BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur les systèmes de péninvariants principaux d'une forme binaire

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 183-187
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__183_1>

Sur les systèmes de péninvariants principaux d'une forme binaire; par M. MAURICE D'OCAGNE.

(Séance du 5 décembre 1888.)

Je commencerai par définir la notation suivante :

Etant donnée une suite de quantités affectées d'indices u_0, u_1, u_2, ..., u_n..., je désignerai par *la même lettre dépourvue d'in-*

dice une variable fictive par rapport à laquelle, dans la suite précédente, chaque quantité aurait pour dérivée celle qui vient immédiatement après elle, c'est-à-dire telle que

$$\frac{du_0}{du} = u_1, \quad \frac{du_1}{du} = u_2, \quad \ldots, \quad \frac{du_n}{du} = u_{n+1}, \quad \ldots.$$

Dès lors, on voit quelle est l'opération à effectuer sur une fonction quelconque de u_0, u_1, u_2, ..., que symbolise la notation $\frac{d}{du}$.

Cette définition posée, je rappellerai un théorème que j'ai obtenu jadis ([1]) et qui a été depuis considérablement généralisé d'abord par moi-même ([2]), puis par M. Perrin ([3]). Voici ce théorème :

Pour p au moins égal à 2, *l'expression*

$$\varphi_p = a_0^p \frac{d^p l a_0}{da^p}$$

est un péninvariant de la forme binaire représentée symboliquement par $(x + \underline{a}y)^n$.

J'ai fait observer ([4]), en outre, que les $n - 1$ péninvariants fournis par cette expression, dans laquelle on fait $p = 2, 3, 4, \ldots, n$, constituent *un système de péninvariants principaux de la forme de degré n considérée*. En d'autres termes, *ils peuvent servir à exprimer tous les péninvariants de cette forme*.

Or on sait que le système des péninvariants principaux ordinaires v_2, v_3, ..., v_n est défini par les formules

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} v_{2p} &= a_0 a_{2p} - 2p a_1 a_{2p-1} + \frac{2p(2p-1)}{1.2} a_2 a_{2p-2} - \ldots \\ &\pm \frac{1}{2} \frac{2p(2p-1)\ldots(p+1)}{1.2\ldots p} a_p^2. \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad v_{2p+1} = a_0 \frac{dv_{2p}}{da} - 2a_1 v_{2p}.$$

([1]) *Comptes rendus*, t. CII, p. 916.
([2]) *Ibid.*, t. CIV, p. 961 et 1364.
([3]) *Ibid.*, t. CIV, p. 1097 et 1258.
([4]) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XI, p. 316.

Un problème se posait donc tout naturellement : *passer du système de péninvariants principaux* (φ) *au système* (v) *et réciproquement*. Ce problème présentait une réelle difficulté en raison de la discontinuité de la loi de formation des péninvariants v, et pourtant des formules (¹), obtenues par un calcul de proche en proche, assez laborieux, faisaient soupçonner des formules générales fort élégantes.

Ces formules générales viennent, *pour le cas des indices pairs*, d'être établies par M. E. Cesaro, avec une remarquable habileté (²). Représentant par $\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\varepsilon_r$ la somme de tous les produits analogues à $\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_2}\ldots, \varepsilon_{r_i}$, où $r_1 + r_2 + \ldots + r_i = p$, en nombres entiers et positifs (algorithme isobarique), M. Cesaro a démontré que

$$(3) \qquad v_{2p} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r!)} \right] \right\}.$$

$$(4) \qquad \varphi_{2p} = (2p)! \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-2)^{i-1} \frac{a_0^{2p-2i}}{i} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \left[\frac{v_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

Il restait à trouver les formules générales correspondant au cas des *indices impairs*. J'ai été assez heureux pour y parvenir en partant des résultats mêmes de M. Cesaro. En supposant v_{2p} et φ_{2p} remplacés par leurs expressions (3) et (4) et faisant usage de la notation symbolique définie en commençant, j'écris ces formules

$$(5) \qquad v_{2p+1} = \frac{dv_{2p}}{d\varphi},$$

$$(6) \qquad \varphi_{2p+1} = \frac{d\varphi_{2p}}{dv}.$$

Leur similitude est tout à fait frappante, étant donnée la différence qui existe entre les lois de formation des systèmes (v) et (φ). Leurs démonstrations présentent aussi une grande analogie. Je me bornerai à indiquer celle de la formule (5).

(¹) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XI, p. 317.

(²) *Nouvelles Annales*, 3ᵉ série, t. VII, p. 464.

Appliquant à l'expression (3) de v_{2p} l'opération désignée symboliquement par $\frac{d}{da}$, on a, en écrivant $\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}$ pour $\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!}\right]$,

$$(7) \qquad \frac{dv_{2p}}{da} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-1}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \left[a_0 \frac{d\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}}{da} - (2p-2)a_1 \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \right] \right\}.$$

Si l'on porte les valeurs (3) et (7) de v_{2p} et $\frac{dv_{2p}}{da}$ dans (2), il vient

$$(8) \qquad v_{2p+1} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left[\frac{2^{i-1}}{i!} \left(a_0 \frac{d\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}}{da} - 2pa_1 \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} \right) \right].$$

Si nous écrivons $\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}\left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!}\right]$ sous la forme

$$\mathrm{S}_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1}\varphi_{2r_2}\ldots\varphi_{2r_i}}{(2r_1)!(2r_2)!\ldots(2r_i)!},$$

nous voyons que

$$\frac{d\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}}{da} = \mathrm{S}_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1}\varphi_{2r_2}\ldots\frac{d\varphi_{2r_k}}{da}\ldots\varphi_{2r_i}}{(2r_1)!(2r_2)!\ldots(2r_k)!\ldots(2r_i)!}.$$

Mais de la définition même des φ on déduit

$$(9) \qquad \frac{d\varphi_{2r_k}}{da} = \frac{\varphi_{2r_{k+1}} + 2r_k a_1 \varphi_{2r_k}}{a_0}.$$

Transformant la formule précédente au moyen de celle-ci et tenant compte de la condition $r_1 + r_2 + \ldots + r_i = p$, on voit que

$$\frac{d\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}}{da} = \frac{1}{a_0} \mathrm{S}_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1}\varphi_{2r_2}\ldots\varphi_{2r_{k+1}}\ldots\varphi_{2r_i}}{(2r_1)!(2r_2)!\ldots(2r_k)!\ldots(2r_i)!} + \frac{2pa_1}{a_0} \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}},$$

d'où

$$a_0 \frac{d\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}}{da} - 2pa_1 \overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}} = \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1}\varphi_{2r_2}\ldots\varphi_{2r_{k+1}}\ldots\varphi_{2r_i}}{(2r_1)!(2r_2)!\ldots(2r_k)!\ldots(2r_i)!}.$$

Or le second membre de cette expression n'est autre chose, avec notre notation, que $\dfrac{d\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}}{da}$. La formule (8) devient donc

$$v_{2p+1} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left(\frac{2^{i-1}}{i!} \frac{d\overset{i}{\underset{p}{\mathrm{S}}}}{da} \right),$$

ou, en rapprochant de (3),

$$v_{2p+1} = \frac{dv_{2p}}{da}.$$

La formule (5) se trouve ainsi établie. La démonstration de la formule (6) est analogue, avec cette différence que c'est la formule (2) qui y joue le rôle rempli ci-dessus par la formule (9).

Exemple d'application. — Les formules (3) et (4) de M. Cesaro donnent

$$v_6 = \frac{\varphi_6 + 30\varphi_2\varphi_4 + 60\varphi_2^3}{a_0^4}, \qquad \varphi_6 = a_0^4 v_6 - 30 a_0^2 v_2 v_4 + 120 v_2^3.$$

Au moyen de mes formules (5) et (6), j'en déduis immédiatement

$$v_7 = \frac{\varphi_7 + 30(\varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_4) + 180\varphi_2^2\varphi_3}{a_0^4},$$

$$\varphi_7 = a_0^4 v_7 - 30 a_0^2 (v_2 v_5 + v_3 v_4) + 360 v_2^2 v_3.$$