BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 49-59

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__49_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur la détermination géométrique du centre de courbure de la développée d'une courbe plane; par M. M. d'Ocagne.

1. Je rappellerai que j'ai mis en évidence, dans un précédent Mémoire [1], le rôle que joue, dans l'étude infinitésimale des courbes planes, une courbe adjointe que je désigne par la lettre n, et qui est ainsi définie :

Étant donnée une courbe plane c, *on prend arbitrairement deux pôles* O *et* P. *On joint le pôle* O *à un point* M *pris sur* c

[1] Publié en 1888 à la fois dans l'*American Journal of Mathematics* et dans le *Jornal de Sciencias mathematicas, physicas e naturaes*, de Lisbonne.

et par P *on mène une parallèle à la normale en* M *à la courbe* c; *les deux droites ainsi menées se coupent en un point* H *dont le lieu est la courbe adjointe* n.

Cette courbe adjointe passe par les pieds des normales menées du point P à la courbe c; ses asymptotes sont parallèles aux normales menées du point O; elle passe par les points de rencontre du cercle décrit sur OP comme diamètre, d'une part, avec les tangentes menées de O à la courbe c; d'autre part, avec les parallèles aux asymptotes de cette courbe menées par le même point.

Lorsque la courbe c est une conique de centre O, l'adjointe n n'est autre que l'hyperbole équilatère passant par les pieds des quatre normales à la conique issues du point P. Si le point P est sur un des axes de cette conique, l'adjointe n se réduit à une perpendiculaire à cet axe.

J'ai d'ailleurs, dans mon Mémoire cité, fait connaître toutes les courbes admettant une droite pour adjointe n.

L'adjointe n permet de construire la normale en tout point de la courbe c et aussi de trouver les points de cette courbe où la normale a une direction donnée.

J'ai fait voir qu'elle permettait en outre d'obtenir très simplement le centre de courbure en tout point de la courbe c, et cela de la manière suivante :

Par le point M' *où la normale en* M *à la courbe* c *coupe la droite* OP, *que l'on élève à cette normale une perpendiculaire coupant* OM *en* L. *La parallèle menée par* L *à la tangente en* H *à l'adjointe* n *passe par le centre de courbure* Ω *répondant au point* M.

On déduit de là que *les points d'inflexion de la courbe* c *se trouvent sur les droites joignant le point* O *aux points de contact des tangentes menées de* P *à l'adjointe* n.

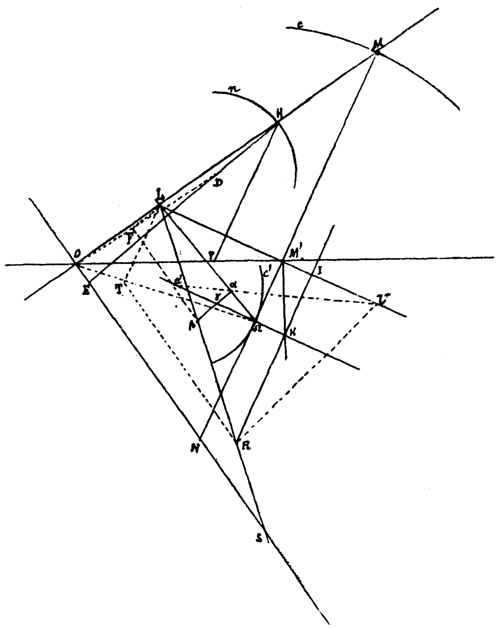
Le résumé qui précède fait ressortir l'intérêt qui s'attache à la considération de l'adjointe n. On voit que les éléments de cette courbe, dépendant d'infiniment petits d'un certain ordre, permettent d'obtenir les éléments de la courbe c dépendant d'infiniment petits de l'ordre immédiatement supérieur.

On est donc tout naturellement amené à rechercher comment la connaissance du centre de courbure de l'adjointe n entraîne celle du centre de courbure de la développée de la courbe c. C'est ce que je vais examiner ici.

2. Afin de permettre au lecteur de mieux suivre la solution qui va être donnée, je commencerai par en résumer la marche de la manière suivante :

Le centre de courbure Ω étant construit comme il a été dit plus

Fig. 1.



haut, nous allons déterminer successivement, en les déduisant les uns des autres (*fig.* 1) :

1° Le point où la droite LM' touche son enveloppe;

2° La normale au lieu décrit par le point L;

3° Le point où la droite $L\Omega$ touche son enveloppe;

4° Le centre de courbure de la courbe que décrit le point Ω, c'est-à-dire de la développée c' de la courbe c.

3. *Point où la limite* LM' *touche son enveloppe.* — L'angle

LM'M étant constamment droit, on a le point I où LM' touche son enveloppe en abaissant sur cette droite une perpendiculaire du point K où se rencontrent la normale à l'enveloppe de MM' et la normale au lieu décrit par le point M', c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en Ω à MM', et la perpendiculaire élevée en M' à OP.

4. *Normale au lieu décrit par le point* L. — Soit LRS la normale cherchée, qui coupe en S la perpendiculaire élevée en O à LM et en R la normale KI à l'enveloppe de LM'. Si $d(\mathrm{L})$, $d(\mathrm{M})$, $d(\mathrm{M}')$ sont les différentielles des arcs de courbes décrits simultanément par les points L, M, M', on a

$$\frac{d(\mathrm{L})}{d(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{LS}}{\mathrm{MN}}, \qquad \frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{M}')} = \frac{\mathrm{M\Omega}}{\mathrm{M'K}}, \qquad \frac{d(\mathrm{M}')}{d(\mathrm{L})} = \frac{\mathrm{M'K}}{\mathrm{LR}}.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, on obtient

$$1 = \frac{\mathrm{LS} \times \mathrm{M\Omega}}{\mathrm{MN} \times \mathrm{LR}}$$

ou

$$\frac{\mathrm{LS}}{\mathrm{LR}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{M\Omega}}.$$

On déduit de là que si la droite $\mathrm{O\Omega}$ coupe au point T la parallèle à MN menée par le point L, le point R se trouve sur la parallèle à ON menée par le point T; ce point R étant en même temps sur la droite KI précédemment obtenue, la normale LR est complètement déterminée.

5. *Point où la droite* $\mathrm{L\Omega}$ *touche son enveloppe*. — Si la normale à la courbe n au point H coupe en E la perpendiculaire ON à OH, on a

$$\frac{d(\mathrm{L})}{d(\mathrm{H})} = \frac{\mathrm{LS}}{\mathrm{HE}}.$$

Mais, si ε est l'angle de contingence de la courbe n au point H et D le centre de courbure correspondant, la différentielle $d(\mathrm{H})$ de l'arc a pour expression

$$d(\mathrm{H}) = \mathrm{HD} \times \varepsilon.$$

Soit α le point cherché. La normale en ce point à l'enveloppe de $\mathrm{L\Omega}$, c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en ce point à $\mathrm{L\Omega}$, coupant en β la normale LR à la courbe décrite par le point L, on a de même, en remarquant que le parallélisme de $L\Omega$ et de la tangente en H à la courbe n entraîne la même valeur ε pour l'angle de contingence au point α,

$$d(L) = L\beta \times \varepsilon.$$

Il vient, par suite,

$$\frac{L\beta}{HD} = \frac{LS}{HE},$$

égalité qui montre que la parallèle à HE menée par L et la parallèle à ON menée par β se coupent en un point F situé sur OD. De là, la construction du point β. On n'a plus, de ce point, qu'à abaisser sur $L\Omega$ la perpendiculaire $\beta\alpha$ pour avoir le point α cherché.

6. *Centre de courbure Ω' de la développée c'.* — Si γ est le point où la normale $\alpha\beta$ à l'enveloppe de $L\Omega$ coupe la normale ΩK à la développée c', on a

$$\frac{d(L)}{d(\Omega)} = \frac{L\beta}{\Omega\gamma}, \qquad \frac{d(\Omega)}{d(M')} = \frac{\Omega\Omega'}{M'K}, \qquad \frac{d(M')}{d(L)} = \frac{M'K}{LR}.$$

Par multiplication, on tire de là

$$1 = \frac{L\beta \times \Omega\Omega'}{\Omega\gamma \times LR},$$

ou

$$\frac{\Omega\Omega'}{\Omega\gamma} = \frac{LR}{L\beta}.$$

On déduit de cette égalité que si la parallèle à $\alpha\beta$ (perpendiculaire à $L\Omega$) menée par le point R coupe LM' au point U, le centre de courbure cherché Ω' se trouve sur la droite αU. Comme il est d'ailleurs sur la normale ΩK, sa détermination est complète.

Le problème posé se trouve ainsi résolu.

7. *Simplification pour le cas où l'adjointe n est une droite.* — Si l'adjointe n est une droite, rien n'est modifié à la construction du point R. De même, la droite RU est toujours perpendiculaire à $L\Omega$; mais il devient inutile d'effectuer une construction pour avoir le point α où $L\Omega$ touche son enveloppe. En effet, la droite $L\Omega$ étant parallèle à la tangente en H à la courbe n, et celle-

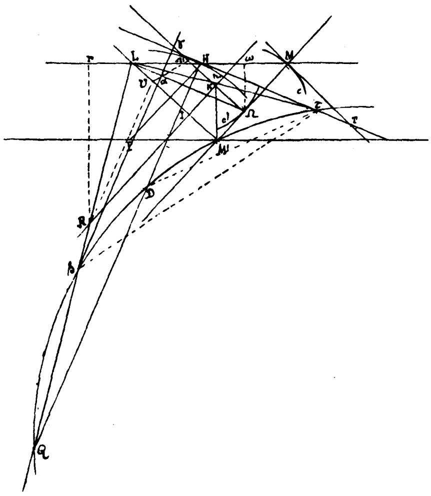
ci étant une droite, la droite $L\Omega$ a une direction constante et le point α se trouve rejeté à l'infini dans cette direction.

Dès lors, le centre de courbure Ω' se trouve simplement, dans ce cas, à la rencontre de la normale ΩK à la développée et de la parallèle à $L\Omega$ menée par le point U qui vient d'être obtenu.

8. *Cas où le pôle* O *est à l'infini.* — Les pôles O et P ont été choisis arbitrairement. Le pôle P doit être nécessairement à distance finie, mais rien n'empêche de prendre le pôle O à l'infini dans une direction donnée. Dans ce cas, la solution précédente doit être partiellement modifiée. Si, en effet, la première (n° 3) et la quatrième (n° 6 ou 7) des déterminations successives qui interviennent dans cette solution restent les mêmes, la deuxième et la troisième deviendraient illusoires si elles n'étaient convenablement transformées.

Reprenons donc le problème dans ce cas (*fig.* 2). Nous suppo-

Fig. 2.



sons que le point H de l'adjointe n correspondant au point M s'obtient par la rencontre d'une parallèle à une direction fixe PM′ menée par le point M et d'une parallèle à la normale MM′ menée par le pôle P. Comme précédemment, nous avons le centre de courbure Ω en élevant en M′ à MM′ la perpendiculaire M′L et en menant par le point L où elle rencontre HM la parallèle LΩ à la tangente HT à l'adjointe n.

Ici encore *le point* I *où* LM′ *touche son enveloppe* s'obtient en abaissant sur cette droite une perpendiculaire du point K où se rencontrent les perpendiculaires élevées respectivement à PM′ en M′ et à ΩM en Ω.

Pour avoir *la normale au lieu décrit par le point* L, remarquons que la deuxième et la troisième des égalités du n° 4 subsistent telles quelles, savoir :

$$\frac{d(\mathrm{M})}{d(\mathrm{M}')} = \frac{\mathrm{M\Omega}}{\mathrm{M'K}}, \qquad \frac{d(\mathrm{M}')}{d(\mathrm{L})} = \frac{\mathrm{M'K}}{\mathrm{LR}};$$

mais que la première doit être remplacée par la suivante :

$$\frac{d(\mathrm{L})}{d(\mathrm{M})} = \frac{\mathrm{LT}}{\mathrm{MT}},$$

T étant le point de rencontre des tangentes aux courbes décrites respectivement par les points L et T. Dès lors, on obtient par multiplication

$$\frac{\mathrm{LT}}{\mathrm{MT}} = \frac{\mathrm{LR}}{\mathrm{M\Omega}}.$$

Cette égalité peut s'écrire

$$\mathrm{M\Omega}\sin\mathrm{TML} = \mathrm{LR}\sin\mathrm{TLM},$$

ou, en abaissant des points R et Ω sur LM les perpendiculaires Rr et $\Omega\omega$, et observant que les angles ΩMT et RLT sont droits,

$$\mathrm{M\Omega}\sin\mathrm{M\Omega}\omega = \mathrm{LR}\sin\mathrm{LR}r,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{M}\omega = \mathrm{L}r.$$

Les points L, M et ω étant connus, on déduit de là le point r. Il n'y a plus dès lors, pour avoir le point R de la normale LR cherchée, qu'à prendre l'intersection de KI et de la perpendiculaire élevée en r à LM.

De même, pour *la détermination du point où* LΩ *touche son enveloppe*, la seconde et la troisième égalité du n° 5 restant les mêmes, il faut remplacer la première par la suivante :

$$\frac{d(\mathrm{L})}{d(\mathrm{H})} = \frac{\mathrm{L}\tau}{\mathrm{H}\tau},$$

τ étant le point de rencontre des tangentes aux courbes décrites respectivement par les points L et H, tangentes qui sont maintenant toutes deux connues, puisque $H\tau$ est donnée et que $L\tau$ est perpendiculaire à LR. Dès lors on a, D étant le centre de courbure de n et β le point où LR est coupée par la normale $\alpha\beta$ à l'enveloppe de $L\Omega$,

$$\frac{L\tau}{H\tau} = \frac{L\beta}{HD},$$

ou

$$\frac{L\tau}{L\beta} = \frac{H\tau}{HD},$$

ce qui prouve l'égalité des angles $L\tau\beta$ et $H\tau D$ et, conséquemment, celle des angles $H\tau L$ et $D\tau\beta$. Mais, si HD coupe LR en Q, les angles τLQ et τHQ étant droits, l'angle HQL égale l'angle $H\tau L$ et, par suite, l'angle $D\tau\beta$. Les points Q, β, D, τ sont donc sur un même cercle.

De là, la détermination du point β et, par suite, du point α, pied de la perpendiculaire abaissée de β sur $L\Omega$.

Le reste de la solution est le même que précédemment. On prend le point de rencontre U de LM' et de la perpendiculaire à $L\Omega$ menée par R, et l'on tire la droite $U\alpha$; elle donne sur ΩK le centre de courbure Ω' cherché.

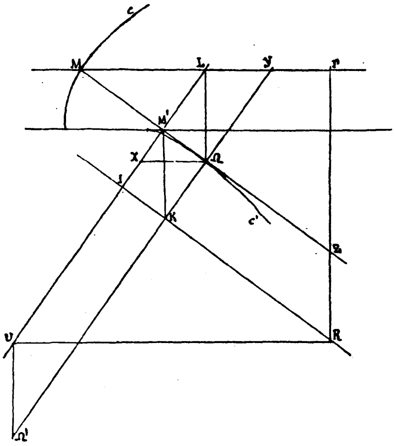
Ici encore s'applique d'ailleurs la remarque du n° 7, lorsque l'adjointe n est une droite.

9. A titre d'application, prenons une parabole et donnons-nous comme pôle P un point quelconque de l'axe, comme pôle O le point à l'infini de cet axe.

La sous-normale de la parabole étant constante, la courbe n sera ici une perpendiculaire à l'axe. Donc, pour avoir le centre de courbure Ω (*fig.* 3), nous n'avons, après avoir pris le point de rencontre L de la perpendiculaire élevée à la normale MM' par le point M' où elle coupe l'axe et de la parallèle à l'axe menée par le point M, qu'à abaisser de ce point la perpendiculaire $L\Omega$ sur l'axe.

Du point K où se rencontrent les perpendiculaires respectivement élevées à l'axe en M' et à MM' en Ω, abaissons sur LM' la perpendiculaire KI. Le point R est déterminé sur cette droite par la condition que sa projection r sur LM soit à une distance de L égale à celle de ω, projection de Ω sur la même droite, au point M. Mais ici le point ω se confond avec L; donc r est symétrique de M par rapport à L; on a ensuite le point R en abaissant du point r la perpendiculaire rR sur l'axe. Pour avoir le point U, il suffit de

Fig. 3.



mener par R une perpendiculaire à LΩ, c'est-à-dire ici une parallèle à LM.

Comme nous sommes dans un cas d'application de la remarque du n° 7, nous n'avons plus, pour achever la solution, qu'à mener par U la parallèle UΩ' à LΩ.

Le point Ω' où cette droite coupe KΩ est le centre de courbure cherché.

Remarquons que $r\mathrm{Z} = 2\mathrm{L}\Omega$ et que $\mathrm{ZR} = \mathrm{M'K} = \mathrm{L}\Omega$. Donc $r\mathrm{R} = 3\mathrm{L}\Omega$.

Par suite, $\mathrm{LU} = 3\mathrm{LX}$ ou $\Omega\Omega' = 3\mathrm{Y}\Omega$. Nous retrouvons ainsi le théorème de Maclaurin :

Si la normale à la développée au point Ω *coupe en* Y *le diamètre passant au point* M, *on a le centre de courbure de cette développée en portant sur cette normale le segment* $\Omega\Omega' = 3\mathrm{Y}\Omega$.

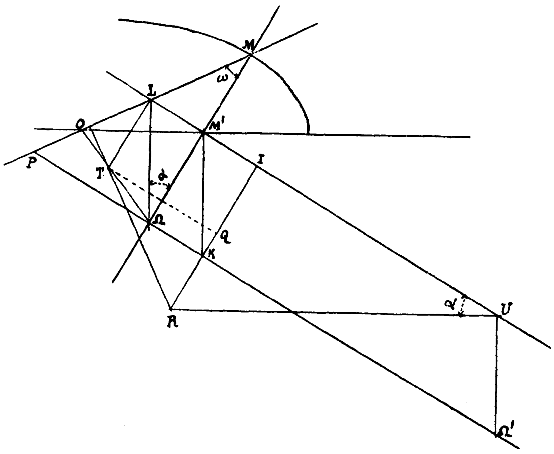
C'est là une vérification de la construction ci-dessus indiquée.

10. Il est intéressant de voir comment on peut, de ce qui précède, déduire le théorème de Maclaurin pour le cas des coniques à centre.

Je rappellerai d'abord que si l'on place le pôle O au centre et le pôle P sur un des axes de la conique, l'adjointe n est alors une droite perpendiculaire à cet axe.

Dès lors, après avoir obtenu le centre de courbure Ω de la conique en menant M'L perpendiculaire à la normale MM' (*fig.* 4),

Fig. 4.



et LΩ perpendiculaire à l'axe OM' ([1]), on construit le centre de courbure Ω' de la développée par le tracé suivant, qui résulte de l'application directe de ce que l'on a vu plus haut (n^{os} 3 et 4), avec la simplification indiquée au n° 7 :

Par K, intersection de la perpendiculaire M'K à OM' et de la perpendiculaire ΩK à M'Ω, menons la perpendiculaire KI à LM'. La parallèle à ΩM' menée par L coupant OΩ au point T, menons, par ce point, à OM une perpendiculaire qui rencontre KI en R. Il suffit alors de mener RU parallèle à OM' et UΩ' perpendiculaire à cette droite pour obtenir sur la normale ΩR à la développée le centre de courbure Ω' de cette courbe. Prolongeons

([1]) C'est la construction de M. Mannheim qui se trouve ainsi déduite de la construction générale dérivant de la considération de l'adjointe n.

$\Omega\Omega'$ jusqu'à son intersection P avec le diamètre OM. Posons

$$\mathrm{LM} = l, \quad \Omega\mathrm{M} = \rho, \quad \Omega\Omega' = \rho', \quad \Omega\mathrm{P} = a, \quad \widehat{\mathrm{OMM'}} = \omega, \quad \widehat{\mathrm{L\Omega M}} = \alpha;$$

nous avons $\mathrm{MM'} = l\cos\omega$, puis, dans le triangle OMM',

$$\mathrm{OM} = \mathrm{MM'}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \omega\right)} = l\,\frac{\cos\omega\cos\alpha}{\cos(\alpha+\omega)}.$$

Maintenant les triangles semblables OTL et $\mathrm{O\Omega M}$ donnent

$$\mathrm{TL} = \rho\,\frac{\mathrm{OL}}{\mathrm{OM}} = \rho\left(1 - \frac{l}{\mathrm{OM}}\right) = \rho\left[1 - \frac{\cos(\alpha+\omega)}{\cos\alpha\cos\omega}\right]$$
$$= \rho\,\mathrm{tang}\,\alpha\,\mathrm{tang}\,\omega = h\,\mathrm{tang}\,\alpha.$$

Évaluons maintenant le rayon de courbure $\Omega\Omega' = \rho'$.

Nous avons

$$\rho' = \mathrm{LU} = \mathrm{LI} + \mathrm{IU}.$$

Mais

$$\mathrm{LI} = 2\,\mathrm{LM'} = 2l\sin\omega;$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{IU} &= \mathrm{RU}\cot\alpha = (\mathrm{RQ} + \mathrm{QI})\cot\alpha\\ &= (\mathrm{TQ}\,\mathrm{tang}\,\omega + \mathrm{TL})\cot\alpha\\ &= (2l\sin\omega\,\mathrm{tang}\,\omega + h\,\mathrm{tang}\,\alpha)\cot\alpha\\ &= 2l\sin\omega\,\mathrm{tang}\,\omega\cot\alpha + h.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\rho' &= 2l\sin\omega(1 + \mathrm{tang}\,\omega\cot\alpha) + h\\ &= 2l\,\frac{\sin(\alpha+\omega)}{\sin\alpha}\,\mathrm{tang}\,\omega + h.\end{aligned}$$

Or le triangle $\mathrm{L\Omega M}$ donne

$$\frac{\rho}{l} = \frac{\sin(\alpha+\omega)}{\sin\alpha};$$

par suite

$$\rho' = 2\rho\,\mathrm{tang}\,\omega + h = 3h,$$

ce qui démontre le théorème de Maclaurin :

Le rayon de courbure $\Omega\Omega'$ *de la développée d'une conique est égal au triple du segment* $\mathrm{P\Omega}$ *de la normale à cette développée, compris entre le centre de courbure* Ω *et le diamètre* OM.