

# BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

## Propriété géométrique des coefficients du binôme

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 19 (1891), p. 4-5

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1891\\_\\_19\\_\\_4\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__4_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

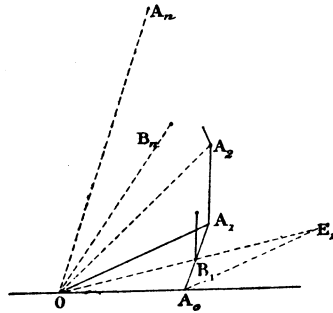
NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Propriété géométrique des coefficients du binôme ;*  
par M. C.-A. LAISANT.

On sait qu'on appelle *myosotis* la figure formée par une série de triangles directement semblables  $OA_0A_1$ ,  $OA_1A_2$ , ... accolés successivement les uns aux autres. Nous appellerons le premier de ces triangles  $OA_0A_1$  *base* du myosotis.

Soit un myosotis  $OA_0A_1 \dots A_n$  composé de  $n$  triangles. Appli-



quons aux sommets  $A_0, A_1, \dots, A_n$  des masses proportionnelles aux coefficients  $1 = C_0, C_1, \dots, C_n = 1$  du développement de  $(x+1)^n$ ; et proposons-nous de trouver le barycentre de ce système.

Si nous prenons  $OA_0$  pour unité, et si nous posons  $OA_1 = \lambda$ , nous avons  $OA_2 = \lambda^2, OA_3 = \lambda^3, \dots, OA_n = \lambda^n$ , et, par conséquent, le barycentre cherché  $K$  est donné par

$$\begin{aligned} OK = \kappa &= \frac{C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 + \dots + C_n\lambda^n}{C_0 + C_1 + C_2 + \dots + C_n} \\ &= \frac{(1+\lambda)^n}{2^n} = \left(\frac{1+\lambda}{2}\right)^n = \lambda^n = OB_1^n, \end{aligned}$$

en désignant par  $B_1$  le milieu de  $A_0A_1$ .

Si donc nous construisons le myosotis  $OA_0B_1B_2 \dots B_n$ , de base  $OA_0B_1$ , le sommet  $B_n$  sera le barycentre cherché.

Il est évident, d'après cela, que l'angle  $B_nOA_0$  est égal à  $n$  fois l'angle  $B_1OA_0$ . Quand le triangle de base  $OA_0A_1$  est isocèle, tous les points  $A_0, A_1, \dots$  sont sur une même circonférence; et alors  $OB_n$  est la bissectrice de  $A_nOA_0$ .

Quand le triangle  $OA_0B_1$  est isoscèle, le barycentre est sur la circonférence de centre  $O$  et de rayon  $OA_0$ .

Si l'on prolonge les droites  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ , de telle sorte qu'on ait  $OD_1 = C_1 OA_1 = \dots, OD_n = C_n OA_n = OA_n$ , il sera aisé de trouver le centre des moyennes distances  $L$  des points  $A_0, D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, A_n$ . En effet, on aura

$$(n+1)L = C_0 A + C_1 A^2 + \dots + C_n A^n = (1+A)^n.$$

Si nous prolongeons  $OB_1$  en  $OE_1 = 2OB_1$  et si nous construisons le myosotis de base  $OA_0E_1$ , c'est-à-dire  $OA_0E_1E_2 \dots E_n$ , on aura, par conséquent,  $OL = \frac{OE_n}{n+1}$ .

Si, enfin, nous construisons  $OF_1 = \frac{OA_1}{C_1}, OF_2 = \frac{OA_2}{C_2}, \dots, OF_n = \frac{OA_n}{C_n} = OA_n$ , et, si nous appliquons en  $A_0, F_1, F_2, \dots, A_n$ , des masses proportionnelles aux carrés des coefficients  $C_0^2, C_1^2, \dots, C_n^2$ , le barycentre  $G$  de ce système sera donné par la relation

$$\frac{(2n)!}{n!n!} OG = (1+A)^n = OE_n, \quad OG = \frac{n!n!}{(2n)!} OE_n$$

On peut remarquer que  $OE_n = 2^n OB_n$ .

---