .

---