

Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ZÉRO-CYCLES DE DEGRÉ 1 SUR LES SOLIDES DE POONEN

Jean-Louis Colliot-Thélène

**Tome 138
Fascicule 2**

2010

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 249-257

ZÉRO-CYCLES DE DEGRÉ 1 SUR LES SOLIDES DE POONEN

PAR JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

RÉSUMÉ. — B. Poonen a récemment exhibé des exemples de variétés projectives et lisses de dimension 3 sur un corps de nombres qui n'ont pas de point rationnel et pour lesquelles il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin après revêtement fini étale. Je montre que les variétés qu'il construit possèdent des zéro-cycles de degré 1.

ABSTRACT (*Zero-cycles of degree 1 on Poonen threefolds*). — B. Poonen recently produced smooth threefolds over a number field which do not have a rational point but have no Brauer–Manin obstruction even after descent to a finite étale cover. I show that the varieties he produces have zero-cycles of degree 1.

Introduction

Soit k un corps de nombres. Dans son article [10], B. Poonen construit des exemples de variétés projectives et lisses de dimension 3 sur k qui ont les propriétés suivantes : elles ont des points dans tous les complétés de k , il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin à l'existence d'un point rationnel, mieux, il n'y a pas d'obstruction de Brauer–Manin après descente par revêtements finis étales, et cependant les variétés ne possèdent pas de point k -rationnel. C. Demarche [5] vient de montrer que ceci implique qu'aucune obstruction de

Texte reçu le 22 septembre 2008, révisé le 16 février 2009 et accepté le 26 mai 2009

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE, C.N.R.S., UMR 8628, Mathématiques, Bâtiment 425, Université Paris-Sud, F-91405 Orsay, France • *E-mail* : jlct@math.u-psud.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 14G05, 14G25, 11G35 ; 14J20, 14F22.

Mots clefs. — Points rationnels, zéro-cycles, principe de Hasse, obstruction de Brauer–Manin.

descente sous un groupe algébrique ne saurait rendre compte de l'inexistence de point rationnel. La situation est donc tout à fait différente de celle de l'exemple historique de Skorobogatov ([12], [9]).

Dans [3] j'ai conjecturé que pour toute variété projective, lisse, géométriquement connexe sur un corps de nombres, l'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un zéro-cycle de degré 1 est la seule obstruction.

Je montre ici que la conjecture vaut pour les variétés construites par Poonen : elles ont toutes un zéro-cycle de degré 1. La question reste entière pour l'exemple de Skorobogatov.

Au paragraphe 1 je rappelle brièvement la construction des variétés. Au paragraphe 2 je donne une démonstration alternative du calcul du groupe de Brauer de ces variétés. Le résultat de ce calcul permet de montrer ([10]) qu'il n'y a pas d'obstruction de Brauer-Manin à l'existence d'un point rationnel, et *a fortiori* pas d'obstruction de Brauer-Manin à l'existence de zéro-cycles de degré 1. Au paragraphe 3, logiquement indépendant du précédent, j'établis l'existence de zéro-cycles de degré 1. La méthode utilisée dans ce paragraphe est une variante pour les zéro-cycles d'une méthode connue dans le cas des points rationnels (voir les remarques 3.2 et 3.3 ci-dessous).

Cet article a été conçu à l'occasion d'exposés donnés en avril 2008 à l'université Emory (Atlanta, Géorgie).

1. Les variétés

Soit k un corps de caractéristique nulle. Les variétés considérées dans [10] s'insèrent dans le diagramme suivant, que nous allons détailler.

$$\begin{array}{ccc} X & \rightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ C \times \mathbb{P}^1 & \rightarrow & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \rightarrow & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

Dans ce diagramme, toutes les variétés sont des k -variétés projectives, lisses, géométriquement connexes. La variété C est une courbe de genre quelconque. Dans [10], les courbes C utilisées n'ont qu'un nombre fini de points rationnels, nous ne faisons pas cette restriction ici.

Les flèches verticales inférieures sont données par la projection sur le premier facteur. La variété V est de dimension 3, elle est fibrée en coniques sur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Le lieu de dégénérescence de cette fibration (le lieu où la conique fibre est singulière) est une k -courbe projective, lisse, *géométriquement intègre*

$Z_1 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. La projection sur le premier facteur $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ induit un revêtement ramifié $Z_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, le lieu de ramification dans \mathbb{P}^1 ne contient pas le point $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$.

Le morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un revêtement ramifié, son lieu de ramification dans \mathbb{P}^1 ne rencontre pas le lieu de ramification de $Z_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$.

La partie verticale gauche du diagramme est obtenue par rétrotirette à partir de la partie verticale droite (produits fibrés via le morphisme $C \rightarrow \mathbb{P}^1$).

Pour tout point schématique $w \in \mathbb{P}^1$, de corps résiduel $k(w)$, la fibre V_w est une surface géométriquement intègre sur $k(w)$ qui contient un ouvert affine d'équation

$$y^2 - az^2 = P_w(x)$$

avec $a \in k \setminus k^2$ et $P_w(x) \in k(w)[x]$ un polynôme non nul, de degré 4 en la variable x , séparable pour w non dans le lieu de ramification de $Z_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$. Sur un ouvert convenable de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, Z_1 est défini par l'équation $P_w(x) = 0$, la projection $Z_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ étant donnée par $(w, x) \mapsto w$.

Le lieu de dégénérescence de la fibration en coniques $X \rightarrow C \times \mathbb{P}^1$ est l'image inverse Z de Z_1 par $C \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Le polynôme $P_w(x)$ est choisi tel que que $Z \subset C \times \mathbb{P}^1$ est une k -courbe projective, lisse, *géométriquement intègre* ([10], Lemma 7.1).

Par ailleurs la description des fibres de l'application composée $V \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ (première projection) montre que l'on a :

PROPOSITION 1.1. — *Sous les hypothèses faites ci-dessus, pour tout point schématique P de C , la fibre $X_P/k(P)$ du morphisme $X \rightarrow C$ au point P est une $k(P)$ -variété géométriquement intègre.*

D'après [4, I, p. 43], [11, p. 208-209], [1, §3.2]), ceci a le corollaire suivant, qui sera utilisé au paragraphe 3.

COROLLAIRE 1.2. — *Soient k un corps de nombres et $X \rightarrow C$ comme ci-dessus. Il existe un ensemble fini S de places de k tel que, pour toute extension finie L de k et toute place w de L non située au-dessus d'une place de S , l'application $X(L_w) \rightarrow C(L_w)$ induite par $X \rightarrow C$ sur les points de X à valeurs dans le complété L_w soit surjective.*

2. Leur groupe de Brauer

Le résultat suivant est établi dans [10] au moyen d'une étude de l'action du groupe de Galois sur le groupe de Picard géométrique de X . Nous proposons une démonstration un peu plus courte. La différence entre la démonstration de [10] et la présente démonstration est essentiellement la même que celle entre les propositions 7.1.1 et 7.1.2 de [13].

PROPOSITION 2.1. — *Sous les hypothèses ci-dessus, la flèche naturelle de groupes de Brauer $\mathrm{Br} C \rightarrow \mathrm{Br} X$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Notons $B = C \times \mathbb{P}^1$. La fibration en coniques $X \rightarrow B$ est dégénérée en un seul point de codimension 1 de B , correspondant à la courbe géométriquement intègre Z .

Soit η le point générique de B et X_η la fibre générique de $X \rightarrow B$. C'est une conique lisse.

De façon générale, étant donné un k -morphisme plat $X \rightarrow B$ de k -variétés lisses géométriquement intègres, on dispose d'un diagramme commutatif de suites exactes de groupes de cohomologie étale :

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow \mathrm{Br} B \rightarrow \mathrm{Br} k(B) & \xrightarrow{\oplus_b \partial_b} & \bigoplus_{b \in B^{(1)}} H^1(k(b), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow e_{x/b} \cdot \mathrm{Res}_{k(b)/k(x)} \\ 0 \rightarrow \mathrm{Br} X \rightarrow \mathrm{Br} X_\eta & \xrightarrow{\oplus_x \partial_x} & \bigoplus_{x \in B^{(1)}} \bigoplus_{x \in X^{(1)}, x \rightarrow b} H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}). \end{array}$$

Dans ce diagramme, b parcourt les points de codimension 1 de B , et x parcourt les points de codimension 1 de X qui ne sont pas situés sur X_η . Pour $x \in X$ d'image $b \in B$, on a l'inclusion des corps résiduels $k(b) \subset k(x)$. L'entier $e_{x/b}$ est l'indice de ramification de l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{X,x}$ sur l'anneau de valuation discrète $\mathcal{O}_{B,b}$, c'est-à-dire la valuation dans $\mathcal{O}_{X,x}$ de l'image d'une uniformisante de $\mathcal{O}_{B,b}$ par l'inclusion $\mathcal{O}_{B,b} \subset \mathcal{O}_{X,x}$. Les flèches ∂ sont les flèches de résidu.

On peut extraire un tel diagramme des exposés de Grothendieck sur le groupe de Brauer ([7], voir GB II, Cor. 1.10, GB III, Prop. 2.1, GB III, Thm. 6.1). Pour plus de détails, voir par exemple [2, §3] et [6, Chapter 6]. La démonstration combine les suites de localisation, leur fonctorialité et le théorème de pureté pour le groupe de Brauer.

Dans la présente situation, la fibre générique est une conique sur $k(B)$. Soit $\beta \in \mathrm{Br} k(B)$ la classe de l'algèbre de quaternions associée à cette conique. Cette classe β est non triviale, elle admet un unique résidu non trivial, au point générique de Z , et la classe correspondante est la classe de $a \in k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2) \subset H^1(k(Z), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Pour la conique X_η sur $k(B)$ sans point rationnel, on dispose de la suite exacte classique (cf. [12] p. 138)

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathrm{Br} k(B) \rightarrow \mathrm{Br} X_\eta \rightarrow 0,$$

où la flèche $\mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathrm{Br} k(B)$ envoie 1 sur la classe β . Le diagramme ci-dessus montre alors que l'application $\mathrm{Br} B \rightarrow \mathrm{Br} X$ est injective.

Soit $\alpha \in \mathrm{Br} X$. L'image de α dans $\mathrm{Br} X_\eta$ est l'image d'un élément $\gamma \in \mathrm{Br} k(B)$, défini à addition près de β .

Le lieu de dégénérescence de $X \rightarrow B$ est réduit à l'unique courbe $Z \subset B$. Ceci implique que pour $b \in B^{(1)}$ différent du point générique de Z , et x l'unique point de $X^{(1)}$ au-dessus de b , qui définit une conique lisse donc géométriquement intègre sur le corps $k(b)$, la flèche $e_{x/b} \cdot \text{Res}_{k(b)/k(x)} = \text{Res}_{k(b)/k(x)} : H^1(k(b), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(k(x), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est une injection. Quant à la flèche $e_{x/b} \cdot \text{Res}_{k(b)/k(x)} = \text{Res}_{k(b)/k(x)}$ associée au point générique b de Z et à l'unique x au-dessus de ce point, son noyau est le noyau de la flèche de restriction $H^1(k(Z), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(k(Z)(\sqrt{a}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Ce noyau est d'ordre 2, engendré par la classe de a dans $k^*/k^{*2} = H^1(k, \mathbb{Z}/2)$.

Du diagramme ci-dessus on conclut que les résidus de γ aux points autres que le point générique de Z sont nuls, et qu'au point générique de Z le résidu est soit trivial soit égal au résidu de β . Quitte à remplacer éventuellement γ par $\gamma + \beta$, ce qui est loisible, on voit que $\gamma \in \text{Br } k(B)$ est dans l'image de $\text{Br } B$. Comme l'application $\text{Br } X \rightarrow \text{Br } X_\eta$ est injective, ceci achève de montrer que l'application $\text{Br } B \rightarrow \text{Br } X$ est un isomorphisme.

L'inclusion du point générique de C dans C définit un diagramme commutatif de morphismes de schémas réguliers intègres

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{k(C)}^1 & \rightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k(C) & \rightarrow & C, \end{array}$$

où la donnée d'un k -point de \mathbb{P}_k^1 induit des sections compatibles des flèches verticales. Ce diagramme induit un diagramme commutatif d'inclusions de groupes de Brauer

$$\begin{array}{ccc} \text{Br } B \subset \text{Br } \mathbb{P}_{k(C)}^1 & & \\ \uparrow & & \uparrow \\ \text{Br } C \subset \text{Br } k(C) & & \end{array}$$

pour lequel la donnée d'un k -point de \mathbb{P}_k^1 induit des rétractions compatibles des flèches verticales. Le groupe de Brauer de la droite projective sur un corps est égal à l'image du groupe de Brauer de ce corps. On voit ainsi que $\text{Br } C \rightarrow \text{Br } B$ est un isomorphisme.

Ainsi la flèche composée $\text{Br } C \rightarrow \text{Br } B \rightarrow \text{Br } X$ est un isomorphisme. \square

3. Existence de zéro-cycles de degré 1

THÉORÈME 3.1. — *Soit k un corps de nombres. Soient $V \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ et $X \rightarrow C \times \mathbb{P}^1$ comme ci-dessus. Faisons les deux hypothèses :*

- (i) *la fibre (lisse) V_∞ de la fibration composée $V \rightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ (première projection) a des points dans tous les complétés de k ;*
- (ii) *il existe un k -point P de C dont l'image par $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ est le point ∞ .*

Alors pour tout entier $n \geq 2g + 1$, où g désigne le genre de C , la k -variété X possède un point dans un corps extension de k de degré n . En particulier X possède un zéro-cycle de degré 1.

Démonstration. — Soit n comme dans l'énoncé. Le système linéaire associé au diviseur nP de C est alors très ample. Soit $C \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ le plongement associé, et soit $\check{\mathbb{P}}^N$ l'espace projectif dual de \mathbb{P}^N .

La variété d'incidence $W \subset \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N$ définie par l'annulation de la forme bihomogène $\sum_{i=0}^N X_i Y_i$ est un diviseur très ample. La projection $W \rightarrow \mathbb{P}^N$ définit un fibré (lisse) en espaces projectifs \mathbb{P}^{N-1} .

Soit $W_Z \subset Z \times \check{\mathbb{P}}^N$ l'image inverse de la correspondance d'incidence via le morphisme composé

$$Z \times \check{\mathbb{P}}^N \rightarrow C \times \check{\mathbb{P}}^N \rightarrow \mathbb{P}^N \times \check{\mathbb{P}}^N.$$

C'est un fibré (lisse) en espaces projectifs \mathbb{P}^{N-1} au-dessus de la courbe Z , qui est projective, lisse et géométriquement intègre. Ainsi W_Z est projectif, lisse et géométriquement intègre.

Le même argument montre que l'image inverse $W_C \subset C \times \check{\mathbb{P}}^N$ de la correspondance d'incidence est une k -variété projective, lisse, géométriquement intègre.

Les morphismes naturels $W_Z \rightarrow W_C \rightarrow \check{\mathbb{P}}^N$ sont des morphismes propres dominants et finis – ils sont quasi-finis car la courbe C engendre \mathbb{P}^N projectivement. Le morphisme $W_Z \rightarrow W_C$ est de degré 4, le morphisme $W_C \rightarrow \check{\mathbb{P}}^N$ est de degré n .

Etant donné un k -point $h \in \check{\mathbb{P}}^N(k)$ correspondant à un hyperplan H de $\check{\mathbb{P}}^N$, la fibre de $W_C \rightarrow \check{\mathbb{P}}^N$ en le point h est le k -schéma $C \cap H \subset C$.

Pour toute place v de k , la fibre (lisse) X_P du morphisme $X \rightarrow C$ au-dessus du k -point P possède un k_v -point lisse. Ceci implique que pour toute extension finie L/k_v , l'image de l'application induite $X(L) \rightarrow C(L)$ contient un voisinage ouvert U_L de P pour la topologie v -adique sur $C(L)$.

Il existe un hyperplan $H_0 \in \check{\mathbb{P}}^N(k)$ qui découpe exactement le diviseur nP sur C . Soit v une place de k . Tout hyperplan $H \in \check{\mathbb{P}}^N(k)$ qui est suffisamment proche de H_0 pour la topologie v -adique découpe sur la courbe C une somme de points fermés qui, lorsque l'on passe de k à un complété k_v , donnent des points sur diverses extensions finies L de k_v de degré au plus n , points qui sont dans U_L . Rappelons qu'un tel corps local k_v (de caractéristique nulle) n'admet qu'un nombre fini d'extensions L/k_v de degré au plus n .

Appliquons le théorème d'irréductibilité de Hilbert avec approximation faible (cf. [8], Prop. 3.2.1) au revêtement fini de variétés géométriquement intègres

$W_Z \rightarrow \check{\mathbb{P}}^N$, composé de $W_Z \rightarrow W_C \rightarrow \check{\mathbb{P}}^N$ et à un ensemble fini S de places de k donné par le corollaire 1.2.

On trouve ainsi un point $h \in \check{\mathbb{P}}^N(k)$ définissant un hyperplan H de \mathbb{P}^N tel que les propriétés suivantes soient satisfaites.

(a) La fibre de $W_Z \rightarrow \check{\mathbb{P}}^N$ en h est intègre, et donc :

(b) La fibre de $W_C \rightarrow \check{\mathbb{P}}^N$ en h , qui est le schéma $H \cap C \subset C$, définit un point fermé $M \in C$ de degré n sur k , et la fibre du revêtement $Z \rightarrow C$ en M est intègre, de degré 4 sur le corps résiduel $k(M)$.

Ceci implique :

(c) La fibre X_M de $X \rightarrow C$ au-dessus du point M est une surface projective, lisse et géométriquement intègre sur le corps $k(M)$, surface qui admet un modèle affine d'équation $y^2 - az^2 = P_M(x)$ avec $P_M(t) \in k(M)[t]$ un polynôme irréductible de degré 4.

L'application du théorème d'irréductibilité avec approximation permet de choisir l'hyperplan H très proche de H_0 , pour la topologie v -adique, aux places $v \in S$, de façon que :

(d) Pour tout corps L complété de $k(M)$ en une place w au-dessus d'une place $v \in S$, le point M appartient à U_L .

D'après ce que l'on a vu plus haut, ceci assure que la $k(M)$ -surface X_M possède des points dans tous les complétés de $k(M)$ aux places au-dessus d'une place de S . Par ailleurs, le choix de S (voir le corollaire 1.2) assure que la $k(M)$ -surface X_M a des points dans tous les complétés de $k(M)$ aux places non situées au-dessus d'une place de S .

En conclusion, la $k(M)$ -surface lisse X_M est une surface de Châtelet qui possède des points dans tous les complétés de $k(M)$ et qui admet une équation affine $y^2 - az^2 = P(x)$ avec $P(x) \in k(M)[x]$ irréductible de degré 4. L'un des principaux résultats de [4], le théorème 8.11, assure que le principe de Hasse vaut pour une telle surface. Ainsi $X_M(k(M)) \neq \emptyset$, *a fortiori* $X(k(M)) \neq \emptyset$: la k -variété X possède un point dans l'extension $k(M)/k$, qui est de degré n . \square

Remarque 3.2. Supposons $C = \mathbb{P}^1$. Dans ce cas on peut prendre $n = 1$, et on obtient $X(k) \neq \emptyset$. On a mieux. Comme les surfaces de Châtelet d'équation affine $y^2 - az^2 = P(x)$ avec $P(x)$ irréductible satisfont l'approximation faible ([4, Thm. 8.11]), une variante immédiate de l'argument établit l'approximation faible pour X : l'ensemble $X(k)$ est dense dans le produit des $X(k_v)$. L'argument est un cas particulier d'un théorème général sur des familles $X \rightarrow \mathbb{P}^1$ de variétés dont toutes les fibres sont géométriquement intègres (Harari, [8], Thm. 4.2.1).

On peut d'ailleurs voir la démonstration ci-dessus comme une version de ce théorème dans le cadre des zéro-cycles, et ce au-dessus d'une courbe C quelconque.

Remarque 3.3. Dans [3], outre la conjecture sur l'existence de zéro-cycles de degré 1, j'ai proposé une conjecture sur l'application diagonale de groupes de Chow de zéro-cycles $CH_0(X) \rightarrow \prod_v CH_0(X_v)$. Dans une série d'articles (voir la bibliographie de [3]), des versions de cette conjecture ont été établies pour des variétés X fibrées en variétés de Severi-Brauer au-dessus d'une courbe C , sans supposer que toutes les fibres de $X \rightarrow C$ sont géométriquement intègres. Les arguments sont beaucoup plus sophistiqués que ceux du présent article.

Il serait intéressant de voir si l'on peut pousser les arguments ci-dessus et établir la conjecture pour les familles $X \rightarrow C$ de surfaces de Châtelet considérées ici, qui ont la propriété que toutes les fibres de $X \rightarrow C$ sont géométriquement intègres.

Il serait sans doute très difficile de relâcher cette dernière condition.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE – « L'arithmétique des variétés rationnelles », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* **1** (1992), p. 295–336.
- [2] ———, « Birational invariants, purity and the Gersten conjecture », in *K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., 1995, p. 1–64.
- [3] ———, « Conjectures de type local-global sur l'image des groupes de Chow dans la cohomologie étale », in *Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997)*, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., 1999, p. 1–12.
- [4] J.-L. COLLIOT-THÉLÈNE, J.-J. SANSUC & P. SWINNERTON-DYER – « Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces », *J. reine angew. Math.* **373** (1987), p. 37–107 ; II, *ibid.* **374** (1987), p. 72–168.
- [5] C. DEMARCHE – « Obstruction de descente et obstruction de Brauer-Manin », *Algebra and Number Theory* **3** (2008), p. 237–254.
- [6] P. GILLE & T. SZAMUELY – *Central simple algebras and Galois cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 101, Cambridge Univ. Press, 2006.
- [7] A. GROTHENDIECK – « Le groupe de Brauer, I, II, III », in *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Advanced Studies in Pure Mathematics, Masson, 1968.

- [8] D. HARARI – « Méthode des fibrations et obstruction de Manin », *Duke Math. J.* **75** (1994), p. 221–260.
- [9] D. HARARI & A. N. SKOROBOGATOV – « Non-abelian cohomology and rational points », *Compositio Math.* **130** (2002), p. 241–273.
- [10] B. POONEN – « Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers », prépublication [arXiv:0806.1312](https://arxiv.org/abs/0806.1312) à paraître dans *Annals of Math.*
- [11] A. N. SKOROBOGATOV – « On the fibration method for proving the Hasse principle and weak approximation », in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989*, Progr. Math., vol. 91, Birkhäuser, 1990, p. 205–219.
- [12] ———, « Beyond the Manin obstruction », *Invent. Math.* **135** (1999), p. 399–424.
- [13] ———, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge Univ. Press, 2001.

