

# BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. CARONNET

**Sur des surfaces dont les lignes de courbure  
s'obtiennent par quadratures**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 20 (1892), p. 91-92

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1892\\_\\_20\\_\\_91\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__91_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1892, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur des surfaces dont les lignes de courbure  
s'obtiennent par quadrature; par M. TH. CARONNET.*

Considérons une surface quelconque ( $\Sigma$ ) et soient  $\alpha$  et  $\beta$  les paramètres des courbes de la surface qui ont pour représentation sphérique les génératrices rectilignes de la sphère.

On sait que dans ce système de coordonnées, imaginé par Ossian Bonnet, l'équation du plan tangent est (1)

$$(\alpha + \beta)x + i(\beta - \alpha)y + (\alpha\beta - 1)z + \xi = 0,$$

et que l'équation des lignes de courbure revêt la forme très simple

$$(1) \quad r \, d\alpha^2 - t \, d\beta^2 = 0,$$

si l'on pose

$$r = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha^2}, \quad t = \frac{\partial^2 \xi}{\partial \beta^2}.$$

La courbure totale du premier membre de (1) a pour expression

$$-\frac{1}{2\sqrt{rt}} \frac{D\left(\frac{1}{\sqrt{rt}}, s\right)}{D(\alpha, \beta)}.$$

Elle s'annule donc pour

$$(2) \quad rt = f(s).$$

Considérons maintenant une surface qui ait pour élément linéaire

$$ds^2 = r \, d\alpha^2 - t \, d\beta^2;$$

si nous supposons la relation (2) vérifiée, cette surface sera développable, et l'on obtiendra ses lignes de longueur nulle par quadratures.

Par conséquent, on obtient par de simples quadratures les lignes de courbure de toute surface ( $\Sigma$ ) pour laquelle le  $\xi$  du plan tangent vérifie une équation telle que (2).

Pour obtenir de pareilles surfaces, représentons par

$$(3) \quad F(\xi, \alpha, \beta) = 0$$

(1) Voir G. DARBOUX, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*. Première Partie, p. 246.

une intégrale de l'équation

$$rt = f(s).$$

Si  $u, v, w, p$  sont les coordonnées tangentielles de  $(\Sigma)$ , on a

$$\begin{aligned}\frac{u}{p} &= \frac{\alpha + \beta}{\xi}, \\ \frac{v}{p} &= \frac{\iota(\beta - \alpha)}{\xi}, \\ \frac{w}{p} &= \frac{\alpha\beta - 1}{\xi}.\end{aligned}$$

Tirant de ces formules les expressions de  $\xi, \alpha, \beta$  en fonction de  $u, v, w, p$  pour les porter dans l'équation (3), on obtiendra une relation

$$\Phi(u, v, w, p) = 0,$$

qui sera l'équation tangentielle d'une surface  $(\Sigma)$  dont les lignes de courbure s'obtiendront par quadrature.

On pourra faire l'application de cette remarque aux équations

$$\begin{aligned}rt - s^2 &= 0, \\ rt - s^2 + a^2 &= 0.\end{aligned}$$

Dans le premier cas, l'équation

$$F(\xi, \alpha, \beta) = 0$$

représente une développable quelconque.

Quant à l'équation

$$rt - s^2 + a^2 = 0,$$

on trouvera son intégration dans l'Ouvrage déjà cité de M. Darboux (Liv. VII, Chap. V).

---