BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CATALAN

Sur quelques théorèmes d'analyse et d'arithmétique

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 145-151

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__145_0>

Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique;
par M. Eugène Catalan.

I. — *Une formule de Cauchy.*

1. Cette formule, bien remarquable [1], est

$$(1)\quad \begin{cases} (1+x)(1+tx)(1+t^2x)\ldots(1+t^{n-1}x) \\ \quad = 1+\dfrac{1-t^n}{1-t}x+\dfrac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)}tx^2+\ldots+t^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n \quad [2]. \end{cases}$$

On va voir qu'il est facile d'en faire une démonstration *directe*.

Dans le second membre, x^p a pour coefficient

$$T_{n,p}=\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\ldots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^p)}t^{\frac{p(p-1)}{2}}.$$

Si l'on multiplie par $1+t^nx$ les deux membres de l'égalité (1), ce coefficient devient $T_{n,p}+t^nT_{n,p-1}$.

La formule étant évidente quand $n=1$, il faut donc, d'après le procédé classique, prouver que l'on a, *identiquement,*

$$(2)\qquad T_{n+1,p}=T_{n,p}+t^nT_{n,p-1}.$$

Or, si l'on supprime le facteur commun

$$\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\ldots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^{p-1})},$$

cette égalité se réduit à

$$\frac{1-t^{n+1}}{1-t^p}t^{\frac{p(p-1)}{2}}=\frac{1-t^{n-p+1}}{1-t^p}t^{\frac{p(p-1)}{2}}+t^{n+\frac{(p-1)(p-2)}{2}};$$

puis, à

$$(1-t^{n+1})t^{p-1}=(1-t^{n-p+1})t^{p-1}+t^n(1-t^p);$$

ce qui est exact.

II. — *Un théorème de Gauss.*

2. Comme je l'ai fait observer à l'endroit cité [3], d'après la

[1] Je m'en suis occupé, déjà, dans les *Notes sur la théorie des fractions continues...*, et dans les *Lettres à quelques Mathématiciens.*

[2] *Comptes rendus,* septembre 1843, p. 527.

[3] *Lettres...*, p. 19.

forme du premier membre, dans la formule de Cauchy, $T_{n,p}$ est un *polynôme entier,* fonction de t. D'ailleurs, $t^{\frac{p(p-1)}{2}}$ est une quantité première avec le dénominateur de $T_{n,p}$. En conséquence,

$$(3) \qquad \frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})\ldots(1-t^{n-p+1})}{(1-t)(1-t^2)\ldots(1-t^p)} = \text{entier} \quad (^1).$$

3. *Remarque I.* — Cette équation (3) constitue un beau théorème, dû à Gauss, ainsi que l'a constaté M. Perott [2].

Remarque II. — Le théorème de Gauss est cité dans l'*Algèbre* de M. J. Bertrand (première édition, p. 136). Cet Ouvrage est suivi des *Solutions des exercices,* données par G... et P.... A la page 356, on trouve une démonstration de l'égalité (3). Mais elle me semble inexacte. En effet, elle se réduit à établir l'existence d'une relation analogue à l'égalité (2), sans que l'on sache si *deux* des *trois* termes sont entiers [3].

III. — *Une rectification.*

4. A la page 99 des *Recherches sur quelques produits indéfinis,* la formule qui précède l'égalité (20), empruntée aux *Fundamenta,* a été mal *copiée*. Elle doit être lue ainsi

$$\frac{q}{1-q^2} + 2^3\frac{q^2}{1-q^4} + 3^3\frac{q^3}{1-q^6} + 4^3\frac{q^4}{1-q^8} + \ldots = \frac{k^2\omega^4}{\pi^2}.$$

D'ailleurs, l'égalité (20) est la même chose que

$$q(1+q+q^3+q^6+q^{10}+\ldots)^8 = \frac{k^2\omega^4}{\pi^2}.$$

Donc la formule (378), *corrigée,* est

$$(378^{bis}) \quad q(1+q+q^3+q^6+\ldots)^8 = \frac{q}{1-q^2} + 2^3\frac{q^2}{1-q^4} + 3^3\frac{q^3}{1-q^6} + \ldots;$$

---

(1) *Lettres...,* pp. 18 et 19. Elles contiennent quelques fautes typographiques.

(2) *Bulletin de la Société mathématique,* t. X, p. 87. La démonstration donnée par ce savant Professeur est plus *courte* que la nôtre; mais elle n'est pas *élémentaire*.

(3) *Voir,* sur ce point, la page 19 des *Lettres*.... Faute d'avoir examiné suffisamment la page 356, j'avais admis cette *pseudo*-démonstration.

ou, ce qui revient au même,

$$(379)\quad (q + q^9 + q^{25} + q^{49} + \ldots)^8 = \frac{q^8}{1-q^{16}} + 2^3 \frac{q^{16}}{1-q^{32}} + 3^3 \frac{q^{24}}{1-q^{48}} + \ldots ;$$

relation connue (¹).

IV. — *Autres séries elliptiques.*

5. On sait que

$$(4)\quad (q + q^9 + q^{25} + \ldots)^4 = \frac{q^4}{1-q^8} + 3 \frac{q^{12}}{1-q^{24}} + 5 \frac{q^{20}}{1-q^{40}} + \ldots \quad (^2).$$

Conséquemment,

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{q^4}{1-q^8} + 3 \frac{q^{12}}{1-q^{24}} + 5 \frac{q^{20}}{1-q^{40}} + \ldots\right]^2 \\ &\quad = \frac{q^8}{1-q^{16}} + 2^3 \frac{q^{16}}{1-q^{32}} + 3^3 \frac{q^{24}}{1-q^{48}} + \ldots \quad (^3); \end{aligned} \right.$$

ou, par le changement de q^4 en x,

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{x}{1-x^2} + 3 \frac{x^3}{1-x^6} + 5 \frac{x^5}{1-x^{10}} + 7 \frac{x^7}{1-x^{14}} + \ldots\right]^2 \\ &\quad = \frac{x^2}{1-x^4} + 2^3 \frac{x^4}{1-x^8} + 3^3 \frac{x^6}{1-x^{12}} + \ldots \quad (^4). \end{aligned} \right.$$

6. A la page 527 des *Comptes rendus* (⁵), l'illustre Cauchy donne cette autre formule, aussi importante que la première :

$$(7)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{(1-x)(1-tx)\ldots(1-t^{n-1}x)} \\ &\quad = 1 + \frac{1-t^n}{1-t} x + \frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)} x^2 + \ldots \quad (^6). \end{aligned} \right.$$

(¹) LEGENDRE, t. III, p. 133.

(²) *Recherches*..., p. 99.

(³) *Ibid.*

(⁴) Cette relation, qui me paraît remarquable, figure dans la page 100 des *Recherches*...; mais trop sommairement. Elle suppose, bien entendu, que le nombre x est inférieur à 1.

(⁵) Septembre 1843.

(⁶) Dans la série formant le second membre, les coefficients des puissances de x sont, d'après le théorème de Gauss (n° 3), des *polynômes entiers*.

Il en résulte, par le changement de x en $-x$,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{1}{(1+x)(1+tx)\ldots(1+t^{n-1}x)}\\&\quad=1-\frac{1-t^n}{1-t}x+\frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)}x^2-\ldots.\end{aligned}\right.$$

Comparant avec l'égalité (1), on a donc

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}1=&\left[1+\frac{1-t^n}{1-t}x+\frac{(1-t^n)(1-t^{n-1})}{(1-t)(1-t^2)}tx^2+\ldots+t^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n\right]\\&\times\left[1-\frac{1-t^n}{1-t}x+\frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})}{(1-t)(1-t^2)}x^2\right.\\&\quad\left.-\frac{(1-t^n)(1-t^{n+1})(1-t^{n+2})}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}x^3+\ldots\right];\end{aligned}\right.$$

et, si n devient infini,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned}1=&\left[1+\frac{x}{1-t}+\frac{tx^2}{(1-t)(1-t^2)}+\frac{t^3x^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}+\ldots\right]\\&\times\left[1-\frac{x}{1-t}+\frac{x^2}{(1-t)(1-t^2)}-\frac{x^3}{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)}+\ldots\right].\end{aligned}\right.$$

7. Dans cette relation générale, supposons $t=x=q$. Elle devient

$$(11)\qquad 1=AB;$$

en posant, pour abréger,

$$(12)\quad A=1+\frac{q}{1-q}+\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^6}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\ldots,$$

$$(13)\quad B=1-\frac{q}{1-q}+\frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)}-\frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\ldots.$$

8. A la page 52 des *Recherches,* on trouve

$$(14)\qquad A=B'C',$$

en faisant

$$(15)\quad B'=1+\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\ldots,$$

$$(16)\quad C'=1+\frac{q^2}{1-q^2}+\frac{q^6}{(1-q^2)(1-q^4)}+\frac{q^{12}}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}+\ldots.$$

De plus ([1]),

$$B' = \beta, \qquad C' = \beta'. \tag{15}$$

La combinaison des égalités (11), (14) donne

$$1 = BB'C'; \tag{16}$$

ou, à cause des valeurs (15),

$$1 = B\beta\beta'. \tag{17}$$

Mais, d'après Euler,

$$1 = \alpha\beta\beta' \quad ([2]);$$

donc

$$B = \alpha. \tag{18}$$

9. Si, dans une célèbre formule de Jacobi ([3]), on prend $z = -1$, on trouve

$$\alpha = 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} + \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots. \tag{19}$$

A cause de la *définition* (13) et de l'égalité (18), nous avons donc, finalement,

$$\left\{\begin{aligned} &1 - \frac{q}{1-q} + \frac{q^2}{(1-q)(1-q^2)} - \frac{q^3}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} + \ldots \\ &= 1 - \frac{q}{1-q^2} + \frac{q^4}{(1-q^2)(1-q^4)} - \frac{q^9}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Ainsi, *ces deux séries ont même limite* ([4]).

V. — *Théorème d'Arithmétique.*

10. Reprenons la formule

$$\left\{\begin{aligned} &\left[\frac{x}{1-x^2} + 3\,\frac{x^3}{1-x^6} + 5\,\frac{x^5}{1-x^{10}} + \ldots\right]^2 \\ &= \frac{x^2}{1-x^4} + 2^3\,\frac{x^4}{1-x^8} + 3^3\,\frac{x^6}{1-x^{12}} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

([1]) Même page.

([2]) *Recherches...*, p. 2.

([3]) *Fundamenta*, p. 180. *Voir*, aussi, les *Notes sur la théorie des fractions continues...*, p. 6.

([4]) Les relations (18), (20) sont-elles *nouvelles?* Quoi qu'il en soit, elles *complètent*, pour ainsi dire, les théorèmes exprimés par les égalités (15).

Nous avons, en employant la notation d'Euler,

$$\frac{x}{1-x^2}+3\frac{x^3}{1-x^6}+5\frac{x^5}{1-x^{10}}+\ldots = x+4x^3+6x^5+\ldots+x^n\int n+\ldots;$$

ou, pour abréger,

$$(21) \qquad \frac{x}{1-x^2}+3\frac{x^3}{1-x^6}+5\frac{x^5}{1-x^{10}}+\ldots = \sum_1^\infty x^n \int n,$$

n étant *impair*.

Dans le développement du premier membre de l'égalité (6), le coefficient de x^{2n} est donc

$$(22) \qquad \int 1 \int (2n-1) + \int 3 \int (2n-3) + \ldots + \int (2n-1) \int 1 = S_{2n}.$$

D'autre part, le terme général du second membre est

$$\lambda^3 \frac{x^{2\lambda}}{1-x^{4\lambda}}.$$

Développé, ce terme devient

$$\lambda^3 [x^{2\lambda}+x^{6\lambda}+x^{10\lambda}+\ldots+x^{2\mu\lambda}+\ldots],$$

μ étant *impair*. Si donc

$$\lambda\mu = n,$$

on voit que λ, μ sont deux facteurs, *conjugués*, du nombre *impair* n. Par suite, le coefficient de x^{2n}, dans le second membre dont il s'agit, est $\sum \lambda^3$ (¹). On a donc ce théorème :

n étant un nombre impair, on décompose $2n$, par voie d'addition, en

$$1+(2n-1), \qquad 3+(2n-3), \qquad 5+(2n-5), \ldots (2n-1)+1;$$

et l'on fait la somme, S_{2n}, des produits

$$\int 1 \int (2n-1), \quad \int 3 \int (2n-3), \quad \ldots, \quad \int (2n-1) \int 1.$$

D'autre part, on prend tous les diviseurs de n, savoir, $1, \ldots, \lambda, \ldots, n$; *et l'on forme la somme $\sum \lambda^3$ de ces diviseurs.*

Cela posé, les deux sommes sont égales.

(¹) J'admets la convergence de la série, facile à prouver.

11. *Application.* — Soit $n = 9$; d'où $\lambda = 1, 3, 9$. On a

$$S_{18} = 2\left[\int 1 \int 17 + \int 3 \int 15 + \int 5 \int 13 + \int 7 \int 11\right] + \left[\int 9\right]^2$$
$$= 2[1.18 + 4.24 + 6.14 + 8.12] + 13^2 = 588 + 169 = 757.$$

Cette somme doit égaler $1^3 + 3^3 + 9^3 = 1 + 27 + 729$; ce qui est vrai.

12. *Remarque.* — Si le nombre n est *premier,* les seules valeurs de λ sont 1 et n. Donc, dans ce cas particulier,

(23) $$S_{2n} = 1 + n^3 \quad (^1).$$

Liège, septembre 1891.

---

(1) Le théorème précédent, qui n'est pas nouveau (*Recherches...*, p. 100), me paraît curieux. Il serait difficile peut-être de le démontrer *directement*.