BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 226-240
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__226_1>

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre;
par M. HALPHEN (*).

(Séance du 19 mars 1873)

DEUXIÈME PARTIE

I. — DROITES-CONIQUES DANS LES COMPLEXES PLANS DE CONIQUES.

Je donne le nom de *complexe* plan de coniques à l'ensemble de ces courbes qui satisfont à des conditions données en nombre inférieur à 4. Le nombre de ces conditions sera *l'ordre* du complexe. Je désignerai habituellement un complexe par une lettre entre parenthèses, affectée d'un indice égal à son ordre. La même lettre, sans parenthèses, désignera une conique de ce complexe. Ainsi C_3 sera une conique appartenant à un complexe du 3^{me} ordre (C_3).

(*) Voir, pour la première partie, même tome, p. 130.

Un complexe du 3^{me} ordre peut, d'une infinité de manières, être formé par une série de systèmes. Tous ces systèmes peuvent contenir des droites-coniques, et quelques-unes d'entre elles peuvent rester les mêmes dans tous les systèmes. Soit D_1 une de ces dernières, et D_2 une droite-conique variant avec le système considéré. Il y a, dans le complexe, un nombre fini de droites telles que D_1, et une série de droites telles que D_2, enveloppant une ligne (D_2). En outre, il peut arriver que quelques-uns des systèmes variables contiennent des droites-coniques de plus. Soit D'_1 une de ces droites. Il y a, dans le complexe, un nombre fini de droites telles que D'_1.

Un complexe du 3^{me} ordre (C_3) peut donc contenir à la fois des droites-coniques isolées ou de 1^{re} *espèce*, telles que D_1 ou D'_1, et des droites coniques, telles que D_2, enveloppant une ligne, ou *de* 2^{me} *espèce*.

Pour engendrer un même complexe (C_3), on peut choisir les systèmes générateurs de telle manière que les droites-coniques de 1^{re} espèce soient toutes d'un seul type, D_1 ou D'_1, à volonté. Par exemple, le système des coniques C_3 qui passent en un point ne contient aucune des droites-coniques isolées de (C_3), à moins que le point choisi ne soit sur une de ces droites. En le faisant mouvoir sur une ligne continue, on détermine une suite de systèmes qui engendrent (C_3). Dans ce mode de génération, toutes les droites-coniques de 1^{re} espèce de (C_3) appartiennent au type D'_1.

Au contraire, en engendrant le complexe (C_3) par des systèmes de coniques C_3 tangentes à une série de droites, on range toutes ces droites-coniques dans le type D_1, ainsi que je vais le prouver. Si le contraire a lieu, une droite-conique D de 1^{re} espèce de (C_3) n'appartient pas au système des coniques C_3 tangentes à une droite arbitraire. C'est-à-dire que, parmi les coniques C_3 infiniment voisines de D, il n'y en a aucune dont le sommet soit infiniment voisin de la droite arbitraire. Donc chacun des deux sommets de ces coniques est infiniment voisin d'une position limite qu'il atteint quand la conique se réduit à D. On exprime cette propriété en disant que les sommets de la droite-conique D sont déterminés. Soit a l'un de ces sommets. Le système (S) des coniques C_3, tangentes à une droite quelconque L menée par a, contient la droite-conique D. Le système (S') des coniques C_3, tangentes à une droite arbitraire L', ne passant pas en a, ne la contient pas. Soit ν la 2^{me} caractéristique de ce système (S'). Pour qu'il y ait moins de ν coniques de ce système tangentes à une droite L'', il faut que cette dernière passe en un sommet d'une droite-conique de (S'), et cette condition est suffisante. D'autre part, le système (S) a, pour 2^{me} caractéristique, un nombre inférieur à ν. Il y a donc moins de ν coniques C_3 tangentes à L et à L'. Or cela est impossible, puisque la droite L est une droite quelconque menée par a, et que, par suite, elle ne passe pas en un sommet d'une droite-conique du système (S'). L'hypothèse est donc impossible. Donc tous les systèmes tels que (S') contiennent toutes les droites coniques du complexe.

Comme conséquence de cette propriété, on voit que, sur une droite-conique de 2^{me} espèce, les deux sommets sont déterminés, tandis que, sur une droite-conique de 1^{re} espèce, ces points renferment une arbitraire.

Soit, par exemple, le complexe des coniques tangentes à 3 courbes A_1, A_2, A_3. Les tangentes à l'une de ces courbes, A_1, sont des droites-coniques de 2^{me} espèce, dont les sommets sont sur les deux autres. Les tangentes communes à deux d'entre elles sont des droites-coniques de 1^{re} espèce, dont un sommet est sur la troisième et l'autre arbitraire. Le même complexe contient encore un autre groupe de droites-coniques. Ce sont les droites qui passent par un point d'intersection de deux des trois courbes. Ce sont des droites-coniques de 2^{me} espèce. Parmi ces droites, celles qui sont tangentes à la 3^{me} courbe, tout en appartenant à une série de droites-coniques de 2^{me} espèce, peuvent être considérées comme étant de la 1^{re} espèce, attendu qu'elles ont un sommet indéterminé.

Par des raisonnements analogues, on est conduit à distinguer, dans un complexe du 2^{me} ordre, trois espèces de droites coniques : la 1^{re}, formée de droites isolées, dont les sommets sont arbitraires; la 2^{me}, formée de droites enveloppant une ligne, et dont les sommets contiennent une arbitraire; la 3^{me}, embrassant toutes les droites du plan ; sur chacune de ces droites, les sommets sont déterminés.

Dans un complexe du 1^{er} ordre, on distinguera deux espèces de droites-coniques : la 1^{re}, formée de droites enveloppant une ligne et dont les sommets sont arbitraires; la 2^{me}, embrassant toutes les droites du plan; sur chacune de ces dernières, les sommets contiennent une arbitraire.

Dans la 1^{re} partie de ce mémoire (p. 140), on a eu lieu de considérer des conditions telles qu'une droite quelconque du plan, prise pour une conique, y satisfait. Une telle condition définit un complexe du 1^{er} ordre contenant des droites-coniques de 2^{me} espèce. Le nombre b ou β, défini dans l'endroit cité, est précisément le nombre des seconds sommets qui correspondent, sur une de ces droites-coniques, à un premier sommet donné. Ce nombre est nul, si le complexe ne contient que des droites-coniques de 1^{re} espèce. Par exemple, le complexe des coniques normales à une courbe donnée contient la 2^{me} espèce de droites-coniques : un de leurs sommets est sur la courbe donnée, et le nombre β est égal au degré de cette courbe. Le même complexe contient aussi la 1^{re} espèce de droites-coniques; ce sont les normales à la courbe donnée.

Toutes ces circonstances s'expliquent d'elles-mêmes par la remarque suivante : les coniques d'un complexe (C_n), pour lesquelles le rapport des axes est un nombre donné ε, contiennent $(4-n)$ arbitraires. Il y a donc $(4-n)$ arbitraires dans la position d'un de leurs axes et des sommets de cet axe. Si toutes ces arbitraires subsistent dans la position de cet axe, les sommets y sont déterminés. Si l'axe ne contient que $(3-n)$ arbitraires, les sommets, situés sur un de ces axes, renferment une arbitraire. Si l'axe ne contient que $(2 - n)$ arbitraires, les sommets y sont indéterminés. Ces considérations sont applicables au cas où ε est nul, c'est-à-dire quand, au lieu de coniques ordinaires, il s'agit de droites-coniques.

II. — DROITES-CONIQUES DANS UN SYSTÈME COMMUN A DEUX COMPLEXES.

Soient (C_1), (C_3) deux complexes du premier et du troisième ordre. L'ensemble des conditions qui les déterminent équivaut à 4 conditions, en sorte qu'il existe un système de coniques communes à ces deux complexes. Désignons, suivant les notations de M. Chasles, par :

$$N(C_3, 2p) = \rho, \quad N(C_3, 1p, 1d) = \sigma, \quad N(C_3, 2d) = \tau,$$

le nombre des coniques du complexe (C_3) qui passent par 2 points, ou passent par un point et touchent une droite, ou touchent 2 droites. Les caractéristiques des deux systèmes $(C_3, 1p)$ et $(C_3, 1d)$ sont respectivement ρ, σ et σ, τ. Par suite, α et β étant deux nombres ne dépendant que du complexe C_1, on a :

$$N(C_1, C_3, 1p) = \alpha\rho + \beta\sigma; \quad N(C_1, C_3, 1d) = \alpha\sigma + \beta\tau.$$

Ces deux nombres sont les caractéristiques μ, ν du système (C_1, C_3) des coniques communes aux deux complexes. Par suite, la valeur totale des droites-coniques de ce système est :

$$2\mu - \nu = \alpha(2\rho - \sigma) + \beta(2\sigma - \tau).$$

Les deux nombres $(2\rho - \sigma)$ et $(2\sigma - \tau)$ sont les valeurs totales des droites-coniques des deux systèmes $(C_3, 1p)$ et $(C_3, 1d)$. Cette égalité exprime ainsi un théorème facile à énoncer.

Les droites-coniques du système (C_1, C_3) ont trois provenances différentes : 1° Elles sont de 1re espèce dans C_3, ce qui exige qu'elles soient en même temps de 2me espèce dans (C_1), si les deux complexes sont entièrement indépendants l'un de l'autre ; 2° elles sont de 2me espèce dans C_3 et de 1re dans (C_1) ; 3° elles sont de 2me espèce dans les deux complexes.

Si le complexe (C_1) ne contient pas de droites-coniques de 2me espèce, il n'y a, dans le système (C_1, C_3) que des droites-coniques de 2me espèce de (C_3). Dans les deux complexes, les droites-coniques à considérer enveloppent des lignes, en sorte que les droites-coniques du système sont des tangentes communes à ces deux lignes. Dans ce cas, d'après une remarque déjà faite, le nombre β est nul, et la valeur totale des droites-coniques du système (C_1, C_3) est simplement : $\alpha(2\rho - \sigma)$. Cette propriété n'est qu'un cas particulier de la proposition suivante :

Dans un système de coniques commun à deux complexes du 1^{er} et du 3^{me} ordre (C_1), (C_3), la valeur totale des droites-coniques provenant des droites-coniques de 1^{re} espèce du complexe (C_1), est le produit d'un nombre ne dépendant que de ce complexe par la valeur totale des droites-coniques du système $(C_3, 1p)$; et, plus généralement, si les droites-coniques de 1^{re} espèce du complexe (C_1) forment plusieurs séries distinctes, la valeur totale des droites-coniques du système, qui proviennent d'une de ces séries, est de la même forme.

Je vais démontrer cette importante proposition.

Pour y parvenir, je considérerai une droite-conique du système (C_1, C_3), qui soit de 1^{re} espèce dans (C_1), et je chercherai sa valeur. J'emploierai, à cet effet, le résultat énoncé dans la 1^{re} partie (page 137) : Soit D cette droite-conique; je prendrai, sur une droite arbitraire Δ, un point a, à distance infiniment petite du 1^{er} ordre de D ; je chercherai les coniques infiniment aplaties du système (C_1, C_3) qui interceptent sur Δ des segments dont les milieux soient en a, et je ferai la somme des ordres des carrés de ces segments. Cette somme sera la valeur de la droite conique D dans le système (C_1, C_3).

Considérons d'abord séparément les coniques du complexe (C_3) qui interceptent sur Δ des segments dont les milieux soient en a. Elles forment un système (S), dont les droites-coniques sont les droites-coniques de 2^{me} espèce de (C_3), passant en a, c'est-à-dire les tangentes menées de a à l'enveloppe de ces droites. Considérons l'une de ces tangentes, et soit a' le point où elle coupe une droite Δ' parallèle à Δ. La droite aa' est une droite-conique du système (S). Si l'on prend sur Δ' un point m, il y a un certain nombre de coniques du système (S) qui interceptent sur Δ' des segments dont les milieux soient en m; et, si m est à une distance infiniment petite du 1^{er} ordre de a', un certain nombre de ces coniques sont infiniment aplaties. Soit α l'ordre du carré du segment intercepté par l'une d'elles; la somme des nombres tels que α est, d'après le principe rappelé plus haut, la valeur de la droite-conique aa' dans le système S.

Le point a a été pris à distance infiniment petite du 1^{er} ordre de la droite D, qui est une tangente à l'enveloppe des droites-coniques de 2^{me} espèce de C_3. Une des tangentes à cette enveloppe, issues du point a, fait un angle infiniment petit du 1^{er} ordre avec D. Soit aa' cette tangente : les deux points a et a' sont respectivement à distance infiniment petite du 1^{er} ordre des points A et A', où D rencontre Δ et Δ'.

Construisons une courbe plane qui représente la liaison existant entre la position du point m sur Δ' et le segment σ intercepté sur la même droite par une conique du système (S), le milieu de ce segment étant en m. Pour cela, prenons $A'm$ et σ^2 pour les coordonnées (x, y) de cette courbe (P). La droite aa' étant une droite-conique du système, l'ordonnée y de la courbe

(P) s'annule quand le point m vient en a', c'est-à-dire quand x devient égal à $A'a'$. Ainsi la courbe (P) passe au point de l'axe des x dont l'abscisse est $A'a'$, longueur infiniment petite du 1er ordre; et de ce point partent diverses branches de courbe. Pour chacune de ces branches, l'abscisse étant infiniment petite du 1er ordre, l'ordonnée est infiniment petite d'un ordre égal à l'un des nombres α.

Prenons une conique dans le système (S), interceptant sur Δ' un segment de milieu m; et considérons les coniques du complexe (C_1) qui la touchent aux extrémités du diamètre am. Ce diamètre est commun à toutes les coniques ainsi construites et à la conique du système (S) considérée. En faisant varier cette dernière, les autres coniques forment un système (S′), et chacune d'elles touche, aux extrémités du diamètre mené par a, une conique du système (S). Deux telles coniques seront dites *conjuguées*. Si deux coniques conjuguées interceptent des segments égaux sur Δ', elles coïncident.

En cherchant donc les couples de coniques conjuguées des systèmes (S) et (S′) qui interceptent, sur Δ', des segments égaux, on trouvera les coniques du système (C_1,C_3) qui interceptent, sur la droite Δ, des segments dont les milieux sont en a. Pour l'objet que l'on se propose ici, il faut chercher celles de ces coniques qui sont infiniment aplaties, et faire la somme des ordres des carrés des segments qu'elles interceptent sur Δ, ou sur Δ'.

Pour qu'à une conique du système (S), ayant la droite am pour diamètre conjugué de la direction de Δ, soit conjuguée une conique infiniment aplatie du système (S′), il faut et il suffit que la droite am soit infiniment voisine d'une droite-conique de 1re espèce du complexe (C_1), ainsi qu'il est très-aisé de le voir. Par suite, D étant une droite-conique de 1re espèce de ce complexe, quand m est infiniment voisin de A', on a, dans le système (S′), quelques coniques infiniment aplaties. On obtient, dans le même système, une droite-conique, quand le point m vient coïncider avec le point a'', où Δ' est rencontrée par la tangente, infiniment voisine de D, menée de a à l'enveloppe des droites-coniques de 1re espèce de (C_1).

Quand le point m est infiniment voisin de A', à chaque conique (S) infiniment aplatie sont conjuguées des coniques (S′) infiniment aplaties. L'une d'elles intercepte sur Δ' un segment σ', dont l'ordre α' ne dépend absolument que du complexe C_1. La somme des nombres tels que α', multiplié par le nombre des coniques S, ayant am pour diamètre conjugué de la direction de Δ, est la valeur de la droite-conique aa'', dans le système (S′).

Construisons, pour le système (S′), comme pour le système (S), une courbe (P′) dont les coordonnées (x', y') soient $A'm$ et le carré σ'^2 du segment σ' intercepté sur Δ' par les coniques (S′) ayant am pour diamètre conjugué de la direction de Δ.

Cette courbe passe au point de l'axe des x', dont l'abscisse est $A'a''$. De ce point partent diverses branches. Sur une même parallèle à l'axe des y', les points de cette courbe (P') se partagent en autant de groupes qu'il y a de coniques du système (S) correspondant à l'abscisse de cette parallèle. Soit r le nombre de ces groupes, qui n'est autre que la 1^re^ caractéristique du système (S). Si la parallèle à l'axe des y' est à distance du 1^er^ ordre de l'origine, chacun des r groupes de points, où elle coupe (P'), contient un certain nombre de points infiniment voisins de l'origine; et, pour chacun de ces points, l'ordonnée est d'un ordre égal à l'un des nombres α'.

Si l'on fait coïncider les axes des deux courbes (P) et (P'), les points de ces courbes qui se correspondent et qui sont confondus à distance infiniment petite de l'origine, répondent aux coniques infiniment aplaties du système (C_1, C_3) qui interceptent sur Δ des segments dont les milieux sont en a. Nous avons à chercher la somme des ordres des carrés des segments interceptés par ces coniques sur Δ', c'est-à-dire *la somme des ordres des ordonnées des points des courbes* (P) *et* (P') *correspondants qui sont confondus à distance infiniment petite de l'origine.* Pour y parvenir, considérons isolément deux branches correspondantes des deux courbes; soient α et α' les ordres des ordonnées de ces branches pour une abscisse du 1^er^ ordre. On voit aisément que, si α est le plus grand de ces deux nombres, le nombre des points d'intersection des deux branches infiniment voisins de l'origine est α', et que l'ordre des ordonnées de chacun d'eux est α. La somme des ordres de leurs ordonnées est donc $\alpha\alpha'$. Par suite, la somme cherchée n'est autre chose que $\Sigma\alpha\Sigma\alpha'$. Telle est la valeur de la droite-conique D dans le système (C_1,C_3).

Considérons maintenant, dans le complexe (C_1) une série continue et indécomposable de droites-conique de 1^re^ espèce, enveloppant une ligne indécomposable de classe K'. Pour chaque droite de cette série, le nombre $\Sigma\alpha'$ reste le même. Désignons-le par A'. De même, considérons dans (C_3) une série indécomposable de droites-coniques de 2^me^ espèce, enveloppant une ligne de classe K. Pour chaque droite de cette série, le nombre $\Sigma\alpha$ reste le même. Désignons-le par A. Les deux enveloppes ont K'K tangentes communes. Chacune d'elles est, dans le système (C_1, C_3) une droite-conique dont la valeur est A'A. Les deux séries considérées fournissent donc à ce système des droites-coniques ayant pour valeur totale le nombre A'K'.AK. Prenons successivement dans (C_3) toutes les séries distinctes de droites-coniques de 2^me^ espèce, pour les combiner avec la même série de droites-coniques de (C_1). Nous concluons facilement que la série considérée de droites-coniques de 1^re^ espèce de (C_1) fournit au système des droites-coniques ayant pour valeur totale le nombre A'K'ΣAK. Prenons, en particulier, pour (C_1) le complexe des coniques passant en un point. Les nombres K' et A' sont faciles à déterminer. Ce sont les nombres 1 et 2. Donc 2ΣAK est la valeur totale des droites-coniques du système (C_3, 1 p), ou ($2\rho - \sigma$). Donc la valeur totale des droites-coniques du système, qui proviennent d'une série de droites-coniques de 1re espèce de (C_1) est $\frac{A'K'(2\rho-\sigma)}{2}$, ce qui démontre la proposition énoncée plus haut.

III. — THÉORÈME DE M. CREMONA

De même qu'on vient de trouver directement la valeur totale des droites-coniques d'un système (C_1, C_3), qui sont de 1re espèce dans le complexe C_1, on peut aussi trouver directement celle des droites-coniques du même système qui sont de 2me espèce dans ce complexe. Ce problème ne présente pas de difficultés plus grandes que le précédent; mais je ne m'y arrêterai pas. Je n'ai traité le problème qui fait l'objet principal du précédent chapitre, que pour en conclure la démonstration du théorème de M. Cremona, dont je vais m'occuper actuellement.

Ainsi qu'on l'a vu plus haut, les caractéristiques du système (C_1, C_3), commun aux deux complexes (C_1), (C_3), sont :

$$\mu = \alpha\rho + \beta\sigma, \quad \nu = \alpha\sigma + \beta\tau.$$

Si donc on assujettit les coniques de ce système à une autre condition simple, définissant un complexe C'_1, le nombre des coniques satisfaisant à la question est :

$$N(C_1, C'_1, C_3) = \alpha'\mu + \beta'\nu = \alpha\alpha'\rho + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)\sigma + \beta\beta'\tau.$$

Ce nombre s'exprime donc linéairement par les 3 nombres ρ, σ, τ, qu'on peut appeler les *caractéristiques* du complexe (C_3).

Le théorème énoncé par M. Cremona consiste en ce que cette propriété subsiste dans le cas où, au lieu de joindre à la condition triple définissant le complexe C_3 deux conditions simples, on lui joint une condition double indécomposable en deux conditions simples. On peut donc l'énoncer ainsi :

Le nombre des coniques satisfaisant à une condition triple et à une condition double indépendantes est de la forme $\gamma\rho + \delta\sigma + \varepsilon\tau$, les nombres ρ, σ, τ ne dépendant que de la condition triple (ce sont les caractéristiques du complexe défini par cette condition), et les nombres γ, δ, ε, ne dépendant que de la condition double.

Ainsi que je l'ai fait observer dans l'introduction de ce mémoire, ce théorème est implicitement contenu dans les travaux de M. Chasles. C'est de là que M. Cremona l'a tiré, ainsi qu'il le dit expressément (*Comptes rendus*, t. LIX, p. 776), et il s'est borné à l'énoncer explicitement. Je vais actuellement démontrer ce théorème. Cette démonstration se fera aisément en suivant une méthode analogue à celle que j'ai employée pour démontrer, dans la 1re partie, le théorème de M. Chasles, et en s'appuyant sur la proposition qui a fait l'objet principal du chapitre précédent.

Soient donnés deux complexes (C_3), (C_2) du 3^{me} et du 2^{me} ordre, dont on cherche le nombre des coniques communes. Il existe une infinité, à une arbitraire, de couples de coniques (C_3), (C_2) de ces deux complexes, dont les 4 points d'intersection sont sur une conique fixe Σ. Ces couples forment deux systèmes de coniques se correspondant une à une, de telle sorte qu'à une conique de l'un des systèmes correspond une seule conique de l'autre, laquelle coupe la conique fixe Σ aux mêmes 4 points. Considérons, pour ces deux systèmes, les indicatrices relatives à une droite arbitraire Δ, ces indicatrices étant les lignes définies dans la 1re partie (page 134). Ces deux indicatrices se correspondent *point à point*; et, suivant une remarque faite plus haut (1re partie, page 139), la droite qui joint deux points correspondants passe au point fixe C, représentatif des deux points d'intersection de la droite Δ et de la conique fixe Σ. Les indicatrices ne passent pas en ce point. Donc, d'après le théorème III (1re partie, page 135), le degré de ces deux courbes est le même, et marque aussi le nombre des couples de points correspondants de ces deux courbes qui sont confondus. Ce même nombre est la 1re caractéristique de chacun des deux systèmes considérés ; c'est aussi le nombre des couples de coniques correspondantes de ces deux systèmes qui sont confondues. En en retranchant le nombre des couples de points correspondants confondus sur les deux indicatrices, et afférents aux droites-coniques communes aux deux systèmes, on aura donc le nombre cherché des coniques propres communes aux deux complexes (C_2) et (C_3).

En suivant le raisonnement fait dans la 1re partie, on voit que deux droites-coniques correspondantes confondues ont même valeur dans les deux systèmes; cette valeur commune est, en même temps, le nombre des couples de points correspondants des deux indicatrices confondus, et absorbés par cette droite-conique On aura donc le nombre total de ces points, en faisant la somme des valeurs des droites-coniques communes aux deux systèmes, considérées dans l'un ou l'autre de ces systèmes à volonté. Je vais chercher cette somme, dans le système engendré par les coniques C_3, satisfaisant à la condition simple de rencontrer Σ en 4 points tels qu'on y puisse faire passer une conique du complexe (C_2).

En désignant, comme ci-dessus, par ρ, σ, τ, les caractéristiques du complexe (C_3), on a, pour celles du système considéré (S) :

$$\mu = m\rho + n\sigma, \quad \nu = m\sigma + n\tau,$$

m et n étant deux nombres ne dépendant que de la condition simple qui vient d'être énoncée, c'est-à-dire ne dépendant que du complexe (C_2). La valeur totale des droites-coniques de ce système est : $2\mu - \nu = m(2\rho - \sigma) + n(2\sigma - \tau)$. Mais ce nombre diffère de celui que l'on cherche, attendu qu'il existe, dans le système (S), des droites-coniques n'appartenant pas à l'autre système. Les droites-coniques du complexe du 1[er] ordre (C_1), défini par la condition simple que les coniques qui le composent coupent Σ en 4 points par où on peut mener une conique du complexe (C_2), contient, en effet, les droites-coniques de (C_2) ; mais, en outre, la corde de contact de toute conique C_2, bitangente à Σ, est une droite-conique de ce complexe. Ces cordes de contact enveloppent une ligne. Elles forment donc une série distincte de droites-coniques de 1[re] espèce du complexe du 1[er] ordre (C_1). On trouvera donc, d'après le théorème du chapitre précédent, la valeur totale de ces droites-coniques du système (S) ou (C_1,C_3), en multipliant $(2\rho-\sigma)$ par un nombre B, ne dépendant que du complexe (C_1).

Par suite, la valeur totale des droites-coniques communes aux deux systèmes est : $\omega = 2\mu - \nu - B(2\rho - \sigma)$. D'ailleurs, μ est le nombre total des couples de points correspondants confondus sur les deux indicatrices. Donc le nombre des coniques communes aux deux complexes est :

$$N(C_2,C_3) = \mu - \omega = (2B - m)\rho + (m - n - B)\sigma + n\tau = \gamma\rho + \delta\sigma + \varepsilon\tau,$$

ce qui démontre entièrement le théorème annoncé.

Il est facile de trouver la signification géométrique du nombre B. Prenons, pour le complexe (C_3), celui des coniques qui touchent une conique fixe aux deux points d'intersection de cette conique avec une droite mobile passant en un point fixe. On reconnaît aisément que les caractéristiques de ce complexe sont : $\rho = \sigma = \tau = 2$. On a donc : $N(C_2,C_3) = 2B$, c'est-à-dire que 2B est la classe de l'enveloppe des cordes de contact des coniques du complexe (C_2) bitangentes à une conique fixe.

Il est bon d'observer que, si le complexe (C_2) ne contient pas de droites-coniques de 3[me] espèce, c'est-à-dire couvrant le plan, le complexe (C_1) ne contient pas de droites-coniques de 2[me] espèce, et le nombre n ou ε est nul.

Si, de plus, le complexe (C_2) ne contient que des droites-coniques de 1[re] espèce, c'est-à-dire isolées, le nombre ω est nul. Dans ce cas, le nombre n étant nul aussi, on en conclut $m = B$, et le nombre $N(C_2,C_3)$ se réduit à $m\rho$, c'est-à-dire que ε et δ sont nuls.

On peut aisément obtenir les expressions des nombres B, m, n en fonction des nombres $N(C_2,3p)$, $N(C_2,2p,1d)$, $N(C_2,1p,2d)$, ... en supposant successivement que les complexes (C_3) sont $(3p)$, $(2p,1d)$, $(1p,2d)$, et en partant des relations :

$$N(5d) = N(5p) = 1, \quad N(4p,1d) = N(4d,1p) = 2, \quad N(3p,2d) = N(3d,2p) = 4.$$

On obtient ainsi :

$$N(C_2,3p) = m + 2n,$$
$$N(C_2,2p,1d) = 2m,$$
$$N(C_2,1p,2d) = 4B + 2n\cdot$$

d'où l'on peut déduire B, m, n. La 1[re] de ces relations exprime que $N(C_2, 3d)$ est égal à $N(C_1, 4p)$; il est aisé d'établir *a priori* cette relation ; je ne m'y arrêterai pas.

IV. — REPRÉSENTATION SYMBOLIQUE DES THÉORÈMES RELATIFS A LA DÉTERMINATION DES CONIQUES SUR LE PLAN.

Les caractéristiques d'un système plan de coniques, supposé indéterminé, étant μ, ν, M. Chasles a donné le nom de *module* d'une condition simple à l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$, où α et β sont des nombres relatifs à cette condition, et qui représente le nombre des coniques satisfaisant à cette condition et faisant partie du système $(\mu\ \nu)$.

Je remplace les lettres μ, ν par les lettres p, d, initiales des mots *point*, *droite*.

Le module d'un complexe (C_1), du 1[er] ordre, est donc la forme binaire du 1[er] degré $m_1 = \alpha p + \beta d$; et ce module jouit de la propriété que, si on y remplace p et d par $N(C_4, 1p)$, $N(C_4, 1d)$, (C_4) étant un système quelconque, on obtient, par cette substitution, le nombre $N(C_1, C_4)$.

De cette façon, un complexe (C_1) est caractérisé par les deux nombres α, β. On peut désirer d'exprimer ces nombres en fonction de ceux des coniques du complexe (C_1) qui satisfont à 4 conditions élémentaires.

Pour abréger, désignons par le symbole $p^i d^{4-i}$ le nombre des coniques d'un complexe (C_1), qui passent en i points et touchent $(4 - i)$ droites ; en d'autres termes, posons : $N(C_1, ip, (4 - i)d) = p^i d^{4-i}$. On obtient immédiatement les relations suivantes :

$$p^4 = \alpha + 2\beta, \quad p^3 d = 2\alpha + 4\beta, \quad p^2 d^2 = 4\alpha + 4\beta, \quad pd^3 = 4\alpha + 2\beta, \quad d^4 = 2\alpha + \beta,$$

d'où l'on conclut qu'il y a toujours, entre les 5 nombres représentés par les symboles $p^i d^{4-i}$, les 3 relations :

$$(1) \qquad p^3 d - 2p^4 = 0, \quad pd^3 - 2d^4 = 0, \quad 4p^4 + 4d^4 - 3p^2 d^2 = 0 ;$$

et que α et β s'expriment linéairement en fonction de ces nombres de la manière suivante :

$$\alpha = \frac{2d^4 - p^4}{3} + \lambda_1(p^3 d - 2p^4) + \lambda_2(pd_3 - 2d^4) + \lambda_3(4p^4 + 4d^4 - 3p^2 d^2),$$

$$\beta = \frac{2p^4 - d^4}{3} + \mu_1(p^3 d - 2p^4) + \mu_2(pd^3 - 2d^4) + \mu_3(4p^4 + 4d^4 - 3p^2 d^2),$$

les lettres λ et μ désignant des arbitraires.

Si l'on porte ces valeurs de α et β dans la relation

$$N(C_1, C_4) = \alpha N(C_4, 1p) + \beta N(C_4, 1d),$$

et qu'on y remplace ces deux nombres $N(C_4, 1p)$, $N(C_4, 1d)$ par A et B, on obtient :

$$(N(C_1, C_4 = \left[4u_3 - 2u_1 + \frac{2B - A}{3}\right]p^4 + u_1p^3d - 3u_3p^2d^2 + u_2pd^3 + \dots$$
$$+ \left[4u_3 - 2u_2 + \frac{2A - B}{3}\right]d^4,$$

où l'on a posé : $u_1 = \lambda_1 A + \mu_1 B$, $u_2 = \lambda_2 A + \mu_2 B$, $u_3 = \lambda_3 A + \mu_3 B$.

Cette expression contient trois arbitraires u_1, u_2, u_3, dont on peut disposer, par exemple, pour annuler 3 termes à volonté.

En y considérant p et d comme des variables, cette expression est une forme binaire du 4^{me} degré, que je nomme *le module du système* (C_4). On voit que ce module, dont les coefficients ne dépendent que du système C_4, jouit de cette propriété que si l'on y remplace chaque expression $p^i d^{4-i}$ par le nombre $N(C_1, ip, (4 - i)d)$, C_1 étant un complexe du 1er ordre quelconque, le résultat de cette substitution est le nombre $N(C_1, C_4)$.

Si l'on désigne par le symbole $p^i d^{5-i}$ le nombre des coniques qui passent en i points et touchent $5 - i$ droites, on obtient le nombre $N(C_4, 1p)$, en augmentant, dans le module m_4 de (C_4), tous les exposants de p d'une unité, c'est-à-dire en multipliant symboliquement m_4 par p. On a donc : $N(C_4, 1p) = pm_4$; et de même : $N(C_4, 1d) = dm_4$. Par suite, on a : $N(C_1, C_4) = \alpha pm_4 + \beta dm_4$, ou : $N(C_1, C_4) = m_1 m_4$, puisque le module m_1 de C_1 est $\alpha p + \beta d$.

Ainsi *le nombre des coniques communes à un système* (C_4) *et à un complexe* (C_1) *du* 1er *ordre est représenté par le produit des modules du système et du complexe, où l'on remplace chaque terme, tel que* $p^i d^{5-i}$, *par le nombre des coniques qui passent en i points et touchent* $5 - i$ *droites.*

Procédons d'une manière analogue sur le résultat fourni par le théorème de M. Cremona. Représentons par p_2, pd, d^2 les nombres $N(C_3, 2p)$, $N(C_3, 1p, 1d)$ et $N(C_3, 2d)$. On aura :

$$N(C_2, C_3) = \gamma p^2 + \delta pd + \varepsilon d^2,$$

où γ, δ, ε sont des coefficients ne dépendant que de (C_2). En considérant, dans l'expression du second membre, p et d comme des variables, on a une forme binaire du 2^{me} degré, que j'appelle *le module* m_2 *du complexe* (C_2). La propriété de ce module est exprimée par la relation :

$$N(C_2, C_3) = \gamma N(C_3, 2p) + \delta N(C_3, 1p, 1d) + \varepsilon N(C_3, 2d),$$

qui a lieu, quel que soit le complexe du 3^{me} ordre (C_3).

Soit maintenant représenté par $p^i d^{3-i}$ le nombre des coniques du complexe (C_2) qui passent en i points et touchent $(3 - i)$ droites. Si l'on veut exprimer γ, δ, ε par les nombres $p^i d^{5-i}$, on fera varier le complexe (C_3), et l'on obtiendra les relations :

$$\begin{aligned} p^3 &= \gamma + 2\delta + 4\varepsilon, \\ p^2 d &= 2\gamma + 4\delta + 4\varepsilon, \\ pd^2 &= 4\gamma + 4\delta + 2\varepsilon, \\ d^3 &= 4\gamma + 2\delta + \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où l'on conclura d'abord qu'il y a toujours, entre les nombres $p^i d^{5-i}$, la relation suivante :

$$U = 2p^3 - 3p^2 d + 3pd^2 - 2d^3 = 0. \tag{2}$$

On tirera de trois de ces relations les expressions de γ, δ, ε, que l'on pourra compléter en ajoutant à chacune d'elles un terme tel que λU, λ étant une arbitraire. Que l'on porte ces valeurs dans la relation :

$$N(C_2,C_3) = \gamma N(C_3,2p) + \delta N(C_3,1p,1d) + \varepsilon N(C_3,2d);$$

on obtiendra le nombre $N(C_2,C_3)$ sous la forme d'un polynôme homogène du 3^{me} degré en p, d, dont les coefficients contiennent une arbitraire, et ne dépendent que du complexe (C_3). Je nomme ce polynôme *le module m_3 du complexe* (C_3). Ce module jouit de la propriété analogue à celle des précédents.

En conservant les mêmes conventions que ci-dessus, on aura :

$$N(C_3,2p) = p^2 m_3, \quad N(C_3,1p,1d) = pdm_3, \quad N(C_3,2d) = d^2 m_3.$$

On en conclut :

$$N(C_2,C_3) = (\gamma p^2 + \delta pd + \varepsilon d^2) m_3 = m_2 m_3.$$

Ainsi *le nombre* $N(C_2,C_3)$ *est représenté par le produit des modules des deux complexes* (C_2), (C_3), *où l'on remplace, après la multiplication, chaque nombre $p^i d^{5-i}$ par le nombre des coniques qui passent en i points et touchent $5-i$ droites.*

On voit la complète analogie de cette proposition avec celle qui est relative au nombre $N(C_1,C_4)$. Mais, pour compléter cette théorie, il faut chercher quel est le module d'un complexe ou d'un système composé des coniques communes à deux complexes distincts. Soit m_i le module d'un complexe (C_i) d'ordre i, on aura, en général $N(C_i, jp, (5-i-j)d) = p^j d^{5-i-j} m_i$. On en conclut que, si $m_{i'}$ est le module d'un autre complexe $(C_{i'})$ dont l'ordre i' est inférieur à $5-i$, on a, en général :

$$N(C_i, C_{i'}, jp, (5-i-i'-j)d) = p^j d^{5-i-i'-j} m_i m_{i'}.$$

Et enfin si $m_{5-i-i'}$ est le module d'un complexe $(C_{5-i-i'})$, d'ordre $(5-i-i')$, on a :

$$N(C_i, C_{i'}, C_{5-i-i'}) = m_{5-i-i'} \times m_i m_{i'}.$$

On conclut donc de cette relation que le produit $m_i m_{i'}$ est le module du complexe $(C_i, C_{i'})$. On voit que cette proposition comprend, comme cas particulier, celles relatives au cas où la somme des deux nombres i et i' est égale à 5. Le module $m_i m_{i'}$ devient alors le nombre $N(C_i, C_{5-i})$.

On peût donc enfin résumer toutes les propositions ci-dessus de la manière suivante :

THÉORÈME I. — *Chaque condition, relative à des coniques sur un plan est caractérisée par une forme binaire, de degré égal à la multiplicité de cette condition. Cette forme est appelée* module *de la condition. Ce module jouit de la propriété suivante : si n est son degré, p et d les deux variables qui y entrent, et qu'on y remplace chaque terme tel que $p^i d^{n-i}$ par le nombre des coniques qui passent en i points, touchent $(n-i)$ droites et satisfont à une autre condition, dont la multiplicité est $(5-n)$; le résultat de cette substitution est le nombre des coniques qui satisfont à la fois à la condition proposée et à cette dernière.*

THÉORÈME II. — *Le module d'une condition composée est le produit des modules des conditions composantes.* En particulier, *le produit des modules de plusieurs conditions dont la somme des ordres de multiplicité est égale à 5, représente le nombre des coniques qui satisfont à ces conditions, si l'on y remplace chaque terme $p^i d^{5-i}$ par le nombre des coniques qui passent en i points et touchent $(5-i)$ droites.*

Je terminerai cette deuxième partie en appliquant ces deux derniers théorèmes à quelques exemples, dont j'emprunterai les données à M. Chasles (*Comptes rendus de l'Académie*, t. LIX, p. 345 et suiv.).

1° Soit le complexe (C_3) des *coniques qui touchent une conique fixe en un point fixe et en un point variable.* Le résultat, relatif à ce complexe, donné par M. Chasles (*loc. cit.*, p. 351), est le suivant : (C_2) étant un complexe du 2^me^ ordre, et μ', ν' les caractéristiques du système $(C_2, 2p)$; ν'' la 2^me^ caractéristique du système $(C_2, 1p, 1d)$, on a :

$$N(C_2, C_3) = \frac{1}{4}(2\mu' - \nu') + \frac{1}{2}\nu''.$$

Avec nos notations, ce résultat s'énonce de la manière suivante : Le module m_3 de (C_3) est : $m_3 = \frac{1}{4}(2p^3 - p^2 d) + \frac{1}{2} pd^2$.

2° Complexe (C_2) des coniques bitangentes à une conique fixe (*loc. cit.*, p. 352):

$$m_2 = \frac{1}{2}(2p^2 - pd) + d^2.$$

3° Complexe (C'_3) des coniques osculatrices à une conique fixe en un point fixe (p. 353) :

$$m'_3 = \frac{1}{4}(3p^2d - 2p^3) = \frac{1}{4}(3pd^2 - 2d^3) \text{ [en vertu de la relation (2)]}.$$

4° Complexe (C'_2) des coniques osculatrices à une conique fixe en un point variable (p. 354) :

$$m'_2 = 3pd.$$

5° Complexe (C''_3) des coniques surosculatrices à une conique fixe en un point variable (p. 356) :

$$m''_3 = \frac{1}{2}(2p^3 - p^2d) + d^2p.$$

Si l'on veut avoir les caractéristiques du système (C_2, C'_2) des coniques bitangentes à une conique fixe et osculatrice à une autre conique fixe, on formera le module $m_2m'_2$ de ce système ; et les deux caractéristiques seront : $pm_2m'_2$ et $dm_2m'_2$.

Le module $m_2m'_2$ est :

$$m_2m'_2 = 3pd\left[\frac{1}{2}(2p^2 - pd) + d^2\right] = 3p^3d - \frac{3}{2}p^2d^2 + 3pd^3 = 4(p^4 + d^4),$$

en vertu des relations (1). Les deux caractéristiques du système sont : $4(p^5 + d^4p)$ et $4(p^4d + d^5)$, ou 12.

On aura de même :

$$N(C_2, C_3) = m_2m_3 = \frac{1}{2}p\left(p^2 - \frac{1}{2}pd + d^2\right)^2 = p(p^4 + d^4) = 3,$$
$$N(C_2, C'_3) = m_2m'_3 = \frac{1}{4}\left(p^2 - \frac{1}{2}pd + d^2\right)(3p^2d - 2p^3) = \frac{1}{4}p^2d^2(3d - p) = 2,$$
$$N(C_2, C''_3) = m_2m''_3 = 2N(C_2, C_3) = 6,$$
$$N(C'_2, C_3) = m'_2m_3 = 6,$$
$$N(C'_2, C'_3) = m'_2m'_3 = 6,$$
$$N(C'_2, C''_3) = m'_2m''_3 = 12.$$