

BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 52-54

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__52_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques;
par M. C.-A. LAISANT.

Lorsque deux variables, x et y , sont liées par la relation

$$(1) \quad \sin x = \operatorname{Th} y,$$

x est dite *amplitude hyperbolique* de y ; et, réciproquement, on appelle y , d'après Gudermann, *longueur* de x .

Cette relation (1) entraîne les suivantes :

$$(2) \quad \operatorname{tang} x = \operatorname{Sh} y,$$

$$(3) \quad \cos x = \operatorname{Séch} y = \frac{1}{\operatorname{Ch} y}.$$

On a aussi

$$(4) \quad \operatorname{tang} \frac{x}{2} = \operatorname{Th} \frac{y}{2} = z.$$

La formule (3) peut s'écrire

$$\cos x \operatorname{Ch} y = 1,$$

et l'on en tire, par différentiation,

$$-\sin x \operatorname{Ch} y \, dx + \cos x \operatorname{Sh} y \, dy = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des relations précédentes,

$$(5) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \operatorname{Ch} y}{\cos x \operatorname{Sh} y} = \frac{1}{\cos x} = \operatorname{Ch} y.$$

Par conséquent,

$$dy = \frac{dx}{\cos x}, \quad dx = \frac{dy}{\operatorname{Ch} y}.$$

Intégrant,

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\cos x} = y = \mathfrak{f} x,$$

$$(7) \quad \int \frac{dy}{\operatorname{Ch} y} = x = \operatorname{Amh} y.$$

D'ordinaire, on écrit la première de ces deux intégrales sous la forme plus compliquée

$$\log \operatorname{tang} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \quad \text{ou} \quad \log \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}.$$

La relation (5) peut encore s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Sh} y}{\sin x} = \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{Th} y}.$$

Donc

$$(8) \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{\operatorname{Sh} y},$$

$$(9) \quad \int \operatorname{tang} x \, dx = \int \operatorname{Th} y \, dy.$$

L'emploi de la valeur z , introduite dans la formule (4) ci-dessus, permet de donner aux intégrales qui précèdent les formes

très simples

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dy}{\text{Sh } y} = \log z, \\ \int \text{tang } x \, dx &= \int \text{Th } y \, dy = \log \frac{1+z^2}{1-z^2}, \\ \int \frac{dx}{\cos x} &= 2 \arg \text{Th } z, \quad \int \frac{dy}{\text{Ch } y} = 2 \text{arc tang } z.\end{aligned}$$

Il va de soi que les diverses intégrales ci-dessus doivent être prises entre les mêmes limites correspondantes pour que les formules soient valables.
