

# BULLETIN DE LA S. M. F.

P. APPELL

**Sur une méthode élémentaire pour obtenir  
les développements en série trigonométrique  
des fonctions elliptiques**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 13 (1885), p. 13-18

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1885\\_\\_13\\_\\_13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1885__13__13_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1885, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

---

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

---

*Sur une méthode élémentaire pour obtenir les développements en série trigonométrique des fonctions elliptiques; par*  
M. P. APPELL.

( Séance du 6 décembre 1884. )

D'après les notations de Jacobi, on a

$$\theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{nx} q^{n^2},$$

$$\theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{nx} q^{n^2};$$

ces deux fonctions étant impaires, on a, en posant

$$(1) \quad \frac{\theta_1\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)}{\theta\left(\frac{Kx}{\pi i}\right)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{nx},$$

$$(2) \quad A_{-n} = A_n.$$

Voici comment on peut déterminer les coefficients  $A_n$ . En

chassant le dénominateur, on déduit de l'équation (1) la suivante :

$$(3) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{nx} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{nx} \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{nx}.$$

Si l'on effectue le produit de deux séries du second membre, on doit obtenir une série identique au premier membre. En égalant les coefficients de  $e^{nx}$ , on obtient ainsi l'équation

$$q^{n^2} = \sum (-1)^v q^{v^2} A_\mu,$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières de  $\mu$  et  $v$  dont la somme est  $n$

$$\mu + v = n;$$

faisant donc

$$v = n - \mu,$$

on a

$$q^{n^2} = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (-1)^{n-\mu} q^{n^2-2\mu n+\mu^2} A_\mu;$$

d'où, en simplifiant,

$$(4) \quad (-1)^n = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2-2\mu n} A_\mu;$$

en vertu de la relation (2), cette équation peut s'écrire

$$(5) \quad (-1)^n = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=+\infty} (-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu (q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}).$$

En faisant successivement

$$n = 0, 1, 2, \dots,$$

on a ainsi une suite infinie d'équations que doivent vérifier les coefficients

$$A_0, A_1, A_2, \dots$$

On en tirera ces coefficients comme il suit.

Considérons les équations du premier degré, déduites de l'équation

$$(6) \quad (-1)^n = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\mu=m} (-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu (q^{2n\mu} + q^{-2n\mu}),$$

en y faisant successivement

$$n = 0, 1, 2, \dots, m;$$



où P est une constante numérique et où le produit II est étendu à toutes les différences des quantités

$$\cos a, \cos b, \dots, \cos l,$$

prises deux à deux.

D'après cela, la valeur de A, tirée des équations (8), est

$$A = \frac{\Delta(\lambda, b, c, \dots, l)}{\Delta(a, b, c, \dots, l)},$$

c'est-à-dire

$$(9) \quad A = \frac{(\cos \lambda - \cos b)(\cos \lambda - \cos c) \dots (\cos \lambda - \cos l)}{(\cos a - \cos b)(\cos a - \cos c) \dots (\cos a - \cos l)};$$

en faisant une permutation de lettres, on déduira de là les valeurs de B, C, ..., L.

Remarquons maintenant que les équations (8) se réduisent à (7), si l'on fait, dans (8),

$$A = A_0, \quad B = -2A_1q, \quad C = 2A_2q^2, \quad \dots, \quad L = (-1)^m A_m q^{m^2}, \\ \lambda = \pi, \quad a = 0, \quad b = \omega, \quad c = 2\omega, \quad \dots, \quad l = m\omega.$$

On aura donc le coefficient  $A_0$ , en faisant ces substitutions dans la formule (9), ce qui donne

$$(10) \quad A_0 = \frac{(1 + \cos \omega)(1 + \cos 2\omega) \dots (1 + \cos m\omega)}{(-1 + \cos \omega)(-1 + \cos 2\omega) \dots (-1 + \cos m\omega)},$$

puis faisant croître  $m$  indéfiniment. D'une façon générale, on aura le coefficient

$$(-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu,$$

en faisant, dans (9),

$$\lambda = \pi, \quad a = \mu\omega,$$

$b, c, \dots, l$  ayant les valeurs

$$0, \omega, 2\omega, \dots, (\mu-1)\omega, (\mu+1)\omega, \dots, m\omega.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned} & 2(-1)^\mu q^{\mu^2} A_\mu \\ &= \frac{2(1 + \cos \omega)(1 + \cos 2\omega) \dots [1 + \cos(\mu-1)\omega][1 + \cos(\mu+1)\omega] \dots (1 + \cos m\omega)}{(1 - \cos \mu\omega)(\cos \omega - \cos \mu\omega) \dots [\cos(\mu-1)\omega - \cos \mu\omega][\cos(\mu+1)\omega - \cos \mu\omega] \dots (\cos m\omega - \cos \mu\omega)}. \end{aligned}$$

Changeons les signes des  $\mu$  premiers facteurs du dénominateur, ce qui revient à multiplier les deux membres par  $(-1)^\mu$ , on peut

écrire

$$(11) \quad q^{\mu^2} A_{\mu} = \frac{1}{(\cos \mu \omega - 1)} \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{\cos \nu \omega + 1}{\cos \mu \omega - \cos \nu \omega} \prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} \frac{\cos \nu \omega + 1}{\cos \nu \omega - \cos \mu \omega}.$$

Ces deux produits qui figurent dans cette expression se transforment ainsi qu'il suit. On a identiquement

$$\begin{aligned} \frac{\cos \nu \omega + 1}{\cos \mu \omega - \cos \nu \omega} &= \frac{q^{2\nu} + q^{-2\nu} + 2}{q^{2\mu} + q^{-2\mu} - q^{2\nu} - q^{-2\nu}} \\ &= q^{2\mu-2\nu} \frac{(1 + q^{2\nu})^2}{(1 - q^{2\mu+2\nu})(1 - q^{2\mu-2\nu})}; \end{aligned}$$

d'après cela, on a

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{\cos \nu \omega + 1}{\cos \mu \omega - \cos \nu \omega} = q^{\mu(\mu-1)} \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{(1 + q^{2\nu})^2}{(1 - q^{2\mu+2\nu})(1 - q^{2\mu-2\nu})};$$

et, si l'on remarque que  $\nu$ , variant de 1 à  $\mu - 1$ , la différence  $\mu - \nu$  varie également de 1 à  $\mu - 1$ , et la somme  $\mu + \nu$  de  $\mu + 1$  à  $2\mu - 1$ , on peut écrire

$$\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} \frac{\cos \nu \omega + 1}{\cos \mu \omega - \cos \nu \omega} = q^{\mu(\mu-1)} (1 - q^{2\mu}) \frac{\prod_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} (1 + q^{2\nu})^2}{\prod_{\nu=2\mu-1}^{\nu=2\mu-1} (1 - q^{2\nu})}.$$

De même, le second produit peut s'écrire, en vertu de l'identité

$$\begin{aligned} \frac{\cos \nu \omega + 1}{\cos \nu \omega - \cos \mu \omega} &= \frac{(1 + q^{2\nu})^2}{(1 - q^{2\nu-2\mu})(1 - q^{2\nu+2\mu})}, \\ \prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} \frac{\cos \nu \omega + 1}{\cos \nu \omega - \cos \mu \omega} &= \frac{\prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} (1 + q^{2\nu})^2}{\prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} (1 - q^{2\nu-2\mu})(1 - q^{2\nu+2\mu})}; \end{aligned}$$

et, si l'on remarque qu'au dénominateur la différence  $(\nu - \mu)$  varie de 1 à  $(m - \mu)$ , et la somme  $(\nu + \mu)$  de  $(2\mu + 1)$  à  $(m + \mu)$ , on peut écrire

$$\prod_{\nu=\mu+1}^{\nu=m} \frac{\cos \nu \omega + 1}{\cos \nu \omega - \cos \mu \omega} = \frac{1 - q^{4\mu}}{(1 + q^{2\mu})^2} \frac{\prod_{\nu=\mu}^{\nu=m} (1 + q^{2\nu})^2}{\prod_{\nu=1}^{\nu=m-\mu} (1 - q^{2\nu}) \prod_{\nu=2\mu}^{\nu=m+\mu} (1 - q^{2\nu})};$$

remplaçant, dans l'expression (11), en remarquant que

$$\frac{1 - q^{4\mu}}{(1 + q^{2\mu})^2} = \frac{1 - q^{2\mu}}{1 + q^{2\mu}}$$

et que

$$\frac{1}{1 - \cos \mu \omega} = - \frac{2q^{2\mu}}{(1 - q^{2\mu})^2},$$

on a enfin

$$A_\mu = \frac{2q^\mu}{1 + q^{2\mu}} \frac{\prod_{\nu=1}^{\nu=m} (1 + q^{2\nu})}{\prod_{\nu=1}^{\nu=m-\mu} (1 - q^{2\nu}) \prod_{\nu=m+\mu}^{\nu=m+\mu} (1 - q^{2\nu})}.$$

Telle est la valeur que l'on tire pour  $A_\mu$  des  $(m - 1)$  équations (7); pour avoir le coefficient  $A_\mu$  du développement cherché, il faut faire croître  $m$  indéfiniment. On a donc, en posant

$$Q = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(1 + q^{2\nu})^2}{(1 - q^{2\nu})^2},$$

$$A_\mu = \frac{2q^\mu}{1 + q^{2\mu}} Q;$$

d'ailleurs l'expression (10) de  $A_0$  donne immédiatement  $A_0 = Q$ . On obtient ainsi le développement bien connu

$$\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} = Q \left( 1 + 4 \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu}{1 + q^{2\mu}} \cos \frac{\mu\pi z}{K} \right).$$

D'après les formules indiquées dans le *Traité des Fonctions elliptiques* de MM. Briot et Bouquet (p. 479), on a

$$\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)} = \frac{\pi}{2gK} \sqrt{\frac{1}{k'}} \left( 1 + 4 \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{q^\mu}{1 + q^{2\mu}} \cos \frac{\mu\pi z}{K} \right).$$

La comparaison entre ce développement et celui que nous venons d'établir donne

$$\frac{\pi}{2gK} \sqrt{\frac{1}{k'}} = Q,$$

ce qui est d'accord avec des formules bien connues, dues à Jacobi.