BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Mémoire sur la géométrie de la sphère

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 241-248

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__241_0>

Mémoire sur la géométrie de la sphère; par M. Laguerre.

(Séance du 14 mai 1873)

I. — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES SUR LE RAPPORT ANHARMONIQUE DANS LE PLAN.

1. Je rappellerai d'abord la signification de quelques termes et de quelques notations que j'emploierai constamment dans ce mémoire.

On sait que tous les cercles tracés dans un plan se coupent en deux points fixes situés sur la droite de l'infini; je les désignerai sous le nom d'*ombilics* du plan; les droites du plan, qui convergent vers ces points, ont respectivement, si l'on suppose la figure rapportée à des axes rectangulaires, pour coefficients angulaires $+i$ et $-i$.

Je désignerai les droites, dont le coefficient angulaire est $+i$, sous le nom de *droites isotropes du premier système;* l'ombilic par lequel elles passent, par la lettre I. Les *droites isotropes du second système* ont leur coefficient angulaire égal à $-i$; elles passent toutes par le second ombilic que je désignerai par la lettre J.

2. Soit un point imaginaire α d'un plan; par ce point passent une droite isotrope du premier système contenant un seul point réel A et une droite isotrope du second système contenant un seul point réel A'. Il est clair que ces deux points sont complétement déterminés par le point α, et que réciproquement ce dernier est déterminé sans ambiguïté par les points A et A'.

Je dirai (*) que AA' est le segment représentatif du point α, A étant l'origine et A' l'extrémité de ce segment.

Je rappellerai à ce sujet les deux propositions fondamentales suivantes :

Si les segments AA', BB', CC', ... *représentent des points en ligne droite, le polygone* ABC... *formé par les origines des segments et le polygone* A'B'C'... *formé par leurs extrémités sont semblables et inversement placés.*

Étant donnés deux points imaginaires représentés par les segments AA' *et* BB', *le carré de la distance de ces deux points est une quantité imaginaire, dont le module est le produit des longueurs* AB *et* A'B', *et dont l'argument est l'angle dont il faut faire tourner la droite* AB *autour du point* A, *le point* B *se mouvant sur un cercle dans le sens direct (c'est-à-dire dans le sens des aiguilles d'une montre), jusqu'à ce que cette droite soit parallèle à* A'B' *et dirigée dans le même sens.*

3. Étant données deux droites D et D' situées dans le plan, j'appellerai angle de la droite D avec la droite D', et je désignerai par la notation $\widehat{DD'}$, l'angle dont il faut faire tourner, *dans le sens direct,* la droite D pour qu'elle

(*) Voir ma note *Sur l'emploi des imaginaires en géométrie;* Nouv. Ann. de math., 2e série, t. IX.

vienne coïncider avec D'. Il est clair que, cette coïncidence obtenue, une nouvelle rotation égale à π ramènera de nouveau la coïncidence. L'angle de deux droites est donc déterminé à un multiple près de π.

Supposons maintenant que non-seulement les droites D et D' soient données, mais encore que, sur chacune d'elles, on donne le sens dans lequel on doit compter les longueurs positives; j'appellerai alors angle de la droite D avec la droite D' l'angle dont il faut faire tourner la droite D dans le sens direct, jusqu'à ce qu'elles coïncident et que sur chacune d'elles les longueurs positives soient comptées dans le même sens.

Un tel angle est évidemment déterminé à un multiple près de 2π, et, par suite, toutes ses lignes trigonométriques sont parfaitement déterminées.

4. Étant donnés trois points A, B, D, je désignerai par la notation $\widehat{BAD}$ l'angle de la droite BA (BA étant considéré comme un segment positif) avec la droite DA (DA étant également considéré comme un segment positif).

C'est, par conséquent, l'angle dont il faut faire tourner (dans le sens des aiguilles d'une montre) le point B pour qu'il se rabatte, non-seulement sur la droite AD, mais encore du même côté que le point D, par rapport au sommet de l'angle A.

Si deux arcs de courbe BA et DA se croisent, sur une sphère, au point A, j'appellerai angle de l'arc BA avec l'arc DA, et je désignerai par la notation $\widehat{BAD}$, l'angle dont il faut faire tourner la droite menée par le point A tangentiellement à l'arc AB et dirigée dans le même sens, jusqu'à ce qu'elle coïncide avec la droite menée par le point A tangentiellement à l'arc AD et dirigée dans le même sens; le mouvement ayant lieu dans le sens des aiguilles d'une montre pour un spectateur placé au-dessus de la sphère.

5. Soient trois points *réels* A, B, C. Menons par ces points trois droites isotropes du premier système; une droite quelconque D tracée dans le plan les rencontre en trois points α, β, γ, et il est clair que le rapport $\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma}$ est indépendant de la direction de la droite D.

Pour évaluer ce rapport, on peut donc supposer cette droite réelle, et, en se reportant aux propositions données (n° 2), ou bien par une recherche directe très-facile, on trouve

$$\frac{\alpha\beta}{\alpha\gamma} = \frac{AB}{AC} e^{\widehat{BAC}.i}$$

Il est important de remarquer que, dans cette formule, AB et AC sont des quantités essentiellement positives.

6. Considérons maintenant quatre points *réels* du plan A, B, C, D; les quatre droites isotropes du premier système passant par ces points forment un faisceau, dont le rapport anharmonique a généralement une valeur imaginaire $re^{\theta i}$. Je dirai que cette quantité est le rapport anharmonique des

quatre points A, B, C, D, et je la désignerai, suivant l'usage habituel, par la notation (A, B, C, D) ; la quantité r, qui est essentiellement positive, sera dite le module du rapport anharmonique et l'angle θ l'argument de ce rapport.

Pour évaluer ces quantités, coupons le faisceau de droites isotropes par une droite quelconque qui les rencontre aux points α, β, γ et δ. On aura $(A, B, C, D) = \frac{\alpha\beta}{\alpha\delta} : \frac{\gamma\beta}{\gamma\delta}$, ou, en vertu de la formule donnée dans le numéro précédent,

$$(A, B, C, D) = \frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD} e^{(\widehat{BAD} - \widehat{BCD})i}.$$

D'où les conclusions suivantes :

Étant donnés quatre points réels d'un plan A, B, C, D, *le module de leur rapport anharmonique* (quantité essentiellement positive) *est égal à* $\frac{AB}{AD} : \frac{CB}{CD}$, *et l'argument de ce rapport est l'angle* $\widehat{BAD} - \widehat{BCD}$ *ou encore l'angle* $\widehat{ABC} - \widehat{ADC}$.

Remarque. — Il est évident que l'argument est déterminé à un multiple près de 2π.

7. Si l'on avait mené par les points A, B, C, D les droites isotropes du second système, le faisceau ainsi obtenu aurait eu pour rapport anharmonique $re^{-\theta i}$; je dirai de deux rapports anharmoniques, qui ont même module et qui ne diffèrent que par le signe de l'argument, qu'ils sont *improprement égaux*.

Si quatre points sont situés sur un cercle (ou sur une droite), les faisceaux, passant par ces points et chacun des ombilics, ont même rapport anharmonique ; le rapport anharmonique de ces quatre points est donc réel. D'où cette conclusion :

Si quatre points d'un plan sont situés sur une même circonférence (ou sur une même droite), l'argument de leur rapport anharmonique est un multiple de π.

La réciproque est évidemment vraie..

Lorsque quatre points se trouvent ainsi sur une circonférence (ou sur une droite), le rapport anharmonique, tel que je l'ai défini dans le numéro précédent, a évidemment la même valeur que le rapport tel qu'on le définit habituellement. Il n'y a, par suite, aucune ambiguïté à craindre dans l'extension que j'ai donnée à la signification du mot rapport anharmonique.

8. Étant donnés quatre points α, β, γ, δ situés sur une droite réelle ou imaginaire, soient AA', BB', CC', DD' les segments représentatifs de ces points; de la définition que j'ai donnée ci-dessus, il résulte immédiatement que le rapport anharmonique des quatre points α, β, γ, δ est égal à celui des points A, B, C, D.

Il en est de même, lorsque ces points sont situés sur une circonférence.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si quatre points sont situés sur une circonférence (ou une droite) réelle ou imaginaire, leur rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique des quatre points réels qui sont les origines des segments représentatifs de ces droites, ou bien encore au rapport anharmonique des quatre points réels qui en sont les extrémités.

9. Pour faire une application simple de cette proposition, je prendrai pour point du départ la propriété suivante, fondamentale dans la théorie des sections coniques : *Étant donnée une conique tangente à quatre droites fixes, toute tangente à cette conique coupe les quatre tangentes fixes en quatre points dont le rapport anharmonique est constant;* et je supposerai qu'une ou plusieurs de ces droites deviennent imaginaires.

Considérons, par exemple, un triangle circonscrit à une conique et la droite isotrope du premier système issue d'un de ses foyers F, cette droite et les trois côtés du triangle forment un quadrilatère circonscrit à la conique. Une tangente mobile coupe les côtés du triangle aux points α, β, γ et la droite isotrope en un point imaginaire représenté par un segment dont l'origine est le point F. On en conclut que le rapport anharmonique des quatre points α, β, γ et F demeure constant, lorsque la tangente mobile se déplace. Par suite des formules données (n° 6), on a donc

$$\frac{F\alpha.\beta\gamma}{F\beta.\alpha\gamma} = \text{const.} \quad \text{et} \quad \widehat{\alpha F\beta} - \widehat{\alpha\gamma\beta} = \text{const.},$$

d'où

$$\widehat{\alpha F\beta} = \text{const.} + \widehat{\alpha\gamma\beta}.$$

Au premier abord, on pourrait croire que l'angle $\widehat{\alpha F\beta}$ est constant, puisque les points α, β, γ sont en ligne droite; mais il faut remarquer que, d'après nos conventions (n° 4), $\widehat{\alpha\gamma\beta}$ est égal à 0 ou à π, suivant que le point γ est en dehors du segment $\alpha\beta$ ou dans l'intérieur de ce segment; l'angle $\widehat{\alpha F\beta}$ peut donc varier d'une demi-circonférence.

Quant à l'angle des deux droites $F\alpha$ et $F\beta$ (ces droites étant considérées indépendamment de leur direction), il demeure constant.

Considérons encore une droite T tangente à une conique, les deux tangentes isotropes issues du foyer F, et la tangente isotrope du second système issue du foyer G; ces quatre droites forment un quadrilatère circonscrit à la conique. Soit T' une tangente quelconque à cette conique rencontrant la tangente fixe en α; elle coupe les droites isotropes du premier système issues des foyers en des points imaginaires dont les segments ont pour origine ces foyers eux-mêmes, et la droite isotrope du second système issue du foyer F en un point représenté par un segment dont l'extrémité est en F; l'origine de ce segment est donc le point F′ symétrique de F par rapport à la tangente mobile.

D'où l'on voit que le rapport anharmonique des quatre points α, F, F′ et G demeure constant, lorsque la tangente mobile se déplace.

On déduit de là les relations suivantes entre les divers éléments du quadrilatère FF′αG :

$$\widehat{F\alpha G} - \widehat{FF'G} = \text{const.}, \quad \widehat{F'\alpha G} - \widehat{F'FG} = \text{const.},$$
$$\widehat{F\alpha F'} - \widehat{FGF'} = \text{const.}, \quad \widehat{FG\alpha} - \widehat{FF'\alpha} = \text{const.},$$

etc., etc. (*),

$$\frac{G\alpha . FF'}{F\alpha . GF'} = \text{const.}, \quad \frac{G\alpha . FF'}{GF . F'\alpha} = \text{const.}$$

Si l'on remarque que FG est constant et que $F'\alpha = F\alpha$, les deux dernières égalités donneront

$$FF' = \text{const.} \times \frac{F\alpha}{G\alpha} \quad \text{et} \quad GF' = \text{const.}$$

D'où l'on déduit, en particulier, cette propriété bien connue que le lieu du point F′ est une circonférence de cercle ayant pour centre le foyer G.

10. Je ne m'étendrai pas davantage sur les nombreuses relations métriques que l'on peut déduire de la proposition fondamentale de la théorie des coniques et qu'elle renferme ainsi *comme cas particuliers*.

Je ferai seulement l'observation suivante : bien que, dans les théorèmes que nous obtenons ainsi, les éléments de la figure soient essentiellement supposés réels (en vertu même du mode de démonstration), ils n'en sont pas moins vrais dans toute leur généralité ; rien n'empêche donc, dans ces nouvelles propositions, de supposer que certains éléments deviennent imaginaires et d'en déduire de nouvelles relations (**).

(*) Il est presque inutile de faire remarquer que ces diverses relations se réduisent à deux relations distinctes.

(**) En général, quand dans une figure certains éléments deviennent imaginaires, toute relation relative à cette figure donne deux relations, en mettant en évidence la partie réelle et la partie imaginaire. D'une proposition donnée, on déduit donc deux autres propositions généralement distinctes.

Il peut arriver néanmoins qu'elles se confondent, ou que l'une des deux exprime une simple identité, ou bien encore que l'une d'entre elles serve seulement à lever une ambiguïté et à fixer le signe dont une quantité doit être affectée.

Comme exemple de ce dernier cas, je prendrai la proposition suivante :

La somme des distances d'un point d'une ellipse aux deux foyers imaginaires situés sur le petit axe est constante et égale à $2bi$, b désignant la longueur du petit axe.

Au sujet de ce théorème, je ferai observer que les distances dont il s'agit étant comptées sur des droites différentes, il est impossible *a priori* de fixer leur valeur. En désignant donc par φ et γ les deux foyers imaginaires de l'ellipse et par $M\varphi$ et $M\gamma$ deux quelconques

11. Soient deux faisceaux homographiques de droites isotropes du premier système; le premier de ces faisceaux est déterminé par le système S des points réels A, B, C, ... situés sur les rayons qui le composent, le second est également déterminé par un système S′ de points réels A′, B′, C′, ...

Cela posé, il résulte immédiatement de cette définition que *le rapport anharmonique de quatre points quelconques du système* S *est proprement égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants du système* S′. Je dirai que ces deux systèmes sont *proprement anharmoniques*.

Soient un faisceau de droites isotropes du premier système déterminé par un système S de points réels A, B, C, ..., et un faisceau homographique de droites isotropes du deuxième système déterminé par système S′ de points réels A′, B′, C′, ... ; on voit immédiatement que *le rapport anharmonique de quatre points quelconques du système* S *est improprement égal au rapport anharmonique des quatre points correspondants du système* S′. Je dirai que ces deux systèmes sont *improprement anharmoniques*.

Lorsqu'on transforme une figure Σ par rayons vecteurs réciproques, la transformée est improprement anharmonique à Σ; en sorte que, quel que soit le nombre des transformations analogues que l'on opère, la figure transformée sera toujours proprement ou improprement anharmonique à la figure primitive, suivant que le nombre des transformations sera pair ou impair.

12. De la notion qui précède résulte immédiatement la proposition suivante :

des valeurs dont sont susceptibles les distances du point M de l'ellipse aux foyers φ et γ, le théorème précédent s'exprime par l'égalité suivante :

$$\varepsilon.M\varphi + \eta.M\gamma = 2bi,$$

ε et η étant des constantes dont la valeur est $+1$ ou -1.

F et G désignant les deux foyers réels de l'ellipse, on a $\varphi = (F, G)$ et $\gamma = (G, F)$; j'exprime ainsi que φ et γ ont respectivement pour segments représentatifs les segments FG et GF.

Le point M, *étant supposé réel*, d'après la formule donnée au n° 2, on a, λ désignant l'angle positif, inférieur à un droit, que fait avec la normale MN chacun des rayons vecteurs FM et GM,

$$M\gamma = \sqrt{MF.MG}\, e^{\lambda i} \quad \text{et} \quad M\varphi = \sqrt{MF.MG}\, e^{-\lambda i};$$

on déduit de là

$$\sqrt{MF.MG}\,(\varepsilon e^{-\lambda i} + \eta e^{\lambda i}) = 2bi,$$

ou, en égalant de part et d'autre les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\sqrt{MF.MG}\,(\varepsilon + \eta)\cos\lambda = 0$$
$$\sqrt{MF.MG}\,(\eta - \varepsilon) i \sin\lambda = 2bi.$$

La première équation montre que l'on a $\varepsilon = -\eta$; portant cette valeur dans la seconde équation et élevant au carré, après avoir supprimé le facteur -4, il vient :

$$MF\sin\lambda . MG\sin\lambda = b^2,$$

ou bien $FP.GQ = b^2$, en désignant par P et Q les pieds des perpendiculaires abaissées des foyers sur la tangente en M.

Si, sur une droite (ou un cercle) réelle ou imaginaire, on a une série de points représentés par des segments dont les origines forment un polygone P*; si, sur une autre droite (ou un autre cercle), on a une série homographique de points représentés par des segments dont les origines forment un polygone* P′, *les deux polygones* P *et* P′ *sont proprement anharmoniques.*

Pour faire une application de cette proposition, considérons une conique réelle K et une droite imaginaire α tangente à cette courbe, que, par suite, touchera également la droite α' imaginairement conjuguée de la première. Une droite réelle mobile tangente à K rencontre α en un point (A, A′), et α' au point imaginairement conjugué (A′, A).

Pendant le déplacement de la tangente, le point (A, A′) se meut sur une droite; donc la figure (A), décrite par le point A, est semblable à la figure (A′), décrite par le point A′, et inversement placée, et les deux figures sont *improprement anharmoniques*. D'autre part, en vertu de cette propriété fondamentale des coniques que la tangente détermine sur α et α' des divisions homographiques, les figures (A) et (A′) sont *proprement anharmoniques;* il en résulte (n° 8) que les courbes (A) et (A′) sont toutes deux des cercles.

D'où les conclusions suivantes :

Quatre droites réelles tangentes à une conique réelle coupent une droite imaginaire quelconque tangente à cette conique en quatre points représentés par des segments dont les origines sont situées sur une même circonférence.

Si un point mobile M *décrit une circonférence, tandis qu'un autre point* M′ *décrit une autre circonférence en sens inverse et dans le même temps, le point milieu* I *de la corde* MM′ *décrit une conique et la droite menée en* I *perpendiculairement à la corde enveloppe une autre conique.*

13. Tous les théorèmes relatifs à la division homographique sur une même droite ou sur des droites différentes donnent évidemment lieu à autant de théorèmes correspondants relatifs à deux systèmes de points *proprement anharmoniques;* pour les développer, je n'aurais qu'à transcrire ici plusieurs chapitres de la *Géométrie supérieure* et des *Sections coniques* de M. Chasles. J'éviterai au lecteur la peine de relire, sous une autre forme, des propositions bien connues et les emploierai, dans la suite de ce mémoire, toutes les fois qu'elles me seront utiles, sans entrer dans plus de détails à ce sujet.

Je ferai cependant la remarque suivante, à cause de son fréquent emploi. On connaît (*Sections coniques*, p. 99) le théorème suivant :

Si l'on a, sur une droite, une série de points en involution, les conjugués harmoniques d'un point P *quelconque de cette droite, relatifs aux couples de points de l'involution, déterminent une série de points* (P)*; à un autre point* P′ *de la droite correspond une autre série* (P′)*; les deux divisions* (P) *et* (P′) *sont homographiques.*

D'où cette conséquence pour une figure plane :

Étant donnée dans un plan une figure en involution (*), *les conjugués harmoniques d'un point quelconque* P *du plan déterminant une figure* (P) ; *à un autre point* P′ *correspond une autre figure* (P′) ; *les deux figures* (P) *et* (P′) *sont proprement anharmoniques.*

J'appellerai *courbe en involution* une courbe dont les points peuvent se grouper deux à deux, de telle sorte que deux points conjugués M et M′ fassent partie d'un système de points en involution. On déduit alors de ce qui précède la proposition suivante :

Si l'on prend successivement les points conjugués harmoniques de divers points du plan par rapport aux couples de points conjugués d'une courbe en involution, les diverses courbes ainsi obtenues sont proprement anharmoniques.

En particulier, si, pour un point du plan, la courbe est un cercle, elle sera également un cercle pour tout autre point; ainsi le lieu des points milieux des cordes joignant les points conjugués est un cercle. La courbe en involution qui jouit de cette propriété est par là même complétement définie, et je l'ai déjà étudiée dans une note *Sur les cassiniennes* publiée dans le *Bulletin de la Société philomathique* (mars 1868). Ses nombreuses propriétés se déduisent du reste avec la plus grande facilité, en employant les considérations qui précèdent, des simples et élégantes relations données par M. Chasles dans sa *Géométrie supérieure*, relativement à un système de segments en involution et aux milieux de ces segments.

14. Soient (A) et (A′) deux systèmes de points improprement anharmoniques, le faisceau déterminé par le système (A) et l'ombilic I et le faisceau déterminé par le second système et l'ombilic J sont homographiques ; par suite, tous les points imaginaires (A, A′) sont situés sur un même cercle. D'où cette conclusion :

Si deux systèmes de points (A) *et* (A′) *sont improprement anharmoniques, tous les points imaginaires* (A, A′) *sont situés sur un même cercle.*

Réciproquement :

Si un certain nombre de points (A, A′), (B, B′), ... *sont situés sur un même cercle, les deux systèmes de points* A, B, ... *et* A′, B′, ... *sont improprement anharmoniques.*

(*A suivre.*)

(*) Par la propriété fondamentale de l'involution, on voit que A et A′ étant deux points conjugués, ces deux points et les deux points doubles P et Q sont situés sur un même cercle; de plus, les quatre points A, A′, P et Q déterminent sur ce cercle une division harmonique.