

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. HABICH

**Sur les rayons de courbure de deux courbes qui  
rencontrent les tangentes d'une troisième courbe  
sous des angles liés par une relation donnée**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 13 (1885), p. 201-204

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1885\\_\\_13\\_\\_201\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__201_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur les rayons de courbure de deux courbes qui rencontrent les tangentes d'une troisième courbe sous des angles liés par une relation donnée* <sup>(1)</sup>; par E. HABICH, Directeur de l'École des Mines de Lima.

(Séance du 6 mai 1885.)

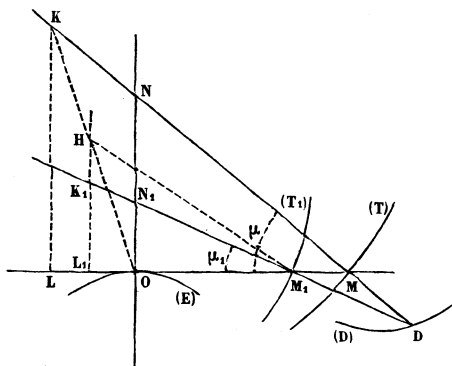
I. Soient (E) une courbe plane donnée et (T) et (T<sub>1</sub>) deux autres courbes qui rencontrent les tangentes de la première sous des angles dont les compléments  $\mu$  et  $\mu_1$  sont liés par l'équation

$$(1) \quad f(\mu, \mu_1) = 0;$$

$\mu$  et  $\mu_1$  sont évidemment les angles formés par les normales aux courbes (T) et (T<sub>1</sub>) avec les tangentes de la courbe (E). Nous appelons la ligne (E) *courbe de référence* et les lignes (T) et (T<sub>1</sub>) *transformées*, l'une de l'autre, par rapport à la courbe (E) et suivant le procédé défini par l'équation (1).

Si la *courbe de référence* (E) se réduit à un point, on rentre dans les coordonnées polaires.

Appelant  $ds$  l'arc élémentaire d'une courbe (T), correspondant



à l'angle  $d\theta$  des tangentes, tracées par ses extrémités à la courbe de référence (E);  $n = MN$  la longueur de la normale comprise

(<sup>1</sup>) Voir *Annali di Matematica*, t. II, p. 138; Milan, 1868, et *Études cinématiques*, p. 40; Paris, 1879.

entre M et le point N où elle rencontre la normale en O à la courbe (E);  $\rho$  et  $d\varepsilon$  le rayon de courbure et l'angle de contingence de la ligne (T); on a les relations connues

$$(2) \quad ds = n d\theta = \rho d\varepsilon,$$

$$(3) \quad d\theta = d\mu + d\varepsilon;$$

d'où

$$(4) \quad \frac{d\mu}{d\theta} = 1 - \frac{d\varepsilon}{d\theta} = 1 - \frac{n}{\rho} = \frac{\rho - n}{\rho}.$$

Différentiant l'équation (1), par rapport à l'angle polaire  $\theta$ ,

$$(5) \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial \mu_1} \frac{d\mu_1}{d\theta} = 0,$$

où

$$(6) \quad \frac{\partial f}{\partial \mu} : \frac{\partial f}{\partial \mu_1} = - \frac{d\mu_1}{d\mu} = -\lambda$$

et, combinant avec (4) et (5),

$$(7) \quad \frac{\rho - n}{\rho} - \lambda \frac{\rho_1 - n_1}{\rho_1} = 0.$$

Projetant en L et L<sub>1</sub> sur la droite MM<sub>1</sub>O les centres de courbure K et K<sub>1</sub>, on trouve

$$\frac{\rho - n}{\rho} = \frac{NK}{MK} = \frac{OL}{ML} \quad \text{et} \quad \frac{\rho_1 - n_1}{\rho_1} = \frac{N_1K_1}{M_1K_1} = \frac{OL_1}{M_1L_1},$$

et la relation (7) devient

$$\frac{OL}{ML} = \lambda \frac{OL_1}{M_1L_1}.$$

Traçant la droite KO, qui rencontre la perpendiculaire K<sub>1</sub>L<sub>1</sub> en H, on trouve

$$\frac{OL}{OL_1} = \frac{KL}{KL_1} = \lambda \frac{ML}{M_1L_1},$$

d'où

$$\frac{KL}{ML} = \lambda \frac{HL_1}{M_1L_1}$$

et, par suite,

$$\tan \mu = \lambda \tan \xi \quad (\xi = \angle HM_1O).$$

Au moyen de cette relation on peut déterminer le centre de

la courbure de la transformée (T), lorsqu'on connaît celui de (T) ou *vice versa*.

Cherchons maintenant la forme de la fonction des angles (1), pour le cas où les centres de courbure de deux lignes (T) et (T<sub>1</sub>) se trouvent sur une même droite passant par le pôle correspondant de transformation O.

Pour cela, il faut que les angles

$$L_1 M_1 H = K_1 M_1 L_1, \quad \xi = \mu,$$

et

$$\text{tang } \xi = \text{tang } \mu_1;$$

d'où

$$\text{tang } \mu = \pm \lambda \text{ tang } \mu_1.$$

Remplaçant  $\lambda$  par sa valeur (6), on aura

$$\frac{d\mu}{\text{tang } \mu} \mp \frac{d\mu_1}{\text{tang } \mu_1} = 0,$$

et, intégrant,

$$(8) \quad \sin \mu - c \sin \mu_1 = 0$$

et

$$(9) \quad \sin \mu \sin \mu_1 = c_1.$$

On satisfait à la condition demandée, de la correspondance des centres de courbure, des transformées (T) et (T<sub>1</sub>) par les relations (8) et (9) ou par une fonction quelconque (1) du rapport  $c$  ou du produit  $c_1$  des sinus des angles  $\mu$  et  $\mu_1$  ( $c_1 < \pm 1$ ).

Les cas de similitude et de l'inversion sont compris dans la relation (8) et correspondent au rapport  $c$  égal à  $+1$  et à  $-1$ .

I. *Application aux caustiques par réfraction.* — Considérons la courbe (D), lieu des intersections des normales aux points correspondants M et M<sub>1</sub> de deux transformées (T) et (T<sub>1</sub>); on a

$$MD : M_1 D = \sin \mu_1 : \sin \mu,$$

c'est-à-dire que le rapport des distances d'un point D de la ligne (D) aux deux courbes (T) et (T<sub>1</sub>) est égal à celui des sinus des angles que forment ces distances MD et M<sub>1</sub>D avec la droite qui réunit les points correspondants M et M<sub>1</sub>.

Il s'ensuit que, à une équation homogène entre les distances

MD et  $M_1D$  correspond une équation homogène entre les  $\sin \mu$  et  $\sin \mu_1$  et *vice versa*.

En particulier, si le rapport de deux distances MD et  $M_1D$  était constant, la ligne (D) serait la dirimante (la réfringente) des rayons lumineux incidents normaux à la courbe (T) et qui, après la réfraction, seraient normaux à la courbe ( $T_1$ ); — (T) et ( $T_1$ ) sont les anticaustiques des rayons incidents et des rayons réfractés et leurs développées les caustiques de ces mêmes rayons <sup>(1)</sup>.

Comme le cas considéré correspond à la fonction des angles ( $\delta$ ), on a ce théorème : *Que la droite qui réunit les points correspondants M et  $M_1$  de deux anticaustiques (T) et ( $T_1$ ) et la droite  $KK_1$  qui réunit leurs centres de courbure (points correspondants des caustiques) se rencontrent au point O, où la droite  $MM_1$  touche son enveloppe (E).*

---

<sup>(1)</sup> *Annali di Matematica*, p. 141-145; 1869.