BULLETIN DE LA S. M. F.

TH. CARONNET

Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadratures

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 91-92
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__91_0>

Sur des surfaces dont les lignes de courbure s'obtiennent par quadrature; par M. Th. Caronnet.

Considérons une surface quelconque (Σ) et soient α et β les paramètres des courbes de la surface qui ont pour représentation sphérique les génératrices rectilignes de la sphère.

On sait que dans ce système de coordonnées, imaginé par Ossian Bonnet, l'équation du plan tangent est ([1])

$$(\alpha+\beta)x + i(\beta-\alpha)y + (\alpha\beta-1)z + \xi = 0,$$

et que l'équation des lignes de courbure revêt la forme très simple

$$r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2 = 0, \tag{1}$$

si l'on pose

$$r = \frac{\partial^2\xi}{\partial\alpha^2}, \qquad t = \frac{\partial^2\xi}{\partial\beta^2}.$$

La courbure totale du premier membre de (1) a pour expression

$$-\frac{1}{2\sqrt{rt}}\;\frac{D\left(\frac{1}{\sqrt{rt}},\, s\right)}{D(\alpha, \beta)}.$$

Elle s'annule donc pour

$$rt = f(s). \tag{2}$$

Considérons maintenant une surface qui ait pour élément linéaire

$$ds^2 = r\,d\alpha^2 - t\,d\beta^2;$$

si nous supposons la relation (2) vérifiée, cette surface sera développable, et l'on obtiendra ses lignes de longueur nulle par quadratures.

Par conséquent, on obtient par de simples quadratures les lignes de courbure de toute surface (Σ) pour laquelle le ξ du plan tangent vérifie une équation telle que (2).

Pour obtenir de pareilles surfaces, représentons par

$$F(\xi, \alpha, \beta) = 0 \tag{3}$$

[1] *Voir* G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*. Première Partie, p. 246.

une intégrale de l'équation

$$rt = f(s).$$

Si u, v, w, p sont les coordonnées tangentielles de (Σ), on a

$$\frac{u}{p} = \frac{\alpha + \beta}{\xi},$$
$$\frac{v}{p} = \frac{i(\beta - \alpha)}{\xi},$$
$$\frac{w}{p} = \frac{\alpha\beta - 1}{\xi}.$$

Tirant de ces formules les expressions de ξ, α, β en fonction de u, v, w, p pour les porter dans l'équation (3), on obtiendra une relation

$$\Phi(u, v, w, p) = 0,$$

qui sera l'équation tangentielle d'une surface (Σ) dont les lignes de courbure s'obtiendront par quadrature.

On pourra faire l'application de cette remarque aux équations

$$rt - s^2 = 0,$$
$$rt - s^2 + a^2 = 0.$$

Dans le premier cas, l'équation

$$F(\xi, \alpha, \beta) = 0$$

représente une développable quelconque.

Quant à l'équation

$$rt - s^2 + a^2 = 0,$$

on trouvera son intégration dans l'Ouvrage déjà cité de M. Darboux (Liv. VII, Chap. V).