

BULLETIN DE LA S. M. F.

TCHEBICHEFF

**Sur les fractions algébriques qui représentent
approximativement la racine carrée d'une variable,
comprise entre les limites données**

Bulletin de la S. M. F., tome 12 (1884), p. 167-168

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__167_1

© Bulletin de la S. M. F., 1884, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur les fractions algébriques qui représentent approximativement la racine carrée d'une variable, comprise entre les limites données; par M. TCHEBICHEFF.

(Séance du 21 novembre 1884.)

Quand on cherche parmi toutes les fractions de la forme

$$\frac{f(x)}{F(x)},$$

$f(x)$, $F(x)$ n'étant pas d'un degré supérieur à n , celle dont le logarithme, depuis $x = \frac{1}{a} < 1$ jusqu'à $x = a > 1$, s'écarte le moins du logarithme de \sqrt{x} , on trouve une fraction qui peut être

présentée de la manière suivante :

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{x^m \varphi\left(\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right) \varphi\left(-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)}{\varphi(\sqrt{1-ax}) \varphi(-\sqrt{1-ax})},$$

où $\varphi(x)$ est une fonction d'un degré m , qui, à un facteur constant près (tout à fait arbitraire), peut être déterminée à l'aide de cette équation

$$x^m \frac{\left(1 + \sqrt{\frac{x-a}{x}}\right) \varphi^2\left(\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right) + \left(1 - \sqrt{\frac{x-a}{x}}\right) \varphi^2\left(-\sqrt{\frac{x-a}{x}}\right)}{\varphi(\sqrt{1-ax}) \varphi(-\sqrt{1-ax})} = \text{const.}$$

Ainsi, en prenant $m = 1$, on trouve, pour l'expression approximative de \sqrt{x} entre $x = \frac{1}{a}$, $x = a$, la fraction

$$\frac{kx + 1}{x + k},$$

où k est une constante dont la valeur est donnée par l'équation

$$k^4 - 6k^2 - 4\left(a + \frac{1}{a}\right)k - 3 = 0$$

et d'où, en posant

$$x = \frac{Z}{\sqrt{AB}}, \quad a = \sqrt{\frac{A}{B}},$$

on tire, pour l'expression approximative de \sqrt{Z} entre $Z = A$, $Z = B$, cette formule

$$\sqrt[4]{AB} \frac{kZ + \sqrt{AB}}{Z + k\sqrt{AB}}.$$
