BULLETIN DE LA S. M. F.

O. CALLANDREAU

Sur le développement des fonctions en séries par la formule de Maclaurin dans le cas d'une variable réelle

Bulletin de la S. M. F., tome 15 (1887), p. 23-33

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1887__15__23_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur le développement des fonctions en séries par la formule de Maclaurin, dans le cas d'une variable réelle; par M. O. Callandreau.

(Séance du 4 janvier 1887.)

Quand on se propose de développer, dans le cas de fonctions et de variables réelles, une fonction $f(x)$ en série procédant suivant les puissances entières de x, le théorème de Cauchy réduit, comme on sait, la question à l'étude des points critiques de la fonction $f(z)$, z désignant une variable imaginaire.

Il peut arriver, d'autre part, que la légitimité du développement de $f(x)$ en série soit facile à établir quand x ne dépasse pas une certaine valeur $x = a$. La série obtenue étant supposée convergente pour les valeurs de x plus grandes que a, il est naturel de penser que la représentation de $f(x)$ par la série s'étend au delà de la limite $x = a$. Je me propose de montrer que la représentation de la fonction par la série pourra être continuée tant qu'on ne sera pas arrêté par une discontinuité des dérivées $f^n(x)$ ou par la limite de convergence de la série.

Quand on se place au point de vue des applications, pour lesquelles il est également important d'obtenir l'expression analytique des coefficients de la série et de démontrer la possibilité du développement, la seconde manière d'aborder le problème de développement de $f(x)$ en série peut avoir ses avantages; en effet, de l'expression analytique supposée connue des coefficients, on pourra souvent déduire la condition de convergence de la série.

Dans ce qui suit, il est entendu que la fonction $f(x)$, pour les valeurs de x qu'on envisage, est définie par une *même* expression *bien déterminée,* et qu'il en est ainsi des dérivées $f^n(x)$.

1. Supposons d'abord que les coefficients de la série

$$f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^n(0)+\ldots \tag{1}$$

soient tous positifs, qu'ils ne croissent pas à partir d'un certain rang, qu'on ait établi la légitimité de la représentation de la fonction $f(x)$ par la série ci-dessus pour les valeurs positives de x inférieures ou égales à un nombre donné a plus petit que l'unité. Je vais montrer qu'*on peut prolonger la représentation de la fonction par la série jusqu'à ce qu'on soit arrêté par une discontinuité des dérivées $f^n(x)$ ou par la limite de convergence de la série* (1).

Quand on prend la somme des n premiers termes de la série (1), le reste R_n est donné par la formule

$$R_n=\frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}f^n(\theta x); \tag{2}$$

θ est un nombre positif compris entre zéro et l'unité, et l'on doit avoir

$$(1-\theta)^{n-1}f^n(\theta x)=\int_0^1(1-t)^{n-1}f^n(tx)\,dt. \tag{3}$$

Soit $0\leq x\leq a$.

D'après les n^{os} **112** et **127** de l'*Introduction à la théorie des fonctions d'une variable,* de M. J. Tannery, on est en droit, pour les valeurs indiquées de x, de remplacer les symboles $f^n(\theta x)$ et $f^n(tx)$ par les séries déduites de (1). Divise-t-on les deux membres de (3) par le terme indépendant de x dans $f^n(\theta x)$ et $f^n(tx)$, a-t-on égard à la décroissance des coefficients de (1), on voit que l'inégalité

$$\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta x)^{n+1}} > \frac{1}{n} + \text{termes positifs}$$

doit avoir lieu, et de là résulte que θ est nécessairement plus petit que toute quantité donnée à partir d'une valeur de n suffisamment grande.

En effet, multiplions les deux membres par $\frac{1-\theta x}{1-\theta}$, quantité plus grande que l'unité, il vient

$$\left(\frac{1-\theta}{1-\theta x}\right)^n > \frac{1}{n}.$$

Déterminons une quantité θ_0, comprise entre zéro et l'unité, par l'équation

$$\left(\frac{1-\theta_0}{1-\theta_0 x}\right)^n = \frac{1}{n};$$

on aura évidemment

$$\frac{1-\theta}{1-\theta x} > \frac{1-\theta_0}{1-\theta_0 x},$$

d'où

$$\theta_0 > \theta;$$

θ_0 est donc une limite supérieure de θ.

Ensuite

$$\log\frac{1-\theta_0}{1-\theta_0 x} = -\frac{\log n}{n} = -\nu,$$

ν étant une quantité positive tendant vers zéro quand n augmente indéfiniment;

$$\frac{1-\theta_0}{1-\theta_0 x} = 1-\nu', \qquad \theta_0 = \frac{\nu'}{1-x+\nu' x},$$

ν' ayant la même signification que ν. Donc θ_0 varie dans le même sens que ν' et s'approche de plus en plus de zéro à mesure que n augmente.

Il importe de remarquer que la limite supérieure θ_0 de θ sera la même pour toutes les fonctions $f(x)$ remplissant les conditions indiquées ci-dessus.

2. On aura à raisonner dans un moment sur l'équation obtenue en différentiant par rapport à x les deux membres de l'équation (3);

j'écris par avance l'équation dérivée

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & -[(n-1)f^{n}(\theta x)-(1-\theta)f^{n+1}(\theta x)x](1-\theta)^{n-2}\frac{d\theta}{dx} \\ & +(1-\theta)^{n-1}f^{n+1}(\theta x)\theta \\ & =\int_0^1 (1-t)^{n-1}t f^{n+1}(tx)\,dt, \end{aligned}\right.$$

et je fais quelques remarques préliminaires.

a. Soit $\theta x \leq a$.

La quantité entre crochets dans l'équation (4) devient, quand on remplace les symboles $f^{n}(\theta x)$, $f^{n+1}(\theta x)$ par les séries correspondantes déduites de (1),

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & (n-1 f^{n}(0)-f^{n+1}(0)x \\ & \qquad +\frac{\theta x}{1}[n f^{n+1}(0)-f^{n+2}(0)x] \\ & \qquad +\frac{\theta^2 x^2}{1.2}[(n+1)f^{n+2}(0)-f^{n+3}(0)x]+\ldots. \end{aligned}\right.$$

Pour éviter des distinctions qui n'ont pas d'effet essentiel (on le verra par la suite), je considère spécialement les cas de décroissance des coefficients de la série (1), pour lesquels, à partir d'une valeur de n, on ait toujours

$$(6)\qquad \frac{f^{n+1}(0)}{(n-1)f^{n}(0)}<1.$$

La valeur de x est supposée donnée, comprise entre zéro et l'unité, la dernière limite exclue, c'est-à-dire que $0 \leq x \leq 1-\varepsilon$, ε étant une quantité donnée très petite.

La somme de la série (5) sera évidemment plus grande que celle de la série

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & (n-1)f^{n}(0)(1-x)+\frac{\theta x}{1}n f^{n+1}(0)(1-x) \\ & \qquad +\frac{\theta^2 x^2}{1.2}(n+1)f^{n+2}(0)(1-x)+\ldots, \end{aligned}\right.$$

et, *a fortiori,* plus grande que

$$(8)\qquad (n-1)(1-x)f^{n}(\theta x).$$

Donc

$$(9)\qquad (n-1)f^n(\theta x)-(1-\theta)f^{n+1}(\theta x)x > (n-1)(1-x)f^n(\theta x);$$

il en résulte aussi

$$(10)\qquad (x-\theta x)f^{n+1}(\theta x) < (n-1)f^n(\theta x)x.$$

b. Soit, pour abréger l'écriture, $\theta x = u$, quantité essentiellement positive; pour une valeur voisine $x+x'$ de x, u deviendra $u+u'$, quantité aussi positive; si l'on a

$$u+|u'|\leq a,$$

les $f^n(u+u')$, d'après l'hypothèse admise, seront développables par la formule de Taylor, suivant les puissances de u' :

$$f^n(u+u') = f^n(u) + \frac{f^{n+1}(u)}{1}u' + \frac{f^{n+2}(u)}{1.2}u'^2 + \ldots$$

(Tannery, Ouvrage cité, n° 112).

c. n ayant une valeur *fixée,* assez grande pour que la valeur b de θx pour $x = x_0 = a$ soit plus petite qu'une quantité donnée très petite (elle sera certainement plus petite que x_0), étudions la fonction θ de x définie par l'équation (3); à cet effet, remplaçons-y x par x_0+x', θx par $b+u'$. Le premier membre de (3) pourra être développé en série absolument convergente suivant les puissances de u' et x', si l'on a

$$b+|u'|<a,\qquad x_0>|x'|,\qquad x_0-b>|x'|+|u'|;$$

ce qui a toujours lieu quand x' et u' sont assez petits. Considérons spécialement le développement suivant les puissances de u', le coefficient de u' sera

$$\frac{(x_0-b+x')^{n-2}}{(x_0+x')^{n-1}}[(x_0-b+x')f^{n+1}(b)-(n-1)f^n(b)].$$

Soit C la quantité entre crochets,

$$C(x_0-b) = (x_0-b+x')(x_0-b)f^{n+1}(b)-(n-1)(x_0-b)f^n(b);$$

l'inégalité (10) donne, en remplaçant x par x_0 et θx par b,

$$(x_0-b)f^{n+1}(b) < (n-1)x_0 f^n(b);$$

de là, parce que $x_0 - b + x'$ est positif,

$$C(x_0 - b) < (n-1) f^n(b)[(x_0 - b + x')x_0 - (x_0 - b)];$$

tant que

$$|x'| < (1 - x_0)\left(1 - \frac{b}{x_0}\right),$$

C sera certainement négatif.

Cela posé, la continuité de u s'établit par un raisonnement analogue à celui qu'on emploie pour démontrer la continuité des racines d'une équation algébrique (Briot et Bouquet, *Fonctions elliptiques,* n° 28), lequel subsiste, d'après les conditions trouvées ci-dessus, tant qu'on n'a pas $u = a$, $x = 1$.

3. Prenons les dérivées par rapport à x des deux membres de l'équation (3); x étant compris dans l'intervalle pour lequel la continuité est établie, les dérivées $f^n(x)$ étant supposées continues, on a le droit d'écrire

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &-[(n-1)f^n(\theta x) - (1-\theta)f^{n+1}(\theta x)x](1-\theta)^{n-2}\frac{d\theta}{dx} \\ &+ (1-\theta)^{n-1}f^{n+1}(\theta x)\theta \\ &= \int_0^1 (1-t)^{n-1} t f^{n+1}(tx)\,dt. \end{aligned}\right.$$

La dérivée $\dfrac{d\theta}{dx}$ est finie et déterminée dans tout l'intervalle et même quand θx atteint la valeur a [condition (9)].

L'intégrale du second membre est évidemment positive si $x \leq a$; elle ne peut changer de signe que pour une valeur de x, telle que $a' > a$.

Soit

$$a \leq x \leq 1 - \varepsilon,$$

ε étant une quantité très petite, mais donnée.

Considérons d'abord le cas où toutes les dérivées $f^n(x)$ demeurent positives dans l'intervalle désigné des valeurs de x. Je dis qu'à partir d'une valeur de n assez grande θx ne peut atteindre la valeur a dans le même intervalle. En effet, si l'on avait

$$\theta x = a, \qquad \text{pour} \qquad x = \alpha,$$

dans l'intervalle (a, α), on aurait, l'intégrale du second membre de (11) étant positive,

$$-[(n-1)f^{n}(\theta x)-(1-\theta)f^{n+1}(\theta x)x](1-\theta)^{n-2}\frac{d\theta}{dx}$$
$$+(1-\theta)^{n-1}f^{n+1}(\theta x)\theta > 0;$$

d'où, successivement, en vertu des conditions (9) et (10),

$$\frac{d\theta}{dx} < \frac{(1-\theta)f^{n+1}(\theta x)\theta}{(n-1)(1-x)f^{n}(\theta x)} < \frac{\theta}{1-x},$$
$$\frac{d(\theta x)}{dx} < \frac{\theta}{1-x},$$
$$\frac{1}{\theta x}\frac{d(\theta x)}{dx} < \frac{1}{x(1-x)}; \tag{12}$$

puis, en intégrant dans l'intervalle (a, α), remplaçant la valeur finale de θx par a,

$$\frac{a}{b} < \frac{\alpha}{a}\frac{1-a}{1-\alpha}. \tag{13}$$

Or, b tendant constamment vers zéro quand n augmente indéfiniment (n° 1), on peut prendre le nombre n fini, mais assez grand, pour que l'inégalité (6) et la suivante

$$\frac{a}{b} > \frac{1-\varepsilon}{a}\frac{1-a}{\varepsilon} \tag{14}$$

aient lieu pour cette valeur de n et les valeurs plus grandes; $\frac{\alpha}{1-\alpha}$ augmentant avec α, il viendra, *a fortiori*,

$$\frac{a}{b} > \frac{\alpha}{a}\frac{1-a}{1-\alpha}, \tag{15}$$

inégalité contradictoire avec (13). Donc, à partir d'une valeur assez grande de n, θx ne peut atteindre la valeur a dans l'intervalle $(a, 1-\varepsilon)$; dans l'expression (2) du reste R_n, $f^{n}(\theta x)$ peut être remplacé par la série correspondante déduite de (1); une limite supérieure de la valeur du reste est donnée par

$$R_n < \frac{(1-\theta)^{n-1}x^n}{1.2.3\ldots(n-1)}\frac{f^{n}(0)}{(1-\theta x)^{n+1}} = \frac{x^n f^{n}(0)}{1.2.3\ldots n}\,n\,\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(1-\theta x)^{n+1}},$$

ce qui tend vers zéro quand n augmente indéfiniment, x étant inférieur à l'unité.

Dans le cas général, on commence par choisir une valeur de n

finie, mais assez grande, pour que les inégalités (6) et (14) soient satisfaites; cela est toujours possible d'après le n° 1, si la fonction $f(x)$ remplit les conditions énoncées au commencement, et il est évident que, $S(x)$ désignant la somme de la série (1), p et q des nombres positifs tous deux ou, au moins, l'un d'eux, la combinaison $p\,S(x) + q\,f(x)$, supposée positive pour $0 \leq x \leq a$, remplira les mêmes conditions.

Je dis que la différence des dérivées $S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x)$, nulle pour $x \leq a$, ne peut cesser d'être nulle pour $x > a$.

Soit, en effet, pour fixer les idées,

$$S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x) > 0 \qquad \text{pour} \qquad a \leq x \leq a';$$

on aura aussi, k étant un nombre positif indéterminé,

$$(1+k)\,S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x) > 0 \qquad \text{pour} \qquad a \leq x \leq a'.$$

Raisonnons sur la combinaison $(1+k)\,S(x) - f(x)$, comme plus haut sur $f(x)$; on démontrera que, dans l'intervalle (a, a'), on a

$$\frac{d\theta}{dx} < \frac{\theta}{1-x}, \qquad \theta x < a,$$

et les symboles $f^n(\theta x)$, $f^{n+1}(\theta x)$ pourront être remplacés par les séries correspondantes.

Quand k tendra vers zéro, le premier membre de l'équation (11) sera nul identiquement; il devra en être ainsi du second, ce qui exige que l'on ait

$$S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad a \leq x < a'.$$

On en conclut aussitôt

$$S(x) - f(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad a \leq x \leq a'.$$

Si l'on avait

$$S^{n+1}(x) - f^{n+1}(x) < 0,$$

on raisonnerait sur

$$(1+k)f(x) - S(x).$$

On doit remarquer que l'inégalité analogue à (14), où a et b seraient remplacés par a' et b' (b', valeur de θx pour $x = a'$), est satisfaite en même temps que (14).

En effet, de

$$\frac{b'}{b} < \frac{a'}{a}\frac{1-a}{1-a'} \qquad \text{ou, en renversant,} \qquad \frac{b}{b'} > \frac{a}{a'}\frac{1-a'}{1-a}$$

et de

$$\frac{a}{b} > \frac{1-\varepsilon}{a}\frac{1-a}{\varepsilon},$$

on déduit, par la multiplication membre à membre,

$$\frac{a}{b'} > \frac{1-\varepsilon}{a'}\frac{1-a'}{\varepsilon} \qquad \text{et, } a\ fortiori, \qquad \frac{a'}{b'} > \frac{1-\varepsilon}{a'}\frac{1-a'}{\varepsilon}.$$

Cette remarque permet de continuer le raisonnement sur les intervalles successifs (a, a'), ..., en gardant la même valeur finie de n.

4. Pour ramener au cas déjà étudié, d'une série à termes positifs avec une loi de décroissance des coefficients correspondant à la condition (6), le cas général où les coefficients de la série (1) ont des signes quelconques, la série étant convergente si $x < 1$, diver-vergente si $x > 1$, nous formons l'expression

$$\varphi(x) = \frac{A}{1-x} + f(\omega x), \qquad \omega < 1;$$

on peut déterminer le nombre positif A, de manière que tous les coefficients de l'expression développée en série

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{x}{1}\varphi'(0) + \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) + \ldots$$

soient positifs.

Quand n augmente indéfiniment, la quantité

$$\frac{\varphi^{n+1}(0)}{(n-1)\,\varphi^n(0)} - 1$$

tend vers zéro en valeur absolue; on peut choisir n fini, mais assez grand pour que, en valeur absolue et pour toutes les valeurs plus grandes de n,

$$\frac{\varphi^{n+1}(0)}{(n-1)\,\varphi^n(0)} - 1 < \varepsilon,$$

ε étant un nombre donné très petit.

Considérons alors la fonction

$$F(x) = \varphi\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right);$$

à partir d'une valeur déterminée de n, la condition (6) sera évidemment satisfaite; si on limite la variation de x par la condition

$$0 \leq x \leq 1 - \varepsilon,$$

on peut reproduire sur $F(x)$ les mêmes raisonnements que sur $f(x)$. Pour l'argument $\frac{x}{1+\varepsilon}$ de φ, il viendra

$$0 \leq \frac{x}{1+\varepsilon} \leq \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

La série $\varphi\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)$ est absolument convergente; on peut la regarder comme formée de deux séries aussi absolument convergentes provenant de deux parties $\frac{A}{1-x}$ et $f(\omega x)$; la première de ces séries représentant la première partie $\frac{A}{1-x}$ dans l'intervalle désigné, il faut que la seconde série représente $f(\omega x)$ dans le même intervalle, c'est-à-dire tant que l'argument de la fonction f ne dépasse pas $\omega\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$; on peut faire que cette limite diffère de l'unité d'une quantité désignée aussi petite qu'on le voudra.

Quand la série qui représente le développement de $f(x)$ sera convergente pour $x = 1$, la fonction $f(x)$, d'après le théorème d'Abel, sera encore représentée par la série.

On peut donc énoncer le théorème général qui suit :

Théorème. — *Si, dans un intervalle fini, pour* $0 \leq x \leq a$, *la fonction* $f(x)$ *est représentée par la série de Maclaurin, elle continuera à être représentée par la même série tant que les dérivées successives* $f^n(x)$ *seront continues et que la série de Maclaurin sera convergente.*

Remarque. — Si l'on définissait une fonction $F(x)$ de cette manière :

$$F(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a; \qquad F(x) = f(x) + f_1(x-a), \quad a \leq x \leq 1;$$

$f(x)$ étant une fonction développable par la série de Maclaurin dans l'intervalle (o, 1), et $f_1(x)$ une fonction telle que $Ae^{-\frac{1}{(x-a)^2}}$, le théorème serait en défaut. Ce cas, qui m'a été signalé par M. Stieltjes, est écarté à la vérité par les hypothèses du commencement. *A posteriori,* on voit que la représentation de la fonction $F(x)$ par la série, pour $x > a$, ne peut être affirmée, parce qu'on ne peut rien dire en général sur la possibilité de développer en série la différence $F(x+a) - f(x+a) = f_1(x)$. Toutefois, une étude plus approfondie serait utile.