

# BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HUMBERT

**Sur les surfaces homofocales du second ordre (suite et fin)**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 13 (1885), p. 89-95

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1885\\_\\_13\\_\\_89\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__89_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur les surfaces homofocales du second ordre;*

Par G. HUMBERT.

(SUITE ET FIN.)

(Séance du 18 février 1885.)

V.

Il nous reste maintenant à traiter la deuxième question que nous nous sommes posée :

*Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe représentée par des équations de la forme (1) ne soit pas de degré  $n$ .*

Dans le cas où cette courbe est de degré  $n$ , nous avons montré (§ III) :

1° Que les fonctions  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$  sont linéairement indépendantes.

2° Que les équations (5), déduites des équations fondamentales (4), ne sont pas en nombre supérieur à  $n - 1$ .

Si, au contraire, la courbe n'est pas de degré  $n$ , une de ces deux conditions n'est pas remplie.

Pour le faire voir, nous allons examiner successivement les deux cas, signalés au § III, où la courbe S est de degré inférieur à  $n$ .

Dans le premier de ces cas, les trois polynômes  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  ont  $k$  zéros communs : nous montrerons que les équations (5) sont alors en nombre égal à  $n + k - 1$ .

Dans le second cas, à un point de la courbe correspondent  $p$  valeurs de l'argument  $t$ ; nous montrerons que les fonctions  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$  sont liées par  $\frac{n}{p}(p - 1)$  relations linéaires et homogènes.

*Premier cas.* — Supposons d'abord que les polynômes  $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$  aient  $k$  zéros communs,  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ , que, pour simplifier le raisonnement, nous supposerons différents.

Considérons les équations fondamentales (4)

$$(4) \quad A_{44}f_4^2 + A_{45}f_4f_5 + \dots + A_{n+1,n+1}f_{n+1}^2 + \Phi_1f_4 + \dots = \Omega_1$$

et faisons-y  $t = \theta_1$  : les polynômes  $\Phi_1, \dots, \Omega_1, \dots$ , homogènes en  $f_1, f_2, f_3$  s'annulent, et il reste

$$A_{44}f_4^2(\theta_1) + A_{45}f_4(\theta_1)f_5(\theta_1) + \dots = 0$$

.....

On a des équations analogues en faisant  $t = \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_k$ .

Par conséquent, les  $\frac{n(n-1)}{2}$  équations linéaires et homogènes, à  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  inconnues,

$$(15) \quad \begin{cases} A_{44}x_{44} + A_{45}x_{45} + \dots + A_{n+1,n+1}x_{n+1,n+1} = 0, \\ B_{44}x_{44} + \dots = 0, \\ \dots \\ L_{44}x_{44} + \dots = 0 \end{cases}$$

sont vérifiées par les  $k$  systèmes de solutions

$$\frac{x_{44}}{f_4^2(\theta_1)} = \frac{x_{45}}{f_4(\theta_1)f_5(\theta_1)} = \dots,$$

.....

$$\frac{x_{44}}{f_4^2(\theta_k)} = \frac{x_{45}}{f_4(\theta_k)f_5(\theta_k)} = \dots$$

Je dis que ces  $k$  systèmes de solutions sont différents, ou, en d'autres termes, que les relations

$$\frac{f_4^2(\theta_1)}{f_4^2(\theta_2)} = \frac{f_4(\theta_1)f_5(\theta_1)}{f_4(\theta_2)f_5(\theta_2)} = \dots$$

sont impossibles.

Ces équations entraînent, en effet, les suivantes :

$$(16) \quad \frac{f_4(\theta_1)}{f_4(\theta_2)} = \frac{f_5(\theta_1)}{f_5(\theta_2)} = \dots$$

On a d'ailleurs, par hypothèse,

$$f_1(\theta_1) = f_2(\theta_1) = f_3(\theta_1) = 0,$$

$$f_1(\theta_2) = f_2(\theta_2) = f_3(\theta_2) = 0.$$

Tout polynôme de degré  $n$  en  $t$  est fonction linéaire des polynômes  $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots, f_{n+1}$  : si les relations (16) étaient vérifiées, on pourrait en conclure que tout polynôme de degré  $n$ , s'an-

nulant pour  $t = \theta_1$ , s'annule pour  $t = \theta_2$ , ce qui est impossible puisque  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont différents.

On voit de même que les quantités  $f_4(\theta_1), f_5(\theta_1), \dots, f_{n+1}(\theta_1)$  ne sont pas nulles à la fois.

Les équations (15) sont donc vérifiées par  $k$  systèmes différents de valeurs, non nulles simultanément, et par suite :

1° Les déterminants d'ordre  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  formés avec la matrice

$$(M) \quad \begin{vmatrix} A_{44} & A_{45} & \dots & A_{n+1, n+1} \\ B_{44} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{44} & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

sont nuls.

2° Il en est de même des déterminants obtenus en supprimant dans l'un quelconque des précédents  $i$  lignes et  $i$  colonnes quelconques ( $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ).

Il en résulte qu'en éliminant  $f_4^2, f_4, f_5, \dots, f_{n+1}^2$  entre les équations (4), on trouvera  $(n - k + 1)$  équations de la forme (5).

*Second cas.* — Supposons que, quel que soit  $t$ , on puisse trouver une valeur  $u$ , différente de  $t$ , telle que les équations

$$\frac{f_1(u)}{f_1(t)} = \frac{f_2(u)}{f_2(t)} = \frac{f_3(u)}{f_3(t)}$$

soient satisfaites.

En ce cas, comme on l'a dit, à un point de la courbe S correspondent plusieurs valeurs du paramètre  $t$  : soit  $p$  le nombre de ces valeurs, que nous désignerons respectivement par  $t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_{p-1}(t)$ .

Posons, pour simplifier,

$$X(t) = \frac{f_2(t)}{f_1(t)}, \quad Y(t) = \frac{f_3(t)}{f_1(t)}.$$

Par hypothèses les deux équations

$$X(u) = X(t), \quad Y(u) = Y(t)$$

sont satisfaites, quel que soit  $t$ , pour les  $p$  valeurs de  $u$  :

$$t, u_1(t), \dots, u_{p-1}(t).$$

Nous allons faire voir que dans ce cas la courbe décrite par

le point  $[f_1(t), f_2(t), f_3(t)]$  est unicursale et que son degré est  $\frac{n}{p}$ .

En effet, les zéros communs aux deux équations algébriques en  $u$  :  $X(u) = X(t)$ ,  $Y(u) = Y(t)$  satisfont à une équation algébrique de degré  $p$ , qui, mise sous forme entière, sera

$$(17) \quad M(t)u^p + N(t)u^{p-1} + \dots + S(t) = 0.$$

$M, N, \dots$  sont des polynômes entiers en  $t$ .

On a, par suite, identiquement,

$$(18) \quad \begin{cases} M(t)(u-t)[u-u_1(t)] \dots [u-u_{p-1}(t)] \\ = M(t)u^p + N(t)u^{p-1} + \dots + S(t). \end{cases}$$

Observons maintenant que les équations

$$X(u) = X(t), \quad Y(u) = Y(t)$$

ne changent pas si l'on y permute  $u$  et  $t$ ; en d'autres termes, l'équation (17) qui lie  $u$  et  $t$  aura pour racines, si l'on y considère  $t$  comme l'inconnue, les quantités  $u, u_1(u), u_2(u), \dots, u_{p-1}(u)$ .

On a ainsi,  $k$  étant un facteur constant,

$$M(t)u^p + N(t)u^{p-1} + \dots = k[M(u)t^p + N(u)t^{p-1} + \dots];$$

d'où, en tenant compte de (18), l'identité

$$(19) \quad M(t)(u-t)[u-u_1(t)] \dots = kM(u)(t-u)[t-u_1(u)] \dots$$

Remarquons en second lieu que la suite des quantités

$$u_i(t), u_1[u_i(t)], u_2[u_i(t)], \dots, u_{p-1}[u_i(t)],$$

où  $i$  est un des entiers  $1, 2, \dots, p-1$ , est, à l'ordre près, identique à la suite

$$t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_{p-1}(t).$$

On a en effet

$$X[u_i(t)] = X(t),$$

$$Y[u_i(t)] = Y(t),$$

et par suite les quantités qui vérifient les relations

$$X(u) = X(t), \quad Y(u) = Y(t)$$

sont identiques à celles qui vérifient les relations

$$X(u) = X[u_i(t)], \quad Y(u) = Y[u_i(t)],$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

Posons maintenant,  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux constantes,

$$Z(t) = \frac{(t - \alpha)[t - u_1(\alpha)] \dots [t - u_{p-1}(\alpha)]}{(t - \beta)[t - u_1(\beta)] \dots [t - u_{p-1}(\beta)]}.$$

On a

$$Z[u_i(t)] = \frac{[u_i(t) - \alpha][u_i(t) - u_1(\alpha)] \dots}{[u_i(t) - \beta][u_i(t) - u_1(\beta)]} \dots$$

Or l'équation (19) donne, si l'on y fait  $u = u_i(t)$  et  $t = \alpha$ ,

$$\begin{aligned} M(\alpha)[u_i(t) - \alpha][u_i(t) - u_1(\alpha)] \dots \\ = k M_1[u_i(t)][\alpha - u_i(t)] \{ \alpha - u_1[u_i(t)] \} \dots \end{aligned}$$

Le second membre est égal, d'après la remarque précédente, à

$$k M_1[u_i(t)](\alpha - t)[\alpha - u_1(t)] \dots [\alpha - u_{p-1}(t)].$$

On a une relation analogue en  $\beta$ , et l'on en conclut, par division,

$$Z[u_i(t)] = \frac{M(\beta)}{M(\alpha)} \frac{(\alpha - t)[\alpha - u_1(t)][\alpha - u_2(t)] \dots}{(\beta - t)[\beta - u_1(t)]} \dots$$

Si maintenant on fait, dans l'identité (19),  $u = \alpha$ , on a

$$M(t)(\alpha - t)[\alpha - u_1(t)] \dots = k M(\alpha)(t - \alpha)[t - u_1(\alpha)] \dots;$$

de même

$$M(t)(\beta - t)[\beta - u_1(t)] \dots = k M(\beta)(t - \beta)[t - u_1(\beta)] \dots$$

et, par suite,

$$Z[u_i(t)] = Z(t).$$

Il en résulte que les quantités  $t, u_1(t), \dots, u_{p-1}(t)$  sont les racines d'une équation algébrique en  $u$ , de degré  $p$ , de la forme

$$(20) \quad Z(u) = Z(t).$$

Cela posé, remarquons que les fonctions rationnelles de  $t$ ,  $X(t)$  et  $Z(t)$  sont liées par une relation algébrique; si l'on se donne  $Z(t)$ , on a, pour  $t, p$  valeurs correspondantes, satisfaisant à une relation de la forme

$$Z(t) = \lambda \quad \text{ou} \quad Z(t) = Z(\theta).$$

Ces  $p$  valeurs sont donc  $\theta, u_1(\theta), u_2(\theta), \dots, u_{p-1}(\theta)$  et, en vertu des relations

$$X[u_i(\theta)] = X(\theta),$$

il ne correspond à ces  $p$  valeurs qu'une valeur de  $X$ . En d'autres termes,  $X(t)$  est fonction rationnelle de  $Z(t)$ . On verrait aisément que le degré de cette fonction est  $\frac{n}{p}$ .

On a des conclusions identiques pour  $Y(t)$ . Il en résulte que le point  $(f_1, f_2, f_3)$  décrit une courbe unicursale de degré  $\frac{n}{p}$ . Ce nombre est évidemment un entier; posons  $\frac{n}{p} = m$ .

Cherchons maintenant ce que représentent les courbes  $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0, \dots, \Delta_{p-1} = 0$ , dont nous avons appris à former l'équation au § II.

D'après ce qui a été démontré dans ce paragraphe, ces courbes ont un point multiple d'ordre  $p - 1$  en tout point multiple d'ordre  $p$  de  $S$ , ou plutôt, ainsi que cela résulte de la démonstration même, en tout point de  $S$  auquel correspondent  $p$  arguments.

Or ici, à tous les points de  $S$  correspondent  $p$  arguments de la forme

$$t, u_1(t), u_2(t), \dots, u_{p-1}(t);$$

les courbes  $\Delta$  ont donc un point multiple d'ordre  $p - 1$  en chacun de ces points.

On aura donc, en désignant par  $\sigma = 0$  l'équation de la courbe de degré  $m$  décrite par le point  $(f_1, f_2, f_3)$ ,

$$(21) \quad \Delta_i = \sigma^{p-1} \delta_i \quad (i = 1, 2, \dots, p-1),$$

$\delta_i$  désignant un polynôme d'ordre  $n - 2 - m(p - 1)$ , c'est-à-dire d'ordre  $m - 2$ , en  $x_1, x_2, x_3$ .

La courbe unicursale  $\sigma$  a  $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$  points doubles, à chacun desquels correspondent  $2p$  valeurs de l'argument de la forme

$$t, u_1(t), \dots, u_{p-1}(t), \\ t', u_1(t'), \dots, u_{p-1}(t').$$

Les courbes  $\Delta$  doivent avoir en ces points un point multiple d'ordre  $2p - 1$ , et par suite ces points, en vertu des identités (21),

sont des points simples des courbes représentées par les équations  $\delta_i = 0$ .

Les courbes  $\delta_i$  sont donc des courbes de degré  $m - 2$ , adjointes à la courbe unicursale  $\sigma$ , de degré  $m$ ; or, pour une telle courbe, l'équation générale des courbes adjointes de degré  $m - 2$  est de la forme

$$0 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \dots + \alpha_{m-1} \rho_{m-1},$$

$\alpha_1, \dots$  étant des constantes et les courbes  $\rho_i = 0$  des courbes adjointes de degré  $m - 2$ . On en conclut que les polynômes  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}$  sont liés par  $n - 1 - (m - 1)$ , c'est-à-dire  $n - m$  relations linéaires et homogènes, et, en vertu des identités (21), les mêmes relations subsistent entre les polynômes  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ .

C'est là précisément le résultat que nous avons énoncé, et qu'il s'agissait de démontrer.

Ainsi :

*Pour que la courbe représentée par les équations (1) soit de degré  $n$ , il faut et il suffit :*

1° *Que les équations (5), obtenues en éliminant entre les équations (4) les quantités  $f_4^2, f_4 f_5, \dots, f_{n+1}^2$ , ne soient pas en nombre supérieur à  $n - 1$ .*

Cette condition s'exprime en écrivant que les déterminants d'ordre  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  formés avec la matrice (M) ne sont pas nuls à la fois.

2° *Que les fonctions  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ , formées comme on l'a dit au § II, à l'aide des équations (5), soient linéairement indépendantes.*