

# BULLETIN DE LA S. M. F.

A. H. ANGLIN

## **Sur le coefficient du terme général dans certains développements**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 15 (1887), p. 192-198

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1887\\_\\_15\\_\\_192\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__192_1)>

© Bulletin de la S. M. F., 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur le coefficient du terme général dans certains développements;*  
par M. A.-H. ANGLIN.

(Séance du 15 juin 1887.)

La présente Note a pour objet de compléter les résultats obtenus par l'auteur, dans un Mémoire *Sur le coefficient du terme général dans certains développements*, publié en 1886 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

Rappelons sommairement un théorème obtenu dans ce Mémoire, et auquel on aura souvent à se reporter : ce théorème est exprimé par l'équation suivante

$$\begin{aligned} & (1 + ax + \dots + a^n x^n)(1 + bx + \dots + b^n x^n)(1 + cx + \dots + c^n x^n) \\ &= 1 + h_1 x + h_2 x^2 + \dots + h_n x^n + (h_{n+1} - s_{n+1})x^{n+1} \\ & \quad + (h_{n+2} - s_{n+1}h_1)x^{n+2} + \dots + (h_{n+m} - s_{n+1}h_{m-1})x^{n+m} + \dots, \end{aligned}$$

où  $s_r$  représente la somme  $a^r + b^r + c^r$ , et  $h_n$  la somme des produits homogènes de degré  $n$ , des lettres  $a, b, c$  et de leurs puissances.

Le coefficient de  $x^{2n+p}$  dans ce développement peut être exprimé d'une autre manière plus commode : ce coefficient est en

effet celui de  $x^{2n+p}$  dans le produit de

$$a^n x^n (1 + a^{-1} x^{-1} + \dots + a^{-n} x^{-n})$$

par deux expressions analogues en  $b$  et  $c$ ; il est donc égal à  $a^n b^n c^n$  multiplié par le coefficient de  $x^{2n+p}$  dans le produit

$$(1 + a^{-1} x^{-1} + \dots + a^{-n} x^{-n}) \\ \times (1 + b^{-1} x^{-1} + \dots + b^{-n} x^{-n})(1 + c^{-1} x^{-1} + \dots + c^{-n} x^{-n}),$$

c'est-à-dire finalement à  $(abc)^n h'_{n-p}$ , où  $h'_n$  est la somme des produits homogènes de degré  $n$ , de  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$ ,  $\frac{1}{c}$  et de leurs puissances.

Cela posé, considérons la formule démontrée dans le Mémoire précité

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = 1 + h_1 x + \dots + h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + \dots$$

Dans ce Mémoire, nous avons obtenu, toutes les fois que  $n$  est multiple de  $m$ , la somme de la série

$$\dots h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + \dots + h_{n+rm} x^{n+rm} + \dots$$

Nous allons donner un résultat analogue, quelle que soit la valeur de  $n$ , et en faire une application semblable à celle que nous avons faite dans le cas précité.

Proposons-nous, pour commencer, de trouver la somme de la série

$$\dots + h_n x^n + h_{n+3} x^{n+3} + \dots + h_{n+3r} x^{n+3r} + \dots$$

pour toutes les valeurs de  $n$ .

Dans l'équation

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \dots + h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + \dots,$$

remplaçons  $x$  par  $xy$  et supposons  $n$  de la forme  $3m+s$ . Nous avons

$$\frac{1}{y^s(1-axy)\dots} = \dots + h x^n y^{3m} + \dots + h_{n+3} x^{n+3} y^{3m+3} + \dots \\ + h_{n+6} x^{n+6} y^{3m+6} + \dots;$$

d'où, faisant successivement  $y$  égal à  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (racines cubiques de l'unité), ajoutant les résultats et observant que  $\alpha^r + \beta^r + \gamma^r = 0$ , sauf quand  $r$  est un multiple de 3, auquel cas la valeur de cette

expression est 3, nous aurons

$$3(\dots + h_n x^n + h_{n+3} x^{n+3} + h_{n+6} x^{n+6} + \dots + h_{n+3r} x^{n+3r} + \dots) \\ = \frac{1}{\alpha^s(1-\alpha\alpha x)\dots} + \frac{1}{\beta^s(1-\alpha\beta x)\dots} + \frac{1}{\gamma^s(1-\alpha\gamma x)\dots},$$

où l'exposant  $s$  représente 0, 1 ou 2 selon que  $n$  est de la forme  $3m$ ,  $3m+1$  ou  $3m+2$ .

Lorsque le second membre de cette équation est réduit, le dénominateur peut se mettre sous la forme

$$(1-\alpha^3 x^3)(1-\beta^3 x^3)(1-\gamma^3 x^3)$$

et le numérateur est la somme de trois termes semblables, dont le premier est le produit de

$$\alpha^{-s}(1-\alpha\beta x)(1-\alpha\gamma x)$$

par deux expressions analogues où  $b$  et  $c$  remplacent  $\alpha$ . Or on a

$$(1-\alpha\beta x)(1-\alpha\gamma x) = 1 + \alpha x\alpha + \alpha^2 x^2 \alpha^2;$$

le premier terme du numérateur peut donc s'écrire

$$\alpha^{-s}(1 + \alpha x\alpha + \alpha^2 x^2 \alpha^2)(1 + b x\alpha + b^2 x^2 \alpha^2)(1 + c x\alpha + c^2 x^2 \alpha^2)$$

ou

$$\alpha^{-s}(1 + A_1 x\alpha + A_2 x^2 \alpha^2 + \dots + A_6 x^6 \alpha^6);$$

le deuxième et le troisième ne diffèrent du premier que par la substitution de  $\beta$  et  $\gamma$  à  $\alpha$ .

Ajoutant ces trois termes et faisant successivement  $s = 0, 1$  et  $2$ , les valeurs correspondantes du numérateur deviennent

$$3(1 + A_3 x^3 + A_6 x^6), \quad 3(A_1 x + A_4 x^4) \quad \text{et} \quad 3(A_2 x^2 + A_5 x^5),$$

et l'on a ainsi

$$(F) \left\{ \begin{array}{l} \dots + h_n x^n + h_{n+3} x^{n+3} + h_{n+6} x^{n+6} + \dots + h_{n+3r} x^{n+3r} + \dots \\ = \frac{B_3}{(1-\alpha^3 x^3)(1-\beta^3 x^3)(1-\gamma^3 x^3)}, \end{array} \right.$$

où, en vertu du lemme,  $B_3$  représente

$$1 + (h_3 - s_3)x^3 + \mu^2 x^6, \quad h_1 x + \mu^2 h'_2 x^4 \quad \text{ou} \quad h_2 x^2 + \mu^2 h'_1 x^5, \quad .$$

selon que  $n$  est de la forme

$$3m, \quad 3m+1 \quad \text{ou} \quad 3m+2,$$

$\mu$  désignant le produit  $abc$ .

On peut voir maintenant, comme dans le travail déjà cité, qu'en multipliant successivement chaque membre de l'équation fondamentale

$$a^{n+2}(b-c) + b^{n+2}(c-a) + c^{n+2}(a-b) = kh_n,$$

où  $k$  représente

$$a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b),$$

par

$$a^3 + b^3 + c^3 \quad \text{ou} \quad s_3,$$

on obtient l'équation

$$a^{n+2}(b^3 + c^3)^r(b-c) + b^{n+2}(c^3 + a^3)^r(c-a) + c^{n+2}(a^3 + b^3)^r(a-b) \\ = k(s_3 - 1)^r [h]_{n+3r}^{n+3r},$$

où  $(s_3 - 1)^r [h]_{n+3r}^{n+3r}$  représente la suite

$$s_3^r h_n - r s_3^{r-1} h_{n+3} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} s_3^{r-2} h_{n+6} \\ - \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s_3^{r-3} h_{n+9} + \dots + (-1)^r h_{n+3r}.$$

Développant  $(s_3 x^3 - 1)^r$ , on voit, en s'appuyant sur la formule (F), que, pour toutes valeurs de  $n$ , la série précédente est le coefficient de  $x^{n+3r}$  dans le développement de

$$\frac{B_3(s_3 x^3 - 1)^r}{(1 - a^3 x^3)(1 - b^3 x^3)(1 - c^3 x^3)};$$

ce coefficient est donc égal à l'expression

$$\frac{a^{n+2}(b^3 + c^3)^r(b-c) + b^{n+2}(c^3 + a^3)^r(c-a) + c^{n+2}(a^3 + b^3)^r(a-b)}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}.$$

Arrivons maintenant au cas général; pour obtenir la somme des séries

$$\dots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + \dots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \dots$$

pour toutes valeurs de  $n$ , on remplace  $x$  par  $xy$  dans l'équation

$$\frac{1}{(1-ax)(1-bx)(1-cx)} = \dots + h_n x^n + h_{n+1} x^{n+1} + h_{n+2} x^{n+2} + \dots,$$

et l'on suppose  $n$  de la forme

$$mp + s.$$

On a

$$\frac{1}{y^s(1-axy)\dots} = \dots + h_n x^n y^{mp} + \dots + h_{n+m} x^{n+m} y^{mp+m} + \dots \\ + h_{n+2m} x^{n+2m} y^{mp+2m} + \dots$$

Faisant ensuite  $y$  successivement égal à chacune des racines  $m^{\text{ièmes}}$  de l'unité,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ , et ajoutant les résultats de ces substitutions, en observant que  $\Sigma(\alpha_i^r) = 0$ , sauf dans le cas où  $r$  est un multiple de  $m$ , auquel cas  $\Sigma(\alpha_i^r) = m$ , on obtient

$$m(\dots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + \dots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \dots) \\ = \frac{1}{\alpha_1^s(1-a\alpha_1 x)\dots} + \frac{1}{\alpha_2^s(1-a\alpha_2 x)\dots} + \dots + \frac{1}{\alpha_m^s(1-a\alpha_m x)\dots};$$

l'indice  $s$  est égal à 0, 1, 2, ... ou  $m-1$  selon que  $n$  est de la forme

$$mp, \quad mp+1, \quad mp+2, \quad \dots, \quad mp+m-1.$$

Le second membre de l'équation étant réduit au même dénominateur, ce dénominateur sera

$$(-1)^{(m-1)s}(1-amx^m)(1-bmx^m)(1-cmx^m);$$

et le numérateur se composera de la somme de  $m$  termes semblables, le premier étant le produit de

$$(-1)^{(m-1)s}\alpha_1^{-s}(1-a\alpha_1 x)(1-a\alpha_2 x)\dots(1-a\alpha_m x)$$

par deux autres expressions semblables où  $b$  et  $c$  remplacent  $a$ . On peut facilement montrer que

$$(1-a\alpha_2 x)(1-a\alpha_3 x)\dots(1-a\alpha_m x) \\ = 1 + ax\alpha_1 + a^2x^2\alpha_1^2 + \dots + (ax\alpha_1)^{m-1};$$

et ainsi le premier terme du numérateur est égal au produit de  $\alpha_1^{-s}$  par les expressions

$$1 + ax\alpha_1 + a^2x^2\alpha_1^2 + a^3x^3\alpha_1^3 + \dots + (ax\alpha_1)^{m-1}, \\ 1 + bx\alpha_1 + b^2x^2\alpha_1^2 + b^3x^3\alpha_1^3 + \dots + (bx\alpha_1)^{m-1}, \\ 1 + cx\alpha_1 + c^2x^2\alpha_1^2 + c^3x^3\alpha_1^3 + \dots + (cx\alpha_1)^{m-1};$$

il est donc de la forme

$$\alpha_1^{-s} [1 + A_1 x \alpha_1 + A_2 x^2 \alpha_1^2 + A_3 x^3 \alpha_1^3 + \dots + A_{m-3} (x \alpha_1)^{3m-3}],$$

tandis que le deuxième, le troisième, ..., le  $m^{\text{ième}}$  terme du numérateur ont la même forme, en changeant seulement  $\alpha_1$  en  $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_m$ .

Ajoutant ces diverses expressions et faisant  $s$  successivement égal à 0, 1, 2, 3, ...,  $m-1$ , les valeurs correspondantes du numérateur complet deviennent pour  $s=0, 1, \dots, m-3$

$$\begin{aligned} & m(1 + A_m x^m + A_{2m} x^{2m}), \\ & m(A_1 x + A_{m+1} x^{m+1} + A_{2m+1} x^{2m+1}), \\ & m(A_2 x^2 + A_{m+2} x^{m+2} + A_{2m+2} x^{2m+2}), \\ & \dots\dots\dots, \\ & m(A_{m-3} x^{m-3} + A_{2m-3} x^{2m-3} + A_{3m-3} x^{3m-3}), \end{aligned}$$

dont la dernière renferme la plus haute puissance possible de  $x$ ; tandis que les numérateurs correspondant aux deux dernières valeurs de  $s$ , soit  $m-2$  et  $m-1$ , ont chacun seulement deux termes, soit

$$\begin{aligned} & m(A_{m-2} x^{m-2} + A_{2m-2} x^{2m-2}), \\ & m(A_{m-1} x^{m-1} + A_{2m-1} x^{2m-1}). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi

$$(G) \left\{ \begin{aligned} & \dots + h_n x^n + h_{n+m} x^{n+m} + h_{n+2m} x^{n+2m} + \dots + h_{n+mr} x^{n+mr} + \dots \\ & = \frac{B_m}{(1 - a^m x^m)(1 - b^m x^m)(1 - c^m x^m)}, \end{aligned} \right.$$

où  $B_m$  représente

$$\begin{aligned} & 1 + (h_m - s_m) x^m + \mu^{m-1} h'_{m-3} x^{2m}, \\ & h_1 x + (h_{m+1} - s_m h_1) x^{m+1} + \mu^{m-1} h'_{m-4} x^{2m+1}, \\ & h_2 x^2 + (h_{m+2} - s_m h_2) x^{m+2} + \mu^{m-1} h'_{m-5} x^{2m+2}, \\ & \dots\dots\dots, \\ & h_{m-3} x^{m-3} + (h_{2m-3} - s_m h_{m-3}) x^{2m-3} + \mu^{m-1} h'_0 x^{3m-3}, \\ & \quad h_{m-2} x^{m-2} + \mu^{m-1} h'_{m-1} x^{2m-2} \quad (h'_0 = 1), \\ & \quad h_{m-1} x^{m-1} + \mu^{m-1} h'_{m-2} x^{2m-1}, \end{aligned}$$

selon que  $n$  est de la forme

$$mp, \quad mp+1, \quad \dots, \quad mp+m-1.$$

On voit maintenant, comme plus haut, que l'on a

$$a^{n+2}(b^m + c^m)^r(b-c) + \dots = k(s_m - 1)^r [h]_{n+mr}^a,$$

où  $(s_m - 1)^r [h]_{n+mr}^a$  représente la série

$$\begin{aligned} & s_m^r h_n - r s_m^{r-1} h_{n+m} + \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2} s_m^{r-2} h_{n+2m} \\ & - \frac{r(r-1)(r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} s_m^{r-3} h_{n+3m} + \dots + (-1)^r h_{n+rm}. \end{aligned}$$

Si l'on développe  $(s_m x^m - 1)^r$  on verra, en tenant compte de (G), que, pour toutes valeurs de  $n$ , la série précédente forme le coefficient de  $x^{n+mr}$  dans le développement de

$$\frac{B_m (s_m x^m - 1)^r}{(1 - a^m x^m)(1 - b^m x^m)(1 - c^m x^m)},$$

$B_m$  représentant une des  $m$  expressions ci-dessus mentionnées et, par conséquent, ce coefficient est égal à l'expression

$$\frac{a^{n+2}(b^m + c^m)^r(b-c) + b^{n+2}(c^m + a^m)^r(c-a) + c^{n+2}(a^m + b^m)^r(a-b)}{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}.$$

Nous pouvons observer que, des précédentes expressions représentées par  $B_m$ , les deux dernières correspondent l'une à l'autre; tandis que des  $m-2$  autres, la première et la dernière, la deuxième et l'avant-dernière, la troisième et l'antépénultième, etc., se correspondent respectivement, les indices de  $h$  et  $h'$  dans l'une étant les mêmes que ceux de  $h'$  et  $h$  dans l'autre.

---