

BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

Expression du produit des coefficients du binôme

Bulletin de la S. M. F., tome 18 (1890), p. 140-141

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1890__18__140_1

© Bulletin de la S. M. F., 1890, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Expression du produit des coefficients du binôme ;
par M. C.-A. LAISANT.

Les coefficients du développement $(1+x)^n$ sont, à l'exception des deux extrêmes, $c_0 = 1$, $c_n = 1$, représentés par les expressions

$$\frac{n!}{1!(n-1)!} \frac{n!}{2!(n-2)!} \cdots \frac{n!}{(n-1)!1!}.$$

Le produit de tous les coefficients de ce développement est donc

$$P_n = \frac{(n!)^{n-1}}{[1!2!\dots(n-1)!]^2}.$$

Le numérateur peut s'écrire

$$2^{n-1}.3^{n-1}.4^{n-1}\dots(n-1)^{n-1}.n^{n-1},$$

et le dénominateur

$$2^{2n-4}.3^{2n-6}.4^{2n-8}\dots(n-1)^2.$$

Par conséquent,

$$P_n = 2^{-n+3}.3^{-n+5}.4^{-n+7}\dots(n-1)^{n-3}.n^{n-1},$$

ou, en groupant les termes qui ont des exposants égaux et de signes contraires,

$$P_n = \left(\frac{n}{1}\right)^{n-1} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-3} \left(\frac{n-2}{3}\right)^{n-5} \dots$$

Si n est pair, le dernier facteur a pour exposant l'unité et est égal à

$\frac{\frac{n}{2} + 1}{\frac{n}{2}}$; si n est impair, ce dernier facteur, égal à l'unité, a pour

exposant zéro.

Dans ce dernier cas, il est évident que P_n est un carré.

Par exemple, le produit des coefficients de $(1+n)^6$, ou 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1 est égal à $\left(\frac{6}{1}\right)^5 \left(\frac{5}{2}\right)^3 \left(\frac{4}{3}\right)$.

Le produit des coefficients 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1 de $(1+n)^7$ est

$$\left(\frac{7}{1}\right)^6 \left(\frac{6}{2}\right)^4 \left(\frac{5}{3}\right)^2.$$

Il résulte de l'expression même de P_n que l'on a, pour le rapport des deux produits se rapportant à des puissances consécutives,

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{(n+1)^n}{n!}.$$
