

BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

**Note sur les variations du rapport anharmonique
de quatre points dont trois sont fixes**

Bulletin de la S. M. F., tome 17 (1889), p. 169-171

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__169_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1889__17__169_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1889, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Note sur les variations du rapport anharmonique de quatre points, dont trois sont fixes; par M. C.-A. LAISANT.

(Séance du 23 janvier 1889.)

1. Soit $\frac{MC}{MB} : \frac{AC}{AB} = \lambda$ le rapport anharmonique des quatre points M, A, B, C situés dans un même plan, les trois points A, B, C étant fixes; λ sera en général un rapport géométrique dont le module r sera un nombre positif, et dont nous désignons l'argument par θ .

Posons, en outre,

$$\text{gr AC} = b, \quad \text{gr AB} = c, \quad \text{ang BAC} = A.$$

Nous aurons

$$(1) \quad \frac{MC}{MB} = r \frac{b}{c} \varepsilon^{\theta + A}.$$

2. La forme de cette relation (1) nous montre immédiatement :

1° Que si θ est constant et r variable, le lieu géométrique décrit par M est une circonférence passant par les points B et C (segment capable de l'angle $\theta + A$, décrit sur la corde BC);

2° Que si r est constant et θ variable, le lieu géométrique de M est une circonférence dont le centre est situé sur BC (lieu des points tels que le rapport de deux distances à C et B est égal à $\frac{rb}{c}$).

En particulier :

Si $\theta = 0$, le lieu géométrique de M est la circonférence circonscrite au triangle ABC; le rapport anharmonique est alors réel;

Si $\theta = -A$, le lieu géométrique de M n'est autre que la droite BC;

Si $\theta = \frac{\pi}{2} - A$, le lieu géométrique de M est la circonférence décrite sur BC comme diamètre;

Si $r = 1$, le lieu géométrique de M est une circonférence passant par A, par le pied de la bissectrice de A dans le triangle ABC, et ayant son centre sur BC;

Si $r = \frac{c}{b}$, le lieu géométrique de M se réduit à la droite perpendiculaire sur le milieu de BC.

3. Lorsque, θ étant seul variable, on donne successivement à r deux valeurs r', r'' , telles que $r' r'' = \frac{c^2}{b^2}$, les deux lieux géométriques qu'on obtient ainsi pour M sont deux circonférences symétriques par rapport au milieu du côté BC.

Lorsque, r étant seul variable, on donne successivement à θ , deux valeurs θ', θ'' , telles que $\theta' + \theta'' = -2A$, les deux lieux géométriques qu'on obtient pour M sont deux circonférences symétriques par rapport à la droite BC.

On remarquera que, dans le cas où r est variable, il faut, pour obtenir les lieux géométriques complets, supposer que r prend toutes les valeurs réelles depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$; autrement, en ne donnant à r que des valeurs positives, on n'aurait qu'un arc des circonférences en question

4. La relation (1) peut s'écrire $\frac{MC}{MB} = \lambda \frac{AC}{AB}$ ou

$$(2) \quad M - C = \lambda(M - B) \frac{A - C}{A - B} = \lambda \alpha(M - B).$$

En la différentiant, on a

$$dM(1 - \lambda\alpha) = \alpha d\lambda(M - B).$$

Si l'on donne à λ un autre accroissement infiniment petit $\partial\lambda$, on aura de même

$$\partial M(1 - \lambda\alpha) = \alpha \partial\lambda(M - B),$$

et, par conséquent,

$$(3) \quad \frac{dM}{\partial M} = \frac{d\lambda}{\partial\lambda}.$$

Appelons $d\lambda$ l'accroissement de λ lorsque, r restant constant, on fait seulement varier θ , et $\partial\lambda$ l'accroissement qu'on obtient en laissant θ constant et faisant varier r . Alors

$$d\lambda = i d\theta r \varepsilon^\theta, \quad \partial\lambda = dr \varepsilon^\theta.$$

Donc, en vertu de la relation (3),

$$(4) \quad \frac{d\mathbf{M}}{\partial\mathbf{M}} = i \frac{r d\theta}{dr} \parallel i.$$

Il en résulte, par conséquent, que les deux déplacements infiniment petits du point M ainsi obtenus sont rectangulaires, c'est-à-dire que les deux systèmes de circonférences considérés au n° 2 ci-dessus sont orthogonaux.

5. Si l'on écrit une relation réelle quelconque entre les deux variables r et θ ,

$$(5) \quad f(r, \theta) = 0,$$

le point M sera assujéti à se mouvoir sur une certaine courbe que l'équation (5) représente. On a ainsi un système de coordonnées tout à fait analogue comme notation aux coordonnées polaires, mais d'une interprétation géométrique bien différente.

Quand, une position du point M étant déterminée, on fait varier successivement l'une ou l'autre de ses deux coordonnées, en laissant l'autre fixe, le point M se déplace, soit sur l'une, soit sur l'autre des deux circonférences orthogonales des deux systèmes.

L'équation $r = 0$, en particulier, représente le point C et l'équation $r = \infty$, le point B.
