BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Tétraèdre arithmétique

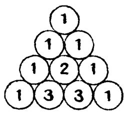
Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 18-23
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__18_1>

Tétraèdre arithmétique; par M. C.-A. Laisant.

1. Le triangle arithmétique de Pascal peut s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

ou, sous une forme plus figurative peut-être,



. . . .

en employant une série de cercles égaux tangents entre eux, savoir, un dans une première ligne horizontale, deux dans la deuxième, et ainsi de suite : le coefficient qu'on inscrit dans chaque cercle s'obtient en ajoutant ceux des deux cercles tangents de la ligne supérieure. Lorsqu'il n'y en a qu'un, ce qui arrive pour les termes extrêmes de chaque ligne, on le reproduit purement et simplement. En partant du coefficient 1 au sommet, la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne donne les coefficients du développement $(x+y)^n$, lesquels sont symétriquement disposés par rapport au milieu de la ligne.

2. Reprenons la figure précédente, formée jusqu'à la $(n+1)^{\text{ième}}$ ligne, et écrivons en regard, sur une colonne verticale, les $n+1$ coefficients $1 = c_0, c_1, \ldots, c_n = 1$ de $(x+y)^n$:

$$
\begin{array}{l}
c_0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1 \\
c_1 \ldots\ldots\ldots \quad 1 \quad 1 \\
c_2 \ldots\ldots \quad 1 \quad 2 \quad 1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_n \ldots\ldots c_0, \quad c_1 \ldots\ldots c_n
\end{array}
$$

Si nous multiplions les termes de chaque ligne par le coefficient placé en regard de cette ligne, nous obtiendrons les coefficients du développement d'un trinôme $(x+y+z)^n$ élevé à la $n^{\text{ième}}$ puissance. En effet, prenons, par exemple, la $(p+1)^{\text{ième}}$ ligne, contenant les coefficients de $(x+y)^p$; le terme qui dans cette ligne occupe le rang $q+1$ est $\frac{p!}{q!(p-q)!}$; le coefficient c^p placé en regard est $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. Le produit sera donc

$$\frac{n!}{(n-p)!\,q!\,(p-q)!},$$

c'est-à-dire précisément le coefficient du terme en $x^{n-p}\,y^q\,z^{p-q}$ dans le développement de $(x+y+z)^n$.

D'après cela, la première ligne, en partant du bas, c'est-à-dire la base elle-même, contient les coefficients des termes indépendants de x; la deuxième ligne, ceux des termes en x; la troisième, ceux des termes en x^2, ..., et, enfin, le sommet représente le coefficient 1 du terme en x^n.

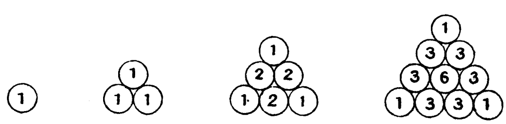
La figure ainsi obtenue présentant une triple symétrie parfaite, par rapport aux trois côtés, nous pouvons répéter ce que nous venons de dire pour x aux deux autres termes y et z; si bien que la figure nous donnera immédiatement le coefficient d'un terme quelconque en $x^k y^l z^m$ le sommet $k+l+m$ étant égal à n.

Pour éclaircir ceci par un exemple, formons le Tableau relatif à $(x+y+z)^7$:

y^0									
y^1	1								x^7
y^2	7	7							x^6
y^3	21	42	21						x^5
y^4	35	105	105	35					x^4
y^5	35	140	210	140	35				x^3
y^6	21	105	210	210	105	21			x^2
y^7	7	42	105	140	105	42	7		x^1
	1	7	21	35	35	21	7	1	x^0
	z_0	z_1	z^2	z^3	z^4	z^5	z^6	z^7	

Si nous voulons avoir le coefficient du terme en $x^2 y z^4$, par exemple, nous prendrons l'intersection des deux lignes x^2 et y, ce qui nous donne le coefficient 105, lequel est forcément sur la ligne z^4. De même, le coefficient de xy^3z^3 serait 140.

3. Formons les figures successives indiquées au numéro précédent, en représentant les termes comme au n° **1**,



. . . .

Supposons que chacune d'elles représente une couche de sphères ou de boulets sphériques; puis plaçons ces couches les unes au-dessus des autres, en commençant par la plus grande comme base. Nous aurons ainsi une figure représentant une pile de boulets triangulaire. Chaque boulet est affecté d'un coefficient, qui s'obtient comme il suit : le coefficient du boulet placé au sommet est égal à 1, et le coefficient d'un boulet quelconque est égal à la somme des coefficients des boulets de la couche supérieure, qui sont en contact avec lui [1].

C'est à cette figure que nous proposons de donner le nom de *tétraèdre arithmétique.* On voit toute l'analogie de formation qu'elle présente avec le triangle arithmétique de Pascal. Ce dernier donne toujours à sa base les coefficients de $(x+y)^n$ écrits en ligne droite; le tétraèdre donne à sa base les coefficients de $(x+y+z)^n$ écrits en triangle.

4. La base du tétraèdre arithmétique (n° 2) présente plusieurs propriétés presque évidentes :

1° *Le nombre de ses éléments est* $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$;

2° *La somme de ses éléments est* 3^n; car $(1+1+1)^n = 3^n$;

3° *Si l'on affecte du signe + toutes les lignes de rangs impairs, à partir de l'un des côtés, et du signe — toutes les lignes de rangs pairs, la somme algébrique des éléments est égale à l'unité;* on a, en effet, $(-x+y+z)^n$ en faisant $x=y=z=1$;

4° *Si, ayant fait l'opération que nous venons de dire, on multiplie les éléments de la deuxième ligne par* 2, *ceux de la troisième par* 2^2, *ceux de la quatrième par* 2^3, *et ainsi de suite, la somme algébrique des éléments ainsi obtenus est égale à zéro;* on a, en effet, $(-2+1+1)^n$.

Nous pouvons chercher aussi le produit de tous les éléments,

---

[1] Cette propriété résulte de l'identité

$$\frac{(k+l+m)!}{k!\,l!\,m!} = \frac{(k+l+m-1)!}{k!\,l!\,(m-1)!} + \frac{(k+l+m-1)!}{k!\,(l-1)!\,m!} + \frac{(k+l+m-1)!}{(k-1)!\,l!\,m!},$$

dont la vérification est très facile.

c'est-à-dire le produit des coefficients du développement de $(x+y+z)^n$. Pour cela, prenons la formation indiquée au commencement du n° 2. Si nous appelons P_k le produit des coefficients de $(x+y)^k$, c'est-à-dire de la $k+1^{\text{ième}}$ ligne, il est évident que le produit des éléments composant cette ligne sera $c_k^{k+1}P_k$. Nous aurons donc pour le produit cherché $\mathfrak{P}_n$.

$$\mathfrak{P}_n = c_0 c_1^2 c_2^3 \ldots c_n^{n+1}\, P_1 P_2 \ldots P_n.$$

Remplaçant chaque coefficient c_k par $\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ et chaque produit P_k par l'expression $\dfrac{(k!)^{k-1}}{[1!2!3!\ldots(k-1)]^2}$, d'après une formule que nous avons précédemment établie ([1]), on trouve la nouvelle expression

$$\frac{(n!)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}}{[1!^n 2!^{n-1} 3!^{n-2}\ldots(n-1)!^2 n!]^3}.$$

Il est possible, enfin, de simplifier encore ce résultat en appelant

$$t_1 = \frac{1.2}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{2.3}{2} = 3, \quad t_3 = \frac{3.4}{2} = 6, \quad \ldots, \quad t_p = \frac{p(p+1)}{2}, \quad \ldots$$

les nombres triangulaires successifs.

On a alors

$$\mathfrak{P}_n = n^{t_{n+1}-3t_1}(n-1)^{t_{n+1}-3t_2}\ldots 2^{t_{n+1}-3t_{n-1}}\, 1^{t_{n+1}-3t_n}.$$

Par exemple, si $n=3$, les nombres triangulaires étant

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots,$$

les exposants prendront les valeurs $10-3=7$, $10-9=1$, $10-18=-8$, et

$$\mathfrak{P}_3 = 3^7.2.$$

Pour $n=4$, les exposants sont $15-3=12$, $15-9=6$, $15-18=-3$, et

$$\mathfrak{P}_4 = 4^{12}.3^6.2^{-3}.$$

Pour $n=5$, les exposants sont $21-3=18$, $21-9=12$,

([1]) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XVIII, p. 140.

$21 - 18 = 3$, $21 - 30 = -9$, et

$$\mathfrak{P}_5 = 5^{18}.4^{12}.3^3.2^{-9}.$$

Le rapport de deux produits consécutifs $\mathfrak{P}_{n+1}$ et $\mathfrak{P}_n$ est

$$\frac{\mathfrak{P}_{n+1}}{\mathfrak{P}_n} = (n+1)^{\frac{n(n+3)}{2}}.n^{n-4}.(n-1)^{n-7}.(n-2)^{n-10}\ldots 2^{-2n+2}.$$

Par exemple,

$$\frac{\mathfrak{P}_5}{\mathfrak{P}_4} = 5^{\frac{4.9}{2}}.4^{4-4}3^{4-7}.2^{4-10} = 5^{18}.4^0.3^{-3}.2^{-6}.$$

5. Concevons que nous ayons formé le tétraèdre arithmétique d'ordre n, défini comme nous l'avons dit au n° 3, et posé sur une base horizontale. Si nous plaçons les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_n$ de $(x+y)^n$ sur une ligne verticale, chacun d'eux répondant à une couche horizontale, et si nous formons les produits de tous les éléments d'une couche quelconque par le coefficient correspondant, nous obtiendrons un nouveau tétraèdre, dont les éléments numériques offriront une entière symétrie par rapport aux quatre faces. Ces éléments seront les coefficients du développement de $(x+y+z+t)^n$.

Il serait facile d'établir diverses propriétés de cette figure, par analogie avec celles du n° 4. Nous nous contenterons, comme résumé de ce qui précède, de faire remarquer que :

Les coefficients du développement de $(x+y)^n$ se disposent symétriquement suivant une ligne droite;

Ceux du développement de $(x+y+z)^n$ suivant un triangle arithmétique;

Ceux du développement de $(x+y+z+t)^n$ suivant un tétraèdre arithmétique.

Par analogie avec ce qui précède, on peut aisément déterminer aussi le produit des coefficients du développement de $(x+y+z+t)^n$, lequel a pour expression

$$c_0^{t_1} c_1^{t_2} c_2^{t_3} \ldots c_n^{t_{n+1}}.\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_n.$$