

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CATALAN

Propositions et questions diverses

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 128-129

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__128_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__128_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Propositions et questions diverses; par M. E. CATALAN.

(Séance du 18 avril 1888.)

1. *Sur les fonctions* X_n . — Dans mon premier Mémoire sur cette théorie, j'ai démontré la formule

$$(1) \quad X_n = \text{partie réelle de } \frac{2^{n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi (x \cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi)^n d\varphi.$$

Tout récemment, je me suis aperçu qu'on peut la remplacer par

celle-ci :

$$(2) \quad X_n = \frac{2^n}{\pi} \int_0^\pi \sin^n \varphi (x \sin \varphi + \sqrt{-1} \cos \varphi)^n d\varphi,$$

laquelle n'est soumise à aucune restriction.

Cette formule (2), beaucoup plus simple que la célèbre formule de Jacobi

$$(3) \quad X_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x - \sqrt{x^2 - 1} \sin \omega)^n d\omega,$$

est-elle nouvelle? Je m'adresse pour le savoir à mes confrères de la *Société mathématique*.

2. De la formule (2), on déduit, presque sans calcul, divers résultats, plus ou moins importants, que l'on trouvera dans mon *sixième* (et dernier) *Mémoire sur les fonctions* X_n , imprimé parmi ceux de l'Académie de Belgique.

3. *Quelques théorèmes empiriques*. — Le journal *Mathesis* a publié, en décembre dernier, une Question proposée par M. Oltramare. Cette question m'a fait songer au *théorème empirique* suivant :

n étant un nombre entier, soit n_1 la somme des diviseurs de n , inférieurs à n , soit n_2 la somme des diviseurs de n_1 , inférieurs à n_1 ; etc. Cela posé : les nombres $n, n_1, n_2, \dots$ tendent vers une limite λ , laquelle est 1 ou un nombre parfait.

Si cette proposition (vérifiée sur divers exemples) est vraie, elle doit être fort difficile à démontrer.

Dans la *Nouvelle Correspondance mathématique*, j'ai énoncé divers théorèmes empiriques; celui-ci, par exemple :

n étant un nombre entier, la quantité

$$6n^2 + 6n - 3$$

est la somme de trois carrés, entiers et positifs ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Dans le *Mémoire* intitulé : *Recherche sur quelques produits indéfinis*, j'ai donné, au moyen des séries elliptiques, ce théorème remarquable :

Tout multiple de 8 est la somme de huit carrés impairs.

Il serait intéressant, me semble-t-il, d'en trouver une démonstration élémentaire.