BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FOURET

Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 258-259

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__258_1>

Sur l'application du principe de correspondance à la détermination du nombre des points d'intersection de trois surfaces ou d'une courbe gauche et d'une surface; par M. Fouret.

(Séance du 9 juillet 1873)

Parmi les résultats intéressants contenus dans un mémoire présenté par M. Halphen à la séance du 25 juin dernier, se trouve une démonstration de ce fait qu'*une surface algébrique et une courbe gauche également algébrique se coupent en un nombre de points égal au produit de leurs degrés respectifs.*

La démonstration de ce théorème ayant présenté jusqu'à ces derniers temps une certaine difficulté, il n'est peut-être pas sans intérêt de faire remarquer qu'elle s'établit géométriquement d'une manière fort simple, à l'aide du *principe de correspondance.* Cette démonstration se trouve d'ailleurs contenue tout entière implicitement dans celle que j'ai donnée précédemment du théorème relatif au nombre des points d'intersection de trois surfaces (*Bulletin de la Société*, t. I, p. 122).

Voici une nouvelle démonstration qui comprend comme cas particulier celle que je viens de rappeler.

Soient (C_n) une courbe gauche du n^{me} ordre et (S_p) une surface du p^{me} ordre. Par chacun des points de la courbe, faisons passer une droite dont la direction varie suivant une loi choisie arbitrairement, et assujettie à la seule condition d'être exprimable algébriquement.

L'ensemble de ces droites forme une surface réglée (R_q) d'un certain ordre q (*).

(*) Les droites peuvent être déterminées par la condition de passer par un point donné, auquel cas la surface (R) est un cône; et l'on retrouve alors le procédé de démonstration que j'ai donné précédemment. La surface (R) pourrait être aussi, comme cas particulier, la développable ayant (C_n) pour arête de rebroussement, la surface lieu des normales principales de cette courbe, etc.

Considérons une droite I située d'une manière quelconque par rapport aux surfaces (S_p) et (R_q). Tout plan (A) passant par cette droite coupe (C_n) en n points a. Chacun de ces n points a est l'origine d'une génératrice rectiligne de (R_q) qui rencontre (S_p) en p points b ; soit en tout np points b. Chacun de ceux-ci détermine un plan (B) passant par la droite I, de sorte qu'à un plan (A) correspondent np plans (B).

Considérons maintenant un de ces plans (B) ; il coupe (S_p) et (R_q) suivant des courbes de degrés respectivement égaux à p et à q, et ayant par suite pq points communs b. Par chacun de ces pq points b passe une droite de (R_q) qui rencontre (C_n) en un point a. Les pq points a ainsi obtenus déterminent autant de plans (A) passant par I.

A un plan (B) correspondent donc pq plans (A), tandis qu'à un plan (A) correspondent np plans (B). Donc, en vertu du principe de correspondance, il y a $nq + qp$ plans (A) qui coïncident avec un de leurs correspondants (B).

Or, lorsque deux plans (A) et (B) correspondants coïncident, les points a et b définis ci-dessus, et respectivement situés sur ces plans, coïncident également, à moins que la droite de (R_q) qui les contient ne soit située tout entière dans le plan considéré. Les droites de (R_q) qui satisfont à cette dernière condition sont celles qui rencontrent la droite I; elles sont par suite au nombre de q. Chacune d'elles, rencontrant (S_p) en p points, donne lieu à un plan (A) et à p plans (B) correspondant à (A) et se confondant avec lui. Parmi les $np + pq$ plan résultant de la coïncidence de deux plans (A) et (B) correspondants, il y en a donc pq qui ne passent pas par des points d'intersection de (S_p) et de (C_n). Ces points d'intersection déterminent par suite np plans, c'est-à-dire qu'ils sont au nombre de np : ce qui démontre le théorème énoncé au début de cette note.

Remarque. — Considérons trois surfaces dont les degrés soient respectivement p, p', p''. Les deux dernières se coupent suivant une courbe d'un ordre égal à $p'p''$, d'après une conséquence immédiate du théorème de Bezout sur l'intersection de deux courbes planes. D'autre part, en vertu du théorème que nous venons de démontrer dans cette note, cette courbe d'ordre $p'p''$ coupe la surface d'ordre p en $pp'p''$ points.

Ainsi se trouve établi le théorème relatif au nombre des points d'intersection de trois surfaces algébriques.