

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GOURSAT

Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 106-120

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__106_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__106_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1887, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques;
par M. E. GOURSAT.

(Séance du 16 mars 1887.)

1. Considérons une différentielle de la forme

$$(1) \quad f(x) \frac{dx}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}},$$

où $f(x)$ désigne une fonction rationnelle quelconque et

$$Ax^2 + Bx + C$$

un trinôme du second degré, non carré parfait, pouvant, comme

cas particulier, se réduire à une expression linéaire. Posons

$$(2) \quad x = \frac{at^2 + bt + c}{a't^2 + b't + c'} = \varphi(t);$$

le numérateur et le dénominateur de $\varphi(t)$ sont supposés premiers entre eux, et l'un au moins est du second degré. Par cette substitution, la différentielle (1) devient

$$(3) \quad \mathcal{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

où

$$\mathcal{F}(t) = f \left(\frac{at^2 + bt + c}{a't^2 + b't + c'} \right) \frac{Lt^2 - 2Nt + M}{(a't^2 + b't + c')^2},$$

$$L = ab' - ba', \quad M = bc' - cb', \quad N = ca' - ac',$$

$$R(t) = A(at^2 + bt + c)^2 + B(at^2 + bt + c)(a't^2 + b't + c') + C(a't^2 + b't + c')^2.$$

Les deux racines t_1, t_2 de l'équation

$$\varphi(t) = \lambda$$

vérifient, quel que soit λ , la relation d'involution

$$Lt_1t_2 - N(t_1 + t_2) + M = 0,$$

obtenue en éliminant λ entre les deux équations

$$at_1t_2 - c - \lambda[a't_1t_2 - c'] = 0,$$

$$a(t_1 + t_2) + b - \lambda[a'(t_1 + t_2) + b'] = 0.$$

Il suit de là que si, dans $\varphi(t)$, on fait la substitution linéaire

$$(4) \quad Ltz - N(t + z) + M = 0,$$

ou

$$t = \frac{Nz - M}{Lz - N},$$

on aura identiquement

$$\varphi(t) = \varphi(z).$$

On vérifie en effet, sans aucune difficulté, les identités ci-dessous :

$$at^2 + bt + c = (N^2 - LM) \frac{az^2 + bz + c}{(Lz - N)^2},$$

$$a't^2 + b't + c' = (N^2 - LM) \frac{a'z^2 + b'z + c'}{(Lz - N)^2},$$

$$Lt^2 - 2Nt + M = (LM - N^2) \frac{Lz^2 - 2Nz + M}{(Lz - N)^2}.$$

On aura, par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{dt}{\sqrt{R(t)}} &= \frac{(LM - N^2) dz}{\sqrt{(N^2 - LM)^2 R(z)}} = \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \\ f\left(\frac{at^2 + bt + c}{a't^2 + b't + c'}\right) &= f\left(\frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'}\right), \\ \frac{Lt^2 - 2Nt + M}{a't^2 + b't + c'} &= -\frac{Lz^2 - 2Nz + M}{a'z^2 + b'z + c'}, \\ \left(\frac{Nz - M}{Lz - N}\right) &= -f\left(\frac{az^2 + bz + c}{a'z^2 + b'z + c'}\right) \frac{Lz^2 - 2Nz + M}{a'z^2 + b'z + c'} = -\mathcal{F}(z).\end{aligned}$$

La différentielle (3) jouit donc de la propriété suivante :

Il existe une substitution linéaire involutive

$$t = \frac{Nz - M}{Lz - N},$$

qui permute deux à deux les racines de l'équation $R(t) = 0$, telle que l'on ait identiquement

$$\mathcal{F}\left(\frac{Nz - M}{Lz - N}\right) = -\mathcal{F}(z).$$

2. Inversement, soit $R(t)$ un polynôme du quatrième degré, ayant quatre racines distinctes a, b, c, d , et soit

$$Lt_1t_2 - N(t_1 + t_2) + M = 0$$

une substitution linéaire involutive qui permute deux à deux les racines a, b, c, d . Si une fonction rationnelle $\mathcal{F}(t)$ est telle que l'on ait identiquement

$$\mathcal{F}(t_1) + \mathcal{F}(t_2) = 0,$$

l'intégrale

$$\int \mathcal{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est une intégrale *pseudo-elliptique*. Désignons en effet par α et β les points doubles de l'involutive précédente; la relation entre t_1 et t_2 pourra s'écrire

$$\frac{t_1 - \alpha}{t_1 - \beta} + \frac{t_2 - \alpha}{t_2 - \beta} = 0.$$

Faisons le changement de variable,

$$\frac{t - \alpha}{t - \beta} = u;$$

la différentielle $\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ se change en une différentielle de la forme

$$\frac{du}{\sqrt{R_1(u)}},$$

où le polynôme $R_1(u)$ n'a que des termes de degré pair; car la relation entre les valeurs u_1, u_2 de u , qui correspondent aux valeurs t_1, t_2 de t , est précisément

$$u_1 + u_2 = 0.$$

De même, la fonction rationnelle $\mathcal{F}(t)$ se change en une certaine fonction rationnelle $F(u)$, et la relation

$$\mathcal{F}(t_1) + \mathcal{F}(t_2) = 0$$

devient

$$F(u_1) + F(u_2) = 0,$$

c'est-à-dire

$$F(u_1) + F(-u_1) = 0.$$

Il suit de là que $F(u)$ sera de la forme $u F_1(u^2)$, et il suffira de poser

$$u^2 = x$$

pour ramener la différentielle

$$\frac{u F_1(u^2) du}{\sqrt{R_1(u)}}$$

à une différentielle de la forme (1). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soit

$$\left[t, \frac{Nt - M}{Lt - N} \right]$$

une substitution de période 2 permutant deux à deux les quatre racines a, b, c, d de l'équation $R(t) = 0$, et $\mathcal{F}(t)$ une fonction rationnelle telle que l'on ait identiquement

$$\mathcal{F}(t) + \mathcal{F}\left(\frac{Nt - M}{Lt - N}\right) = 0;$$

l'intégrale

$$\int \mathfrak{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Ce résultat a été obtenu d'une autre façon par M. Raffy (voir *Bulletin*, t. XII, p. 51); le procédé ci-dessus donne en outre le moyen d'effectuer la réduction.

L'énoncé précédent s'applique encore lorsque $R(t)$ est du troisième degré, pourvu qu'on regarde une des quatre racines a , b , c , d comme infinie.

3. Les quatre racines a , b , c , d étant quelconques, il existe trois substitutions linéaires de période 2, qui permutent deux à deux ces trois racines. Par exemple, la substitution

$$\left\{ t, \frac{(ab - cd)t + (a + b)cd - (c + d)ab}{[(a + b) - (c + d)]t - (ab - cd)} \right\}$$

permuté les deux racines a et b et les deux racines c et d . Les deux autres substitutions se déduisent de celle-là, en prenant successivement pour a et b deux quelconques des racines, et pour c et d les deux autres. Désignons par S_1 , S_2 , S_3 ces trois substitutions; avec la substitution identique $t = t$, elles forment un groupe de quatre substitutions, et l'on a les relations

$$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = 1, \\ S_1 S_2 = S_2 S_1 = S_3, \quad S_1 S_3 = S_3 S_1 = S_2, \quad S_2 S_3 = S_3 S_2 = S_1.$$

Soient en général S une substitution linéaire

$$S \left[t, \frac{Nt - M}{Lt - N} \right]$$

et $F(t)$ une fonction rationnelle de t ; je désignerai, pour abrégé, par $F(S)$ la fonction rationnelle

$$F \left(\frac{Nt - M}{Lt - N} \right).$$

Étant donné un polynôme quelconque du quatrième degré $R(t)$, nous connaissons, d'après ce qui précède, trois types d'intégrales

pseudo-elliptiques, relatives à ce polynôme,

$$\begin{aligned} \int f(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \\ \int \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \\ \int \psi(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \end{aligned}$$

les fonctions rationnelles $f(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ vérifiant respectivement les relations

$$f(S_1) + f = 0, \quad \varphi(S_2) + \varphi = 0, \quad \psi(S_3) + \psi = 0,$$

équivalentes à celles-ci

$$f(S_2) + f(S_3) = 0, \quad \varphi(S_1) + \varphi(S_3) = 0, \quad \psi(S_1) + \psi(S_2) = 0.$$

Il est clair qu'en ajoutant ces trois intégrales, on obtient encore une intégrale *pseudo-elliptique*

$$\int \mathcal{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}},$$

où

$$\mathcal{F}(t) = f(t) + \varphi(t) + \psi(t);$$

les relations précédentes, qui sont vérifiées par les fonctions f , φ , ψ , nous donnent, pour la fonction $\mathcal{F}(t)$, la relation

$$(5) \quad \mathcal{F} + \mathcal{F}(S_1) + \mathcal{F}(S_2) + \mathcal{F}(S_3) = 0.$$

Inversement, soit $\mathcal{F}(t)$ une fonction rationnelle satisfaisant à la condition (5). Posons

$$f = \frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}(S_1)}{2}, \quad \varphi = \frac{\mathcal{F} + \mathcal{F}(S_1)}{2};$$

on aura respectivement

$$f(S_1) + f = 0, \quad \varphi(S_2) + \varphi = 0,$$

de sorte que les deux intégrales

$$\int f(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \int \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

sont des intégrales *pseudo-elliptiques*. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Soient S_1, S_2, S_3 les trois substitutions linéaires de période 2, qui permutent deux à deux les quatre racines de l'équation $R(t) = 0$, et $\mathcal{F}(t)$ une fonction rationnelle telle que l'on ait identiquement

$$\mathcal{F} + \mathcal{F}(S_1) + \mathcal{F}(S_2) + \mathcal{F}(S_3) = 0;$$

l'intégrale

$$\int \mathcal{F}(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Le théorème s'applique encore lorsque $R(t)$ est du troisième degré, pourvu qu'on regarde une des racines a, b, c, d comme infinie.

La somme

$$\mathcal{F} + \mathcal{F}(S_1) + \mathcal{F}(S_2) + \mathcal{F}(S_3)$$

est une fonction symétrique des quantités a, b, c, d ; on pourra donc reconnaître si elle est nulle sans connaître les racines du polynôme sous le radical.

Exemples. — Soit

$$R(t) = (1 - t^2)(1 - k^2 t^2);$$

l'intégrale

$$\int f(t) \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k^2 t^2)}}$$

sera pseudo-elliptique, pourvu que l'on ait

$$f(t) + f(-t) + f\left(\frac{1}{kt}\right) + f\left(-\frac{1}{kt}\right) = 0.$$

Il en sera de même de l'intégrale

$$\int \frac{f(x^2) dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)}},$$

pourvu que l'on ait

$$f(x^2) + f\left[\frac{1-k^2x^2}{k^2(1-x^2)}\right] + f\left(\frac{1}{k^2x^2}\right) + f\left(\frac{1-x^2}{1-k^2x^2}\right) = 0.$$

(Voir HERMITE, *Journal de Liouville*, 1880; RAFFY, *loc. cit.*, p. 71.)

4. L'analyse qui précède nous fait connaître une relation entre certaines intégrales pseudo-elliptiques et les substitutions linéaires qui permutent les racines de l'équation $R(t) = 0$. Si les quantités a, b, c, d sont quelconques, il n'existe pas d'autres substitutions linéaires que les trois précédentes permutant ces quatre racines. Mais, pour certaines formes spéciales de $R(t)$, il existera d'autres substitutions de cette espèce. Il est naturel de se demander si l'on peut aussi rattacher à ces nouvelles substitutions des intégrales pseudo-elliptiques. C'est en effet ce qui a lieu.

On peut faire sur ces substitutions plusieurs hypothèses. Soient toujours a, b, c, d les racines de $R(t) = 0$; il peut se faire qu'il existe une substitution linéaire ne changeant pas le point a et permutant les trois autres racines b, c, d circulairement. Cette substitution sera forcément de période 3, et on pourra l'écrire

$$S\left[\frac{t-a}{t-a_1}; \alpha \frac{t-a}{t-a_1}\right], \quad \text{où} \quad \alpha = e^{\frac{2i\pi}{3}}$$

Soit maintenant $F(t)$ une fonction rationnelle de t jouissant de la propriété exprimée par l'équation

$$F(S) = \alpha F;$$

l'intégrale

$$\int F(t) \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

pourra s'exprimer en termes finis au moyen de symboles élémentaires.

Faisons d'abord la transformation

$$\frac{t-a}{t-a_1} = z;$$

la transformée de S par cette substitution est

$$S'[z; \alpha z].$$

La différentielle $\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$ se change en une différentielle de la forme

$$\frac{dz}{\sqrt{z(Az^3 + B)}},$$

puisque les trois racines différentes de zéro du nouveau polynôme sous le radical doivent se permuter circulairement par la substitution S'. La fonction rationnelle F(t) se change en une fonction rationnelle de z vérifiant la relation

$$F_1(\alpha z) = \alpha F_1(z),$$

qui sera, par conséquent, de la forme

$$F_1(z) = z \varphi(z^3),$$

et la différentielle précédente devient

$$\frac{\varphi(z^3)z dz}{\sqrt{z(Az^3 + B)}}.$$

Il suffit maintenant de poser $z^3 = x$ pour être ramené à une différentielle de la forme (1); d'où résulte le théorème énoncé plus haut.

On peut rattacher à ce cas de réduction une intégrale assez célèbre, étudiée par Legendre et Clausen, et tout récemment par M. S. Günther (*Bulletin*, t. X, p. 89). S'il existe une substitution linéaire de période 3 laissant fixe une des racines a, b, c, d et permutant les autres circulairement, on pourra toujours, par une substitution linéaire, ramener R(t) à la forme

$$R(t) = t^3 - 1;$$

ce qui revient à supposer $a = \infty, b = 1, c = \alpha, d = \alpha^2$. Il existe huit substitutions de période 3, qui permutent trois de ces racines et laissent fixe la quatrième; ce sont les quatre suivantes :

$$[t; \alpha t], \quad \left[\frac{t-1}{t+2}; \alpha \frac{t-1}{t+2} \right], \quad \left[\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}; \alpha \frac{t-\alpha}{t+2\alpha} \right], \quad \left[\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}; \alpha \frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2} \right],$$

et leurs répétitions. A ces quatre substitutions correspondent les quatre types d'intégrales pseudo-elliptiques

$$\int \varphi(t^3) \frac{dt}{t\sqrt{t^3-1}}, \quad \int \varphi\left[\left(\frac{t-1}{t+2}\right)^3\right] \frac{t-1}{t+2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}},$$

$$\int \varphi\left[\left(\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\right)^3\right] \frac{t-\alpha}{t+2\alpha} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}, \quad \int \varphi\left[\left(\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}\right)^3\right] \frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

les substitutions propres à réduire ces intégrales sont respectivement

$$t^3 = x, \quad \left(\frac{t-1}{t+2}\right)^3 = x, \quad \left(\frac{t-\alpha}{t+2\alpha}\right)^3 = x, \quad \left(\frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2}\right)^3 = x.$$

La première s'offre immédiatement. Quant à la seconde, un calcul facile permet de vérifier qu'en posant

$$x = \left(\frac{t-1}{t+2}\right)^3$$

on a

$$\frac{1}{3} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{t-1}{t+2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

ce qui donne en même temps un résultat connu (REALIS, *Mathesis*, t. II)

$$\int \frac{t-1}{t+2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{2}{3} \arctan \frac{(t-1)^2}{3\sqrt{t^3-1}}.$$

On trouve tout pareillement

$$\int \frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{2}{3\alpha} \arctan \frac{(\alpha t-1)^2}{3\sqrt{t^3-1}},$$

$$\int \frac{t-\alpha}{t+2\alpha} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}} = \frac{2}{3\alpha^2} \arctan \frac{(\alpha^2 t-1)^2}{3\sqrt{t^3-1}}.$$

Désignons par A, B, C trois constantes arbitraires; l'intégrale

$$\int \left(A \frac{t-1}{t+2} + B \frac{t-\alpha^2}{t+2\alpha^2} + C \frac{t-\alpha}{t+2\alpha} \right) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

s'exprimera en termes finis au moyen de symboles élémentaires. Cette intégrale peut s'écrire

$$\int \frac{\lambda(t^3-4) + \mu t^2 + \nu t}{t^3+8} \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

où

$$\lambda = A + B + C, \quad \mu = -3(A + B\alpha^2 + C\alpha), \quad \nu = 6(A + B\alpha + C\alpha^2);$$

λ, μ, ν sont, comme A, B, C , des coefficients arbitraires. Par conséquent les deux intégrales

$$\int \frac{t^3 - 4}{t^3 + 8} \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}}, \quad \int \frac{t dt}{(t^3 + 8)\sqrt{t^3 - 1}}$$

sont des intégrales pseudo-elliptiques; la dernière est précisément l'intégrale de Legendre et de Clausen.

5. Les substitutions linéaires qui permutent les quatre quantités $\infty, 1, \alpha, \alpha^2$ forment un *groupe* de douze substitutions isomorphe au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un tétraèdre régulier (voir KLEIN, *Mathematische Annalen*, Bd. XII). Ces substitutions sont les suivantes, abstraction faite de la substitution identique :

$$\begin{aligned} & \left[t; \frac{t+2}{t-1} \right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t - 1} \right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha^2}{\alpha t - 1} \right], \\ & [t; \alpha t], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha^2}{t-\alpha^2} \right], \quad \left[t; \frac{t+2}{\alpha^2 t - \alpha^2} \right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha}{t-\alpha^2} \right], \\ & [t; \alpha^2 t], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha}{t-\alpha} \right], \quad \left[t; \frac{t+2\alpha^2}{\alpha^2 t - \alpha} \right], \quad \left[t; \frac{t+2}{\alpha t - \alpha} \right]. \end{aligned}$$

Les trois premières sont de période 2 et de multiplicateur -1 ; les quatre de la seconde ligne sont de période 3 et de multiplicateur α^2 ; les quatre dernières sont de période 3 et de multiplicateur α . Pour évaluer le multiplicateur d'une substitution de période 3, je la mets sous la forme normale

$$\left[\frac{t-a}{t-a_1}; \mu \frac{t-a}{t-a_1} \right],$$

a étant celui des points doubles de cette substitution, qui fait partie des quantités $\infty, 1, \alpha, \alpha^2$, et j'appelle μ le multiplicateur correspondant.

Soient S_i une des douze substitutions précédentes et μ_i le multiplicateur correspondant. Prenons une fonction rationnelle $F(t)$

satisfaisant aux deux relations.

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{i=12} F(S_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^{i=12} \frac{1}{\mu_i^2} F(S_i) = 0; \end{array} \right.$$

l'intégrale

$$\int F(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

est une intégrale pseudo-elliptique.

Pour le démontrer, je pose

$$\begin{aligned} F(t) + F\left(\frac{t+2}{t-1}\right) + F\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) + F\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) &= 4\varphi(t), \\ F(t) - F\left(\frac{t+2}{t-1}\right) + F\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) - F\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) &= 4\varphi_1(t), \\ F(t) - F\left(\frac{t+2}{t-1}\right) - F\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) + F\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) &= 4\varphi_2(t), \\ F(t) + F\left(\frac{t+2}{t-1}\right) - F\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) - F\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) &= 4\varphi_3(t); \end{aligned}$$

on en déduit

$$F(t) = \varphi(t) + \varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t).$$

Mais les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ vérifient respectivement les relations

$$\begin{aligned} \varphi_1\left(\frac{t+2}{t-1}\right) + \varphi_1(t) &= 0, \\ \varphi_2\left(\frac{t+2\alpha}{\alpha^2 t-1}\right) + \varphi_2(t) &= 0, \\ \varphi_3\left(\frac{t+2\alpha^2}{\alpha t-1}\right) + \varphi_3(t) &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que, d'après la proposition du n° 2, les trois intégrales

$$\int \varphi_1(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}, \quad \int \varphi_2(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}, \quad \int \varphi_3(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}}$$

sont des intégrales pseudo-elliptiques. Nous avons encore à consi-

dérivé l'intégrale

$$\int \varphi(t) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}};$$

mais, en tenant compte des relations (6), on aura

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \varphi(\alpha t) + \varphi(\alpha^2 t) &= 0, \\ \varphi(t) + \alpha^2 \varphi(\alpha t) + \alpha \varphi(\alpha^2 t) &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que $\varphi(t)$ sera de la forme

$$\varphi(t) = t^2 \psi(t^3),$$

et la différentielle considérée prend la forme

$$t^2 \psi(t^3) \frac{dt}{\sqrt{t^3-1}},$$

que l'on ramène immédiatement à la forme (1), en posant $t^3 = x$.

6. On peut encore faire deux hypothèses sur les substitutions linéaires qui permutent les quatre racines a, b, c, d : 1° il peut se faire qu'une substitution, ayant pour points doubles deux de ces racines, permute les deux autres; 2° il peut arriver qu'il existe une substitution linéaire, permutant circulairement les quatre racines. Dans le premier cas, la différentielle

$$\frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

pourra se ramener, par une substitution linéaire, à la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{t(t^2+1)}},$$

et, dans le second cas, à la forme

$$\frac{dt}{\sqrt{t^4-1}};$$

d'ailleurs on passe de la première à la seconde en changeant t en $\frac{1-t}{1+t}$. Il suffit donc de considérer la seconde forme. Il existe huit substitutions permutant les quatre quantités $+1, -1, +\sqrt{-1},$

$-\sqrt{-1}$; ce sont les suivantes :

$$[t; t], [t; it], [t; -t], [t; -it], \\ \left[t; \frac{1}{t}\right], \left[t; -\frac{1}{t}\right], \left[t; \frac{i}{t}\right], \left[t; -\frac{i}{t}\right];$$

elles forment un groupe isomorphe au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un système de deux diamètres rectangulaires de la sphère. On peut faire correspondre à ces substitutions les types suivants d'intégrales réductibles :

$$\int t^{\varphi(t^2)} \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}}, \quad \int \left(t \pm \frac{i}{t}\right)^{\varphi} \left(t \pm \frac{i}{t}\right) \frac{dt}{\sqrt{t^4-1}};$$

mais il est à remarquer que les substitutions de période 4 ne fournissent pas d'intégrales pseudo-elliptiques nouvelles.

7. Étant donné un polynôme $R(t)$ de degré supérieur au quatrième, n'ayant que des facteurs linéaires simples, il n'existe pas en général de substitution linéaire permutant les racines de l'équation $R(t) = 0$. S'il existe de pareilles substitutions, on peut leur faire correspondre des intégrales ultra-elliptiques de la forme

$$\int f[t, \sqrt{R(t)}] dt,$$

qu'il est possible de ramener, par une substitution algébrique, à des intégrales de genre inférieur. Sans entrer ici dans tous les détails, je rappellerai les deux exemples suivants, qui, du reste, sont bien connus. Si l'on a affaire à un polynôme du sixième degré dont les racines sont en involution, on sait qu'on peut, par une substitution linéaire, le ramener à la forme

$$R(u) = au^6 + bu^4 + cu^2 + d,$$

et les deux intégrales de première espèce et de second genre

$$\int \frac{du}{\sqrt{R(u)}}, \quad \int \frac{u du}{\sqrt{R(u)}}$$

se ramènent par la substitution $u^2 = x$ à des intégrales elliptiques. C'est au fond le cas de réduction trouvé par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. 8).

Comme autre exemple, prenons

$$R(t) = t(t^4 - 1);$$

les six quantités $0, \infty, \pm 1, \pm i$ sont permutées par un groupe de vingt-quatre substitutions linéaires, dérivé des deux substitutions

$$[t; it], \quad \left[t; \frac{1-t}{1+t} \right];$$

ce groupe est isomorphe au groupe formé par les rotations qui font revenir sur lui-même un octaèdre régulier. Les substitutions de période 2, qui permutent les racines deux à deux, sont au nombre de quatre :

$$\left[t; \frac{1-t}{1+t} \right], \quad \left[t; \frac{1+t}{1-t} \right], \quad \left[t; \frac{i}{t} \right], \quad \left[t; \frac{-i}{t} \right].$$

A chacune d'elles correspondent deux intégrales de première espèce, n'ayant que deux périodes distinctes,

$$\int \frac{(t \pm 1 \pm \sqrt{2}) dt}{\sqrt{t(t^4 - 1)}}, \quad \int \frac{(t \pm e^{\pm \frac{\pi i}{4}}) dt}{\sqrt{t(t^4 - 1)}}.$$

D'après un théorème dû à M. Poincaré, on en conclut qu'il y aura une infinité d'intégrales de la forme

$$\int \frac{(\alpha t + \beta) dt}{\sqrt{t(t^4 - 1)}},$$

n'ayant que deux périodes distinctes.
