Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

SUR LE DÉVELOPPEMENT SPECTRAL DE LA FORMULE DES TRACES D'ARTHUR-SELBERG SUR LES CORPS DE FONCTIONS

Ngô Dac Tuân

Tome 137
Fascicule 4

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 545-586

Bull. Soc. math. France
137 (4), 2009, p. 545–586

SUR LE DÉVELOPPEMENT SPECTRAL DE LA FORMULE DES TRACES D'ARTHUR-SELBERG SUR LES CORPS DE FONCTIONS

PAR NGÔ DAC TUÂN

RÉSUMÉ. — On établit le développement spectral de la formule des traces d'Arthur-Selberg sur les corps de fonctions pour un groupe réductif connexe déployé sur un corps fini en partant seulement du théorème de décomposition spectrale de Langlands. Notre preuve généralise la méthode de Lafforgue dans le cas des groupes linéaires $\mathrm{GL}(r)$.

ABSTRACT (*On the fine spectral expansion of the Arthur-Selberg trace formula on function fields*)

In this paper, we give the fine spectral expansion of the Arthur-Selberg trace formula on function fields for a split reductive group over a finite field. It is analogue to the work of Arthur on number fields and extends the work of Lafforgue on function fields for general linear groups.

Introduction

0.1. — Dans la théorie des formes automorphes, la formule des traces d'Arthur-Selberg développée par Arthur joue un rôle très important. Soit G un groupe réductif connexe sur un corps de nombres F dont l'anneau des adèles sera noté $\mathbb{A}$. Pour une fonction test convenable f, on s'intéresse à l'opérateur de

Texte reçu le 31 août 2007, révisé le 4 décembre 2008, accepté le 5 février 2009

NGÔ DAC TUÂN, CNRS - Université de Paris Nord (Paris 13), LAGA - Département de Mathématiques, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France • *E-mail :* `ngodac@math.univ-paris13.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 11F72.

Mots clefs. — Formule des traces d'Arthur-Selberg, corps de fonctions, polygone de Harder-Narasimhan.

convolution $R(f)$ sur $L^2(G(F)\backslash G(\mathbb{A}))$ qui admet un noyau $K(x,y)$ défini sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \times G(F)\backslash G(\mathbb{A})$. En général, ce noyau n'est pas intégrable sur la diagonale, la première étape dans les travaux d'Arthur consiste à modifier ce noyau pour qu'il converge. Le noyau tronqué K^T qui dépend d'un paramètre de troncatures T admet une expression géométrique et une expression spectrale, ce qui donne la première forme de la formule des traces - une égalité entre un côté dit *géométrique* et l'autre côté dit *spectral*.

Puis, la deuxième étape consiste à raffiner ces expressions géométriques et spectrales pour obtenir une nouvelle formule qui est plus explicite et plus facile à manipuler. Du côté géométrique, il s'agit d'exprimer les termes en fonctions des intégrales orbitales et des intégrales orbitales pondérées. Du côté spectral, il s'agit d'écrire les termes en fonctions des traces pondérées. On obtient ainsi une version fine de la formule des traces, mais elle est non-invariante.

Pour les applications, Arthur a aussi développé une version invariante puis une version invariante stable de la formule des traces. On renvoie le lecteur à l'article [5] pour une excellente introduction à la formule des traces sur les corps de nombres.

0.2. — Désormais, on se place sur les corps de fonctions. Dans les travaux de Drinfeld [9, 8] et Lafforgue [13] sur la correspondance de Langlands sur les corps de fonctions pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}(r)$, les auteurs ont besoin seulement d'une version fine de la formule des traces non invariante pour $\mathrm{GL}(r)$. Si l'on espère généraliser cette correspondance pour un groupe réductif quelconque G en suivant la stratégie de Drinfeld et de Lafforgue, voir par exemple [10], il est naturel de transposer sur les corps de fonctions la version fine de la formule des traces d'Arthur-Selberg non invariante pour un tel groupe.

Dans ce texte, on se restreint au cas où G est un groupe réductif connexe déployé sur un corps fini $\mathbb{F}_q$, ce qui permet de simplifier considérablement les arguments. L'auteur présentera une preuve pour tous les groupes réductifs dans un prochain travail [17].

Voici l'énoncé du théorème principal de ce texte :

Théorème. — *Fixons un sous-groupe discret cocompact J de $A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A})$ où A_G est le centre de G. Soit f une fonction test convenable et p un paramètre de troncatures convenable. Alors, la trace tronqué $\mathrm{Tr}^{\leq p}(f)$ s'écrit comme*

$$\mathrm{Tr}^{\leq p}(f) = \sum_{(P,\pi)} \mathrm{Tr}^p_{(P,\pi)}(f)$$

où la somme parcourt l'ensemble des paires discrètes (P,π) avec π unitaire.

De plus, pour une paire discrète (P,π) *avec* π *unitaire, alors*

$$\mathrm{Tr}^p_{(P,\pi)}(f) = \frac{1}{|\,\mathrm{Fixe}(\pi)\,|}\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in\mathrm{Fixe}(\pi)}\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}}\mathrm{Tr}(M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma))\cdot d\lambda_{P_\sigma}$$

où $M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma)$ *est un opérateur tronqué sur l'espace des fonctions* $L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$.

L'énoncé est semblable à celui sur un corps de nombres dû à Arthur [2]. Par contre, on donne ici une preuve différente qui est plus simple dans le cas des corps de fonctions. Elle part seulement du théorème de décomposition spectrale de Langlands, et est basée sur la théorie de Fourier appliquée à certaines fonctions périodiques. Cette stratégie est due à Lafforgue [12, chapitre VI] qui démontre le même résultat pour les groupes linéaires $\mathrm{GL}(r)$.

0.3. Organisation de ce texte. — Les premières sections 1-7 contiennent des rappels. Après avoir introduit les notations (section 1), on rappelle quelques lemmes combinatoires de Langlands et d'Arthur (section 2), et un théorème de Behrend qui démontre l'existence et l'unicité de la réduction canonique d'un G-fibré sur une courbe projective lisse X sur $\mathbb{F}_q$ (section 3). Puis la section 4 introduit les paramètres de troncatures : ils généralisent la notion de polygone canonique de Harder-Narasimhan des fibrés vectoriels, et se confondent avec les troncatures d'Arthur. Les sections 5-7 ont pour objet d'énoncer le théorème de décomposition spectrale de Langlands, cf. théorème 7.3, à partir des notions de séries d'Eisenstein et d'opérateurs d'entrelacement de Langlands.

La section 8 donne des expressions spectrales du noyau considéré qui dépend de deux variables, et définit la trace tronquée d'Arthur qui intègre ce noyau sur la diagonale après troncature. La section 9 démontre l'intégrabilité de la trace tronquée d'Arthur. Un principe simple dans les manipulations consiste à regrouper les filtrations qui ont la même réduction canonique lorsqu'on considère une somme indexée par toutes les filtrations d'un certain G-fibré. Il est ainsi de nature combinatoire.

Les sections 10 et 11 démontrent le théorème principal ci-dessus. On recourt à la théorie de Fourier. L'idée est d'écrire l'intégrale sur la diagonale comme une somme de coefficients de Fourier. Puis on utilise le théorème de décomposition spectrale de Langlands pour calculer les produits scalaires qui apparaissent dans les expressions des coefficients de Fourier. Pour conclure, on n'a plus qu'à calculer la transformée de Fourier des fonctions de troncature d'Arthur (section 10), puis leur somme sur tous les éléments du groupe de Weyl. Enfin, la notion de (G,M)-famille introduite par Arthur montre que ces sommes sur les éléments du groupe de Weyl restent bien définies quand on passe à la limite qui correspond à faire la somme de tous les coefficients de Fourier.

0.4. Remerciements. — Je voudrais remercier profondément Laurent Lafforgue et Ngô Bao Châu pour leurs encouragements et pour d'utiles discussions. Je remercie le *referee* anonyme pour sa lecture attentive et ses nombreuses remarques pertinentes. Il m'a permis de corriger plusieurs erreurs et d'améliorer la rédaction. Ce travail a été réalisé pendant mes séjours au Max-Planck Institute for Mathematics à Bonn en printemps 2006, et à l'Institute for Advanced Study à Princeton en automne 2006 par le biais du contrat DMS-0635607. Je les remercie pour leur hospitalité et leur support.

1. Notations

1.1. — Dans ce texte, X sera une courbe projective lisse géométriquement connexe sur un corps fini $\mathbb{F}_q$. Fixons une clôture algébrique k de $\mathbb{F}_q$ et notons $\overline{X} = X \otimes_{\mathbb{F}_q} k$.

On fixe aussi un groupe réductif connexe déployé G sur $\mathbb{F}_q$. Tous les groupes algébriques considérés dans ce texte seront définis sur $\mathbb{F}_q$. Par définition, *un sous-groupe de Lévi de G sur $\mathbb{F}_q$* est un sous-groupe de Lévi défini sur $\mathbb{F}_q$ d'un certain sous-groupe parabolique de G qui lui-même est défini sur $\mathbb{F}_q$.

On suit les terminologies d'Arthur [5, section 16]. Soit M un sous-groupe de Lévi de G. On notera $\mathcal{L}(M)$ l'ensemble des sous-groupes de Lévi de G sur $\mathbb{F}_q$ contenant M, $\mathcal{F}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G définis sur $\mathbb{F}_q$ contenant M, et $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques de G définis sur $\mathbb{F}_q$ admettant M comme un sous-groupe de Lévi. Ces ensembles sont finis, cf. [5, pages 91-92].

Comme G est déployé sur $\mathbb{F}_q$, on peut fixer un couple (M_0, P_0) où M_0 est un tore déployé maximal de G défini sur $\mathbb{F}_q$, et P_0 est un sous-groupe de Borel de G défini sur $\mathbb{F}_q$ contenant M_0. Par la suite, on utilisera $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{P}$, $\mathcal{F}$) à la place de $\mathcal{L}(M_0)$ (resp. $\mathcal{P}(M_0)$, $\mathcal{F}(M_0)$).

On désigne par Δ_0 l'ensemble de racines simples de G, par W le groupe de Weyl de G qui peut s'identifier à un sous-groupe de $G(F)$. Pour tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{F}$, on notera

$$W_P = W \cap M_P. \tag{1.1.1}$$

On désigne par $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard (définis sur $\mathbb{F}_q$) de G, autrement dit ceux qui contiennent P_0. C'est un ensemble fini qui est en bijection avec les sous-ensembles de Δ_0 : G correspond à l'ensemble vide, P_0 correspond à Δ_0.

1.2. — Soit $P \in \mathcal{F}$. Il admet une décomposition canonique de Lévi $P = M_P N_P$, avec $M_P \in \mathcal{L}$, cf. [5, pages 91-92]. On notera A_P le centre de M_P et A'_P le tore quotient déployé maximal de M_P. Le composé $A_P \hookrightarrow M_P \twoheadrightarrow A'_P$ est une isogénie. On a ainsi une flèche injective de groupes abéliens libres de même rang $X_*(A_P) \hookrightarrow X_*(A'_P)$. Suivant Arthur [5, section 5], on pose

$$\mathfrak{a}_P = X_*(A_P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = X_*(A'_P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},$$
$$\mathfrak{a}_P^* = X^*(A_P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = X^*(A'_P) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

Soient $P, Q \in \mathcal{F}$ avec $P \subseteq Q$. La flèche canonique $A_Q \hookrightarrow A_P \longrightarrow A'_P \twoheadrightarrow A'_Q$ induit une injection $\mathfrak{a}_Q \hookrightarrow \mathfrak{a}_P$, et une projection $\mathfrak{a}_P \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_Q$ telles que le composé $\mathfrak{a}_Q \hookrightarrow \mathfrak{a}_P \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_Q$ soit l'identité sur $\mathfrak{a}_Q$. Ainsi on a une décomposition canonique

$$\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_P^Q \oplus \mathfrak{a}_Q,$$

où $\mathfrak{a}_P^Q$ désigne le noyau de la projection $\mathfrak{a}_P \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_Q$.

Par dualité, on dispose d'une injection $\mathfrak{a}_Q^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_P^*$, et d'une projection $\mathfrak{a}_P^* \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_Q^*$ telles que le composé $\mathfrak{a}_Q^* \hookrightarrow \mathfrak{a}_P^* \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_Q^*$ soit l'identité sur $\mathfrak{a}_Q^*$. On a aussi une décomposition canonique

$$\mathfrak{a}_P^* = \mathfrak{a}_P^{Q*} \oplus \mathfrak{a}_Q^*,$$

où $\mathfrak{a}_P^{Q*}$ désigne le noyau de la projection $\mathfrak{a}_P^* \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_Q^*$. Les espaces vectoriels $\mathfrak{a}_P^Q$ et $\mathfrak{a}_P^{Q*}$ sont duaux l'un de l'autre. On notera $[.]_P^Q$ et $[.]_Q$ les projections de $\mathfrak{a}_P$ (resp. $\mathfrak{a}_P^*$) sur $\mathfrak{a}_P^Q$ et $\mathfrak{a}_Q$, respectivement (resp. $\mathfrak{a}_P^{Q*}$ et $\mathfrak{a}_Q^*$, respectivement).

1.3. — Soit $P \in \mathcal{F}$ avec $P = M_P N_P$ où $M_P \in \mathcal{L}$. On note $\Phi_P \subseteq \mathfrak{a}_P^{G*} \subseteq \mathfrak{a}_P^*$ l'ensemble des caractères non triviaux de A_P qui apparaissent dans la décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G sous l'action de A_P, et $\Phi_P^+ \subseteq \Phi_P$ l'ensemble des caractères non triviaux de A_P qui apparaissent dans la décomposition de l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}_P$ de N_P sous l'action de A_P.

Lorsque $P = P_0$ (resp. $P \in \mathcal{P}$), $\Phi_0 = \Phi_{P_0}$ (resp. Φ_P) est un système de racine, $\Phi_0^+ = \Phi_{P_0}^+$ (resp. Φ_P^+) est un ordre sur Φ_0 (resp. sur Φ_P). On notera Δ_0 (resp. Δ_P) l'ensemble des racines simples. Il est bien connu que Δ_0 (resp. Δ_P) forme une base de $\mathfrak{a}_{P_0}^{G*}$ (resp. $\mathfrak{a}_P^{G*}$). Et l'ensemble des coracines simples

$$\Delta_0^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_0\} \quad (\text{resp. } \Delta_P^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_P\})$$

forme une base de $\mathfrak{a}_{P_0}^G$ (resp. $\mathfrak{a}_P^G$). On notera

$$\widehat{\Delta}_0 = \{\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta_0\} \quad (\text{resp. } \widehat{\Delta}_P = \{\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta_P\})$$

l'ensemble des poids fondamentaux, et

$$\widehat{\Delta}_0^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_0\} \quad (\text{resp. } \widehat{\Delta}_P^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_P\})$$

l'ensemble des copoids fondamentaux. Par dualité, $\widehat{\Delta}_0$ (resp. $\widehat{\Delta}_P$) forme une base de $\mathfrak{a}_{P_0}^{G*}$ (resp. $\mathfrak{a}_P^{G*}$), et $\widehat{\Delta}_0^\vee$ (resp. $\widehat{\Delta}_P^\vee$) forme une base de $\mathfrak{a}_{P_0}^G$ (resp. $\mathfrak{a}_P^G$).

Soit $P \in \mathcal{F}$. Il contient un sous-groupe de Borel $P_1 \in \mathcal{P}$ (1.1). On désigne par $\Delta_{P_1}^P$ le sous-ensemble de Δ_{P_1} qui correspond à P (1.1). On sait que Φ_P n'est pas toujours un système de racines. Suivant Arthur [5, section 5], on désigne par $\Delta_P \subseteq \Phi_P^+$ l'ensemble des caractères non triviaux qui sont les restrictions à A_P des racines simples de $\Delta_{P_1} - \Delta_{P_1}^P$. Alors, Δ_P forme une base de $\mathfrak{a}_P^{G*}$. Par dualité, pour tout élément $\alpha \in \Delta_P$, il y a un élément $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}_P^G$ appelé coracine simple, de telle sorte que $\Delta_P^\vee = \{\alpha^\vee\}_{\alpha\in\Delta_P}$ forme une base de $\mathfrak{a}_P^G$. Explicitement, si $\alpha \in \Delta_P$ est la restriction de $\beta \in \Delta_{P_1}$ à A_P, alors $\alpha^\vee$ est l'image de la projection de $\beta^\vee \in \mathfrak{a}_{P_1}^G$ dans $\mathfrak{a}_P^G$.

Remarquons que $\widehat{\Delta}_P = \{\varpi_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{P_1} - \Delta_{P_1}^P\}$ (resp. $\widehat{\Delta}_P^\vee = \{\varpi_\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta_{P_1} - \Delta_{P_1}^P\}$) forme une seconde base de $\mathfrak{a}_P^{G*}$ duale à $\Delta_P^\vee$ (resp. de $\mathfrak{a}_P^G$ duale à Δ_P). On vérifie facilement que les bases ci-dessus Δ_P, $\Delta_P^\vee$, $\widehat{\Delta}_P$ et $\widehat{\Delta}_P^\vee$ ne dépendent pas du choix de P_1.

Plus généralement, soient $P, Q \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq Q$. Fixons un sous-groupe de Borel $P_1 \in \mathcal{P}$, avec $P_1 \subseteq P$. On va définir de la même façon des bases Δ_P^Q, $\widehat{\Delta}_P^Q$ de $\mathfrak{a}_P^{Q*}$, et $(\Delta_P^Q)^\vee$, $(\widehat{\Delta}_P^Q)^\vee$ de $\mathfrak{a}_P^Q$. Par définition, Δ_P^Q (resp. $\widehat{\Delta}_P^Q$) est l'ensemble des applications linéaires sur $\mathfrak{a}_P^Q$ de $\mathfrak{a}_P$ obtenues en restreignant les éléments de $\Delta_{P_1}^Q - \Delta_{P_1}^P$ (resp. $\widehat{\Delta}_P - \widehat{\Delta}_Q$).

On sait que $P \cap M_Q$ est un sous-groupe parabolique standard de M_Q par rapport au sous-groupe parabolique minimal $P_1 \cap M_Q$. Alors

$$\mathfrak{a}_{P\cap M_Q} = \mathfrak{a}_P, \quad \mathfrak{a}_{P\cap M_Q}^{M_Q} = \mathfrak{a}_P^Q, (\Delta_{P\cap M_Q}^{M_Q})^\vee = (\Delta_P^Q)^\vee, \quad (\widehat{\Delta}_{P\cap M_Q}^{M_Q})^\vee = (\widehat{\Delta}_P^Q)^\vee.$$

1.4. — On note F le corps de fonctions de X ; c'est un corps de fonctions sur $\mathbb{F}_q$. Étant donnée une place finie x de F, on désignera F_x le complété de F en x, $\mathcal{O}_x$ son anneau des entiers, $\kappa(x)$ son corps résiduel, et v_x sa valuation. On désigne par $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de F, et $\mathcal{O}_{\mathbb{A}} = \prod_x \mathcal{O}_x$ son ouvert compact maximal.

On fixe une fois pour toutes un sous-groupe discret J de $A_G(\mathbb{A})$ tel que l'application $J \hookrightarrow A_G(\mathbb{A}) \xrightarrow{\deg_G} \mathfrak{a}_G$ soit injective et de conoyau compact. Ainsi J est un sous-groupe discret cocompact de $A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A})$.

Pour toute place x de F, on notera $K_x = G(\mathcal{O}_x)$; c'est un sous-groupe compact maximal, même hyperspécial de $G(F_x)$. Puis on notera $K = \prod_x G(\mathcal{O}_x)$; c'est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{A})$ qui vérifie les conditions suivantes :

i) (décomposition d'Iwasawa) $G(\mathbb{A}) = P_0(\mathbb{A})K$,

ii) pour tout sous-groupe parabolique standard P de G, on a l'égalité

$$P(\mathbb{A}) \cap K = (M(\mathbb{A}) \cap K)(N(\mathbb{A}) \cap K),$$

et $M(\mathbb{A}) \cap K$ est encore un sous-groupe compact maximal de $M(\mathbb{A})$.

1.5. — Soient $P, Q \in \mathcal{F}$. On définit l'ensemble des homomorphismes $\mathrm{Hom}(P,Q)$ constitué des doubles classes $w \in W_P\backslash W/W_Q$ telles que $wM_Pw^{-1} \subseteq M_Q$.

Si $\sigma M_P\sigma^{-1} = M_Q$ pour un certain $\sigma \in \mathrm{Hom}(P,Q)$, il l'est pour tout $w \in \mathrm{Hom}(P,Q)$. Dans ce cas, on dit que P et Q sont associés, et on écrira $W(P,Q)$ au lieu de $\mathrm{Hom}(P,Q)$.

Soient $P, Q \in \mathcal{P}_0$ deux sous-groupes paraboliques standard associés. On voit que $W(P,Q)$ est l'ensemble des isomorphismes linéaires $\mathfrak{a}_P \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a}_Q$ qui sont induits par un élément du groupe de Weyl W de G.

2. Lemmes combinatoires

2.1. — Soient $P, Q \in \mathcal{F}$ avec $P \subseteq Q$. On introduit deux fonctions caractéristiques de l'espace vectoriel réel $\mathfrak{a}_P^Q$: τ_P^Q la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\mathfrak{a}_P^{Q+} = \{H \in \mathfrak{a}_P^Q \mid (\alpha, H) > 0 \text{ pour tout } \alpha \in \Delta_P^Q\},$$

et $\widehat{\tau}_P^Q$ la fonction caractéristique de l'ensemble

$${}^+\mathfrak{a}_P^Q = \{H \in \mathfrak{a}_P^Q \mid (\varpi, H) > 0 \text{ pour tout } \varpi \in \widehat{\Delta}_P^Q\}.$$

Les lemmes géométriques suivants sont dus à Langlands, voir par exemple [11, lemme 3.1] et [1, lemma 6.3].

Lemme 2.2 (Langlands). — i) *Soient $P, Q, R \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq Q \subseteq R$, et soit $H \in \mathfrak{a}_P^R$. On suppose que $(\alpha, H) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_P^Q$, et $(\varpi, H) > 0$ pour tout $\varpi \in \widehat{\Delta}_Q^R$. Alors $(\varpi, H) > 0$ pour tout $\varpi \in \widehat{\Delta}_P^R$.*

En particulier, on a toujours $\mathfrak{a}_P^{Q+} \subseteq {}^+\mathfrak{a}_P^Q$.

ii) *Soient $P, R \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq R$, et soit $H \in \mathfrak{a}_P^R$. Alors*

$$\sum_{P\subseteq Q\subseteq R} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^R} \cdot \tau_P^Q([H]_P^Q) \cdot \widehat{\tau}_Q^R([H]_Q^R) = \delta_P^R,$$

$$\sum_{P\subseteq Q\subseteq R} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^R} \cdot \widehat{\tau}_P^Q([H]_P^Q) \cdot \tau_Q^R([H]_Q^R) = \delta_P^R.$$

Soient $P, R \in \mathcal{F}$ avec $P \subseteq R$, et soient $H, T \in \mathfrak{a}_P^R$. On pose

$$\Gamma_P^R(H,T) = \sum_{P\subseteq Q\subseteq R} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_Q^R} \cdot \tau_P^Q([H]_P^Q) \cdot \widehat{\tau}_Q^R([H-T]_Q^R).$$

Arthur a montré, [14, lemma 1.3] :

Lemme 2.3 (Arthur). — *Avec les notations ci-dessus, si* $T \in \mathfrak{a}_P^{R+} \subseteq {}^+\mathfrak{a}_P^R$*, la fonction* $H \mapsto \Gamma_P^R(H,T)$ *est la fonction caractéristique de l'ensemble*

$$\{H \in \mathfrak{a}_P^R \mid (\alpha,H) > 0, (\varpi,H) \leq (\varpi,T) \text{ pour tous } \alpha \in \Delta_P^R, \varpi \in \widehat{\Delta}_P^R\}$$

de $\mathfrak{a}_P^R$.

Définition 2.4. — *Soit* $p \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$*, et soit* $\mu \geq 0$ *une constante. On dit que* p *est* μ*-régulier si* $(\alpha,p) > \mu$ *pour tout* $\alpha \in \Delta_{P_0}^G$.

Lemme 2.5. — *Soit* $\mu \geq 0$ *une constante, et soit* $p \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$ *qui est* μ*-régulier. Soit* Q *un sous-groupe parabolique standard de* G*. Alors la fonction qui associe à* $H \in \mathfrak{a}_Q^G$ *l'expression*

$$\sum_{Q\subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot \hat{\tau}_P^G([H]_P^G - [p]_P^G) \cdot 1(\{(\alpha,[H]_Q^P) > \mu, \forall \alpha \in \Delta_Q^P\})$$

est la fonction caractéristique de l'ensemble $H \in \mathfrak{a}_P^G$ *qui vérifie les conditions suivantes :*

i) $(\alpha,[H]_Q^G) > \mu$ *pour tout* $\alpha \in \Delta_Q^G$,

ii) $(\varpi,[H]_Q^G) \leq (\varpi,[p]_Q^G)$ *pour tout* $\varpi \in \widehat{\Delta}_Q^G$.

Démonstration. — On note q l'unique élément de $\mathfrak{a}_{P_0}^G$ qui vérifie $(\alpha,q) = \mu$ pour tout $\alpha \in \Delta_{P_0}^G$. Comme p est μ-régulier, $p - q \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$.

Alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{Q\subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot \hat{\tau}_P^G([H]_P^G - [p]_P^G) \cdot 1(\{(\alpha,[H]_Q^P) > \mu, \forall \alpha \in \Delta_Q^P\})\\
&= \sum_{Q\subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot \hat{\tau}_P^G([H-q]_P^G - [p-q]_P^G) \cdot 1(\{(\alpha,[H-q]_Q^P) > 0, \forall \alpha \in \Delta_Q^P\})\\
&= \sum_{Q\subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot \hat{\tau}_P^G([H-q]_P^G - [p-q]_P^G) \cdot \tau_Q^P([H-q]_Q^P).
\end{aligned}$$

La conclusion découle immédiatement du lemme 2.3. □

3. Réduction canonique des fibrés principaux

3.1. — Soit $P \in \mathcal{P}_0$ un sous-groupe parabolique standard, et soit $\mathcal{E}_P$ un P-fibré sur la courbe X. Par définition, le degré de $\mathcal{E}_P$ est l'élément $p(\mathcal{E}_P) \in X_*(A'_P) \subseteq \mathfrak{a}_P$ tel que, pour tout $\psi \in X^*(A'_P)$,

$$(\psi, p(\mathcal{E}_P)) = \deg \mathcal{E}_P(\psi)$$

où $\mathcal{E}_P(\psi)$ est le fibré inversible induit par $\mathcal{E}_P$ via le caractère $P \twoheadrightarrow M_P \twoheadrightarrow A'_P \xrightarrow{\psi} \mathbb{G}_m$.

DÉFINITION 3.2 (Ramanathan). — *Soit P un sous-groupe parabolique standard et soit $\mathcal{E}_P$ un P-fibré sur la courbe X. On dit que $\mathcal{E}_P$ est semistable si, pour tout sous-groupe parabolique standard $Q \subseteq P$ tel que $|\Delta_Q^P| = 1$, et pour toute Q-réduction $\mathcal{E}_Q$ de $\mathcal{E}_P$, le degré $p(\mathcal{E}_Q)$ de $\mathcal{E}_Q$ vérifie*

$$(\alpha_Q, p(\mathcal{E}_Q)) \leq 0$$

où α_Q est l'unique élément de Δ_Q^P.

Soit $\mathcal{E}$ un G-fibré principal sur X, et soit $\mathcal{E}_P$ une réduction de $\mathcal{E}$ à un sous-groupe parabolique standard P de G.

DÉFINITION 3.3 (Ramanathan). — *Cette réduction est dite canonique si les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

i) *$\mathcal{E}_P$ est semistable,*
ii) *le degré $p(\mathcal{E}_P)$ vu comme un élément de $\mathfrak{a}_P$ vérifie $[p(\mathcal{E}_P)]_P^G \in \mathfrak{a}_P^{G+}$.*

Behrend [6] a montré :

THÉORÈME 3.4 (Behrend). — *Soit $\mathcal{E}$ un G-fibré principal sur X. Alors la réduction canonique existe et elle est unique.*

Ramanathan a démontré ce théorème pour les courbes projectives lisses connexes définies sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0, puis ce théorème a été généralisé en caractéristique positive par Behrend [6].

Plus généralement, soit $\mathcal{E}$ un G-fibré principal sur X, et soit $\mathcal{E}_P$ une réduction de $\mathcal{E}$ à un sous-groupe parabolique standard P de G. On notera $\mathcal{E}_{M_P}$ le M_P-fibré induit par $\mathcal{E}_P$ via la projection canonique $P \twoheadrightarrow P/N_P = M_P$.

Soit Q un autre sous-groupe parabolique standard contenu dans P. Alors $Q \cap M_P$ est un sous-groupe parabolique standard de M_P par rapport à son sous-groupe de Borel $P_0 \cap M_P$. Soit $\mathcal{E}_Q$ une Q-réduction de $\mathcal{E}_P$, alors $\mathcal{E}_Q/N_P$ est une $Q \cap M_P$-réduction de $\mathcal{E}_{M_P}$. De plus, cette flèche induit une bijection entre les Q-réductions de $\mathcal{E}_P$ et les $Q \cap M_P$-réductions de $\mathcal{E}_{M_P}$. Compte tenu du théorème 3.4 appliqué à $\mathcal{E}_{M_P}$, on obtient :

THÉORÈME 3.5 (Behrend). — *Soit $\mathcal{E}$ un G-fibré principal sur $\overline{X}$, et soit $\mathcal{E}_P$ une réduction de $\mathcal{E}$ à un sous-groupe parabolique standard P de G. Alors il existe une unique réduction $\mathcal{E}_Q$ de $\mathcal{E}_P$ à un sous-groupe parabolique standard $Q \subseteq P$ qui vérifie les deux conditions suivantes :*

i) *$\mathcal{E}_Q$ est semistable,*
ii) *le degré $p(\mathcal{E}_Q)$ vu comme un élément de $\mathfrak{a}_Q$ vérifie $[p(\mathcal{E}_Q)]_Q^P \in \mathfrak{a}_Q^{P+}$.*

3.6. — Soit $\mathcal{E}$ un G-fibré principal sur X, et soit $\mathcal{E}_P$ une réduction de $\mathcal{E}$ à un sous-groupe parabolique standard P de G. Suivant Lafforgue [12, section V.1.b], étant donnée une constante $\mu \geq 0$, on va définir la notion de μ-réduction canonique de $\mathcal{E}_P$.

D'après le théorème 3.5, il existe une unique réduction $\mathcal{E}_Q$ de $\mathcal{E}_P$ à un sous-groupe parabolique standard $Q \subseteq P$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

i) $\mathcal{E}_Q$ est semistable,

ii) le degré $p(\mathcal{E}_Q)$ vu comme un élément de $\mathfrak{a}_Q$ vérifie $[p(\mathcal{E}_Q)]_Q^P \in \mathfrak{a}_Q^{P+}$.

Il existe un unique sous-groupe parabolique standard Q^μ, avec $Q \subseteq Q^\mu \subseteq P$ tel que

$$\Delta_{Q^\mu}^P = \{\alpha \in \Delta_Q^P : (\alpha, [p(\mathcal{E}_Q)]_Q^P) > \mu\}.$$

Avec ces notations, la μ-réduction canonique de $\mathcal{E}_P$ est définie comme

$$\mathcal{E}_{Q^\mu} = \mathcal{E}_Q \times^Q Q^\mu. \tag{3.6.1}$$

4. Dictionnaire adèles-fibrés. Troncatures

4.1. — Il est bien connu (voir par exemple [16, section 1]) qu'il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des G-fibrés $\mathcal{E}$ sur X munis d'une trivialisation de la fibre générique et le double quotient $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/K$. Plus généralement, soit P un sous-groupe parabolique standard de G, il y a une équivalence entre la catégorie des G-fibrés $\mathcal{E}$ sur X dont la fibre générique est triviale munis d'une P-réduction $\mathcal{E}_P$ et le double quotient $P(F)\backslash G(\mathbb{A})/K$.

Soit P un sous-groupe parabolique standard de G. Soit $g \in G(\mathbb{A})$; avec les équivalences ci-dessus, on notera $\mathcal{E}^g$ le G-fibré correspondant sur X. Alors l'ensemble $P(F)\backslash G(F)$ est en bijection avec l'ensemble des P-réductions de $\mathcal{E}^g$, cf. [7, théorème 4.13 a)]. Soit $\delta \in P(F)\backslash G(F)$; on notera $\mathcal{E}_P^{\delta g}$ la P-réduction de $\mathcal{E}^g$ associée à δ.

4.2. — On fixe un élément $p \in \mathfrak{a}_{P_0}^G$ qui jouera le rôle du polygone de Harder-Narasimhan.

Définition 4.3. — *Soit $g \in G(\mathbb{A})$ et soit $\mathcal{E}^g$ le G-fibré associé sur X. On note $\mathcal{E}_P^g$ la réduction canonique de $\mathcal{E}^g$ à un certain sous-groupe parabolique canonique P de G. On définit le polygone $p^g \in \mathfrak{a}_{P_0}^G$ de g par le formule :*

$$p^g = [p(\mathcal{E}_P^g)]_{P_0}^G.$$

Et on dit que $p^g \leq p$ si $(\varpi, p^g) \leq (\varpi, p)$ pour tout $\varpi \in \widehat{\Delta}_{P_0}^G$.

Le résultat suivant est dû à Harder et Narasimhan, cf. [18, lemma 3.1].

Proposition 4.4 (Harder-Narasimhan). — *Le sous-ensemble de $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J$ constitué des éléments g tels que $p^g \leq p$ est compact.*

DÉFINITION 4.5. — *Soit P un sous-groupe parabolique standard de G, et soient $g \in G(\mathbb{A})$, et $\delta \in P(F)\backslash G(F)$. On définit $p_P^{\delta g} = p(\mathcal{E}_P^{\delta g})$ et on dit que $p_P^{\delta g} >_P p$ si $[p_P^{\delta g}]_P^G - [p]_P^G \in {}^+\mathfrak{a}_P^G$.*

On montre d'abord :

PROPOSITION 4.6. — *Soit P un sous-groupe parabolique standard de G. Alors pour tout élément $p \in \mathfrak{a}_P^{G+}$, et pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, la somme*

$$\sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} 1(p_P^{\delta g} >_P p)$$

est finie.

Démonstration. — Il suffit de démontrer qu'étant donnés un élément $p \in \mathfrak{a}_P^{G+}$ et un G-fibré $\mathcal{E}$ sur X, il existe seulement un nombre fini de P-réductions $\mathcal{E}_P$ de $\mathcal{E}$ avec $p(\mathcal{E}_P) >_P p$.

En utilisant [18, lemme A.2], on se ramène à prouver qu'étant donnés un réel d, et un fibré vectoriel de rang fini $\mathcal{E}$ sur X, il existe un nombre fini de sous-fibrés inversibles $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$ avec $\deg \mathcal{L} > d$. En effet, on sait que $\deg \mathcal{L}$ est majoré par une constante (qui ne dépend que de $\mathcal{E}$). Il suffit donc de voir que, pour un entier d donné, il existe un nombre fini de sous-fibrés inversibles $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$ avec $\deg \mathcal{L} = d$. Cela découle du fait que l'ensemble des sous-fibrés inversibles $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$ avec $\deg \mathcal{L} = d$ est représentable par un schéma quasi-projectif sur $\mathbb{F}_q$. La preuve est terminée. □

PROPOSITION 4.7. — *Pour tout élément $p \in \mathfrak{a}_P^{G+}$ et pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on a l'identité suivante :*

$$1(p^g \leq p) = \sum_{P \in \mathcal{P}_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} 1(p_P^{\delta g} >_P p). \tag{4.7.1}$$

Démonstration. — Fixons $g \in G(\mathbb{A})$. Compte tenu de la proposition 4.6, seulement un nombre fini de termes dans la somme à droite est non nul. En particulier, la somme est donc bien définie.

Lorsque P décrit $\mathcal{P}_0$, et δ décrit $P(F)\backslash G(F)$, $\mathcal{E}_P^{\delta g}$ décrit toutes les réductions paraboliques de $\mathcal{E}^g$. On va regrouper les termes à droite de l'expression (4.7.1) suivant leurs réductions canoniques :

$$\begin{aligned}&\sum_{P \in \mathcal{P}_0} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \sum_{\delta \in P(F)\backslash G(F)} 1(p_P^{\delta g} >_P p)\\ =&\sum_{\mathcal{E}_Q} \sum_{Q \subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot 1((\mathcal{E}_Q \times^Q P)^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}_Q) \cdot 1(p(\mathcal{E}_Q \times^Q P) >_P p).\end{aligned}$$

Fixons une réduction parabolique $\mathcal{E}_Q$ de $\mathcal{E}^g$. Par définition (3.5) et (4.5), on a

$$1(p(\mathcal{E}_Q \times^Q P) >_P p) = \widehat{\tau}_P^G([p(\mathcal{E}_Q)]_P^G - [p]_P^G),$$
$$1((\mathcal{E}_Q \times^Q P)^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}_Q) = \tau_Q^P([p(\mathcal{E}_Q)]_Q^P).$$

Ainsi compte tenu du fait que $[p]_Q^G \in \mathfrak{a}_Q^{G+}$, le lemme 2.3 implique

$$\begin{aligned}&\sum_{Q\subseteq P}(-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G}\cdot 1((\mathcal{E}_Q\times^Q P)^{\mathrm{rc}}=\mathcal{E}_Q)\cdot 1(p(\mathcal{E}_Q\times^Q P)>_P p)\\ &=\sum_{Q\subseteq P}(-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G}\cdot \tau_Q^P([p(\mathcal{E}_Q)]_Q^P)\cdot\widehat{\tau}_P^G([p(\mathcal{E}_Q)]_P^G-[p]_P^G)\\ &=1(\{(\alpha,[p(\mathcal{E}_Q)]_Q^G)>0,\ \forall\alpha\in\Delta_Q^G;\ (\varpi,[p(\mathcal{E}_Q)]_Q^G)\leq(\varpi,[p]_Q^G),\ \forall\varpi\in\widehat{\Delta}_Q^G\}).\end{aligned}$$

Si cette somme vaut 1, alors $(\alpha, [p(\mathcal{E}_Q)]_Q^G) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_Q^G$. On en déduit que $\mathcal{E}_Q$ est la réduction canonique de $\mathcal{E}^g$. Ainsi, si l'on note $\mathcal{E}_P$ la réduction canonique de $\mathcal{E}^g$, le somme du départ vaut

$$1(\{(\varpi,[p(\mathcal{E}_P)]_P^G)\leq(\varpi,[p]_P^G),\ \forall\varpi\in\widehat{\Delta}_P^G\}).$$

Compte tenu du fait que $p \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$, donc $(\alpha, [p]_{P_0}^P) > 0$ pour tout $\alpha \in \Delta_{P_0}^P$, et du lemme 2.2, on obtient

$$1(\{(\varpi,[p(\mathcal{E}_P)]_P^G)\leq(\varpi,[p]_P^G),\ \forall\varpi\in\widehat{\Delta}_P^G\}) = 1(p^g \leq p).$$

La preuve est donc terminée. □

4.8. Opérateur de troncature d'Arthur. Invariance locale. — On commence par définir l'opérateur de troncature d'Arthur.

Définition 4.9. — *Soit $p \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$; on définit l'opérateur de troncature d'Arthur Λ^p sur les fonctions localement constantes $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ par la formule*

(4.9.1)
$$(\Lambda^p\varphi)(g) = \sum_{P\in\mathcal{P}_0}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_P^G}\sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} 1(p_P^{\delta g} >_P p)\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})}\varphi(n_p\delta g)\cdot dn_P.$$

Remarque 4.10. — Pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans cette somme (4.6). La somme est donc bien définie.

Lemme 4.11. — *Soit K' un sous-groupe ouvert de $K = G(\mathcal{O})$. Alors il existe une constante $\mu > 0$ qui ne dépend que de K' telle que :*

Pour tout élément $g \in G(\mathbb{A})$, pour tout $P \in \mathcal{P}$ dont réduction canonique (resp. μ-réduction canonique) de $\mathcal{E}_P^g$ est notée $\mathcal{E}_Q^{\delta g}$ (resp. la $\mathcal{E}_{Q^\mu}^{\delta g}$), avec $Q, Q^\mu \in \mathcal{P}$, $Q \subseteq Q^\mu \subseteq P$ et $\delta \in Q(F)\backslash P(F)$, pour tout $R \in \mathcal{P}$, avec $Q^\mu \subseteq R \subseteq P$, et *pour toute fonction $\varphi : G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ invariante à droite par $G(F)$, et à gauche par K', on a*

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} \varphi(n_P \delta g) \cdot dn_P = \int_{N_R(F)\backslash N_R(\mathbb{A})} \varphi(n_R \delta g) \cdot dn_R.$$

Démonstration. — C'est une reformulation de [15, lemme I.2.7]. □

Proposition 4.12. — *Pour tout sous-groupe ouvert K' de $K = G(\mathcal{O})$, il existe une constante $\mu > 0$ telle que, pour tout point $p \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$ qui est μ-régulier (2.4), et pour toute fonction $\varphi : G(F)\backslash G(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}$ invariante à droite par K' et pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, on ait :*

$$(\Lambda^p \varphi)(g) = 1(p^g \leq p) \cdot \varphi(g).$$

Démonstration. — Soit $g \in G(\mathbb{A})$; dans l'expression (4.9.1) de $(\Lambda^p\varphi)(g)$, on regroupe les termes suivant leurs réductions canoniques $\mathcal{E}_Q^{\delta g}$ (3.5) ainsi que leurs μ-réductions $\mathcal{E}_{Q^\mu}^{\delta g}$ (3.6.1) pour obtenir

$$(\Lambda^p\varphi)(g) = \sum_{Q \subseteq Q^\mu} \sum_{\delta \in Q(F)\backslash G(F)} \sum_{Q^\mu \subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot 1((\mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q P)^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}_Q^{\delta g}) \cdot$$
$$1((\mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q P)^\mu = \mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q Q^\mu) \cdot 1(p(\mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q P) >_P p) \int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} \varphi(n_P\delta g) \cdot dn_P.$$

Si μ est assez grande en fonction de l'ouvert K' de K, on a l'égalité (4.11)

$$\int_{N_P(F)\backslash N_P(\mathbb{A})} \varphi(n_P\delta g) \cdot dn_P = \int_{N_{Q^\mu}(F)\backslash N_{Q^\mu}(\mathbb{A})} \varphi(n_{Q^\mu}\delta g) \cdot dn_{Q^\mu}.$$

On peut donc mettre ce dernier terme en facteur commun

$$\begin{aligned}(\Lambda^p\varphi)(g) = \sum_{Q \subseteq Q^\mu} \sum_{\delta \in Q(F)\backslash G(F)} \int_{N_{Q^\mu}(F)\backslash N_{Q^\mu}(\mathbb{A})} \varphi(n_{Q^\mu}\delta g) \cdot dn_{Q^\mu} \sum_{Q^\mu \subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \times \\ 1((\mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q P)^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}_Q^{\delta g}) \cdot 1((\mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q P)^\mu = \mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q Q^\mu) \cdot \\ 1(p(\mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q P) >_P p).\end{aligned}$$

La somme

$$\sum_{Q^\mu \subseteq P} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_P^G} \cdot 1((\mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q P)^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}_Q) \cdot 1((\mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q P)^\mu = \mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q Q^\mu) \cdot 1(p(\mathcal{E}_Q^{\delta g} \times^Q P) >_P p))$$

est égale à

$$\begin{aligned}&\sum_{Q^\mu\subseteq P}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_P^G}\cdot\tau_Q^P([p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_Q^P)\cdot\mathbb{1}(\{0<(\alpha,[p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_Q^{Q^\mu})\le\mu,\ \forall\alpha\in\Delta_Q^{Q^\mu}\})\cdot\\ &\cdot\mathbb{1}(\{(\alpha,[p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_{Q^\mu}^P)>\mu,\ \forall\alpha\in\Delta_{Q^\mu}^P\})\cdot\widehat{\tau}_P^G([p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_P^G-[p]_P^G)\\ =&\mathbb{1}(\{0<(\alpha,[p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_Q^{Q^\mu})\le\mu,\ \forall\alpha\in\Delta_Q^{Q^\mu}\})\times\\ &\times\sum_{Q^\mu\subseteq P}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_P^G}\cdot\mathbb{1}(\{(\alpha,[p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_{Q^\mu}^P)>\mu,\ \forall\alpha\in\Delta_{Q^\mu}^P\})\cdot\widehat{\tau}_P^G([p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_P^G-[p]_P^G).\end{aligned}$$

En vertu du lemme combinatoire 2.5, elle vaut

$$\begin{aligned}\mathbb{1}(\{0<(\alpha,[p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_Q^{Q^\mu})\le\mu,\ \forall\alpha\in\Delta_Q^{Q^\mu};\\ (\alpha,[p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_{Q^\mu}^G)>\mu,\ \forall\alpha\in\Delta_{Q^\mu}^G;\\ (\varpi,[p(\mathcal{E}_Q^{\delta g})]_{Q^\mu}^G)\le(\varpi,p),\ \forall\varpi\in\widehat{\Delta}_{Q^\mu}^G\}).\end{aligned}$$

Supposons que ce dernier vaut 1. Les deux premières conditions impliquent que $\mathcal{E}_Q^{\delta g}$ (resp. $\mathcal{E}_{Q^\mu}^{\delta g}$) est la réduction canonique (resp. la μ-réduction canonique) de $\mathcal{E}^g$. Compte tenu du lemme 2.2, la dernière condition combinée avec l'hypothèse que p est μ-régulier est équivalente à la condition $p^g\le p$.

On obtient ainsi

$$(\Lambda^p\varphi)(g)=\mathbb{1}(p^g\le p)\int_{N_{Q^\mu}(F)\backslash N_{Q^\mu}(\mathbb{A})}\varphi(n_{Q^\mu}\delta g)\cdot dn_{Q^\mu}$$

où $(Q\subseteq Q^\mu,\delta)$ correspond à la réduction canonique et la μ-réduction canonique de $\mathcal{E}^g$. Pour conclure, il suffit de remarquer que

$$\int_{N_{Q^\mu}(F)\backslash N_{Q^\mu}(\mathbb{A})}\varphi(n_{Q^\mu}\delta g)\cdot dn_{Q^\mu}=\varphi(\delta g)=\varphi(g).$$

La preuve est terminée. □

5. Groupes de caractères. Paires discrètes

5.1. Homomorphisme de degré. — Soit $P\in\mathcal{F}$. L'homomorphisme

$$\begin{aligned}\deg_{M_P}:M_P(\mathbb{A})&\longrightarrow X_*(A'_P)\subseteq\mathfrak{a}_P\\ m&\mapsto(\chi\in X^*(A'_P)\mapsto\deg(\chi(m)))\end{aligned}$$

est appelé *homomorphisme de degré*. En composant cet homomorphisme avec la projection canonique $P(\mathbb{A})\twoheadrightarrow M_P(\mathbb{A})$, on obtient un homomorphisme $\deg_P:P(\mathbb{A})\longrightarrow X_*(A'_P)$. Il s'étend à un homomorphisme

$$\deg_P:G(\mathbb{A})\longrightarrow X_*(A'_P)$$

invariant à droite par K, et invariant à gauche par $M_P(F)N_P(\mathbb{A})$. En effet, chaque élément $g \in G(\mathbb{A})$ peut s'écrire sous la forme $g = mnk$, avec $m \in M_P(\mathbb{A})$, $n \in N_P(\mathbb{A})$, et $k \in K$; ainsi $\deg_P(g) = \deg_{M_P}(m)$.

On vérifie facilement le lemme suivant.

LEMME 5.2. — *Soit P un sous-groupe parabolique standard de G. Soit $g \in G(\mathbb{A})$, et soit $\delta \in P(F)\backslash G(F)$. On notera $\mathcal{E}_P^{\delta g}$ la P-réduction de $\mathcal{E}^g$ associée à $\mathcal{E}^g$. Alors*

$$\deg(\mathcal{E}_P^{\delta g}) = \deg_P(\delta g).$$

5.3. Groupes de caractères. — Soit $P \in \mathcal{F}$. Rappelons que J est un sous-groupe discret et cocompact de $A_G(F)\backslash A_G(\mathbb{A})$, cf. section 1.4. On définit Λ_P comme le tore des caractères complexes $M_P(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}^*$ qui se factorise à travers l'homomorphisme de degré $\deg_{M_P} : M_P(\mathbb{A}) \longrightarrow X_*(A'_P)$; son rang est égal à $\dim \mathfrak{a}_P^G$. On note $\operatorname{Im}\Lambda_P$ le sous-groupe réel compact de Λ_P constitué des caractères unitaires ; c'est un produit des cercles unités, en particulier il est compact. Puis, on note $\operatorname{Re}\Lambda_P$ le sous-groupe réel linéaire de Λ_P constitué des caractères à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$. Alors on a une décomposition canonique

$$\Lambda_P = \operatorname{Re}\Lambda_P \cdot \operatorname{Im}\Lambda_P.$$

Soit $\lambda \in \Lambda_P$, on désigne $|\lambda|$ le caractère dans $\operatorname{Re}\Lambda_P$ associé à λ. On l'appelle le module de λ. Puis on note $d\lambda_P$ la mesure de Haar sur le groupe réel compact $\operatorname{Im}\Lambda_P$ qui lui attribue le volume 1.

PROPOSITION 5.4. — *La flèche naturelle*

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_P^{G*} &\longrightarrow \operatorname{Re}\Lambda_P \\ \lambda &\mapsto (m \in M_P(\mathbb{A})/J \mapsto q^{\lambda(\deg_{M_P}(m))}) \end{aligned}$$

est une bijection.

Démonstration. — Cf. [15, section I.1.4]. □

On notera $\rho_P \in \operatorname{Re}\Lambda_P$ la racine carrée du caractère modulaire de $M_P(\mathbb{A})$ par lequel $M_P(\mathbb{A})$ agit sur les mesures de Haar dn_P de $N_P(\mathbb{A})$, autrement dit

$$m_P \cdot dn_P \cdot m_P^{-1} = \rho_P^2(m_P) \cdot dn_P \qquad \forall m_P \in M_P(\mathbb{A}). \tag{5.4.1}$$

Plus généralement, soient $P, Q \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq Q$. L'inclusion $P \subseteq Q$ implique $M_P(\mathbb{A}) \subseteq M_Q(\mathbb{A})$ qui induit à son tour une flèche injective $\Lambda_Q \hookrightarrow \Lambda_P$. On notera $\operatorname{Re}\Lambda_P^Q$ le sous-groupe réel de $\operatorname{Re}\Lambda_P$ constitué des caractères qui sont triviaux sur $Z_Q(\mathbb{A})$. On voit facilement

$$\operatorname{Re}\Lambda_P = \operatorname{Re}\Lambda_Q \cdot \operatorname{Re}\Lambda_P^Q.$$

Puis on notera Λ_P^Q le sous-groupe complexe de Λ_P engendré par $\mathrm{Re}\,\Lambda_P^Q$. Il se décompose naturellement en

$$\Lambda_P^Q = \mathrm{Re}\,\Lambda_P^Q \cdot \mathrm{Im}\,\Lambda_P^Q$$

où $\mathrm{Im}\,\Lambda_P^Q$ est un sous-groupe réel compact de $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$ qui vérifie $\mathrm{Im}\,\Lambda_P = \mathrm{Im}\,\Lambda_Q \cdot \mathrm{Im}\,\Lambda_P^Q$. De plus, $\mathrm{Im}\,\Lambda_Q \cap \mathrm{Im}\,\Lambda_P^Q$ est fini.

PROPOSITION 5.5. — *On a un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a}_Q^{G*} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Re}\,\Lambda_Q \arrow[d] \\ \mathfrak{a}_P^{G*} \arrow[r] & \mathrm{Re}\,\Lambda_P \end{tikzcd}$$

Ainsi on a une bijection

$$\mathfrak{a}_P^{Q*} \longrightarrow \mathrm{Re}\,\Lambda_P^Q.$$

Démonstration. — La commutativité découle des constructions des flèches. La deuxième assertion s'en suit immédiatement. □

DÉFINITION 5.6. — *Soient $P, Q \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq Q$ et soient $\lambda, \lambda' \in \Lambda_P^Q$ considérés comme des éléments de $\mathfrak{a}_P^{Q*}$. On dit que*

i) $\lambda_P \gg \lambda'_P$ *s'il existe un caractère $\lambda_Q \in \Lambda_Q$ tel que $(\alpha^\vee, \lambda_Q(\lambda_P - \lambda'_P)) > 0$ pour tout $\alpha^\vee \in (\Delta_P^G)^\vee$.*

ii) $\lambda_P \geq \lambda'_P$ *si $|\lambda_P| - |\lambda'_P|$ est dans le cône positif engendré par Δ_P^Q.*

iii) $\lambda_P > \lambda'_P$ *si $|\lambda_P| - |\lambda'_P|$ est dans l'intérieur du cône positif engendré par Δ_P^Q.*

5.7. Paire discrète. — Soient M un Lévi dans $\mathcal{L}$, $\chi : A_M(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}^*$ un caractère central de $M(\mathbb{A})/J$, et K' un sous-groupe ouvert de K. On notera

$$|\chi| : M(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{R}^{*+}$$

l'unique caractère qui prolonge le module du caractère $\chi : A_M(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}^*$.

On définit $L^2_{K'}(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J, \chi)$ comme l'espace des fonctions

$$\varphi : M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions suivantes :

i) $\varphi(zm) = \chi(z)\varphi(m)$, pour tout $z \in A_M(\mathbb{A})$, et pour tout $m \in M(\mathbb{A})$.

ii) φ est invariante à droite par le sous-groupe $K' \cap M(\mathbb{A})$.

iii) La norme $\|\varphi\|$ définie par

$$\|\varphi\|^2 := \int_{A_M(\mathbb{A})M(F)\backslash M(\mathbb{A})} \frac{|\varphi(m)|^2}{|\chi|^2(m)} \cdot dm$$

est finie.

Puis on note $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J,\chi)$ la réunion de $L^2_{K'}(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J,\chi)$ lorsque K' décrit tous les sous-groupes ouverts K' de K. Le théorème suivant est dû à Langlands.

THÉORÈME 5.8 (Langlands). — *La représentation $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J,\chi)_{\mathrm{disc}}$ de $M(\mathbb{A})$ est admissible, c'est-à-dire pour tout sous-groupe ouvert K' de K, le sous-espace de $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J,\chi)_{\mathrm{disc}}$ formé des formes invariantes par $K'\cap M(\mathbb{A})$ est de dimension finie.*

Démonstration. — cf. [12, Théorème 1, chapitre V.1.c]. □

DÉFINITION 5.9. — *Une paire discrète est la donnée d'un couple (P,π) où $P\in\mathcal{F}$ dont le Lévi sera noté $M_P\in\mathcal{L}$, et π est une représentation admissible isotypique de $M_P(\mathbb{A})$ qui est une composante discrète de $L^2_\infty(M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/J,\chi_\pi)$ si χ_π désigne le caractère central de π.*

Soit (P,π) une paire discrète. Soient $P'\in\mathcal{F}$ qui est associé à P, et $\sigma\in W(P,P')$ (1.5). Alors la représentation $\{\varphi(\sigma^{-1}\cdot\sigma,\varphi\in\pi)\}$ s'inscrit dans une paire discrète (P',π'). On notera $\pi'=\sigma(\pi)$.

Deux paires discrètes (P,π) et (P',π') sont dites équivalentes s'il existe $\lambda_P\in\Lambda_P$, et un isomorphisme $\sigma\in W(P,P')$ tels que

$$\pi'=\sigma(\pi)\otimes\sigma(\lambda_P).$$

DÉFINITION 5.10. — i) *Étant donnée une paire discrète (P,π), les groupes de fixateurs $\mathrm{Fixe}(\pi)$ (resp. $\mathrm{Fixe}_P(\pi)$) sont constitués des couples $(\sigma,\lambda_P)\in W(P,P)\times\Lambda_P$ (resp. des éléments $\lambda_P\in\mathrm{Im}\,\Lambda_P$) tels que*

$$\pi=\sigma(\pi)\otimes\sigma(\lambda_P)\qquad(\textit{resp. } \pi=\pi\otimes\lambda_P).$$

ii) *Étant donnés une paire discrète (P,π) et un homomorphisme $\sigma\in\mathrm{Hom}(P,P')$, avec $P'\in\mathcal{F}$, le groupe de fixateurs $\mathrm{Fixe}_\sigma(\pi)$ est constitué des couples $(\tau,\lambda_P)\in W(P,P)\times\Lambda_P$ tels que*

$$\pi=\tau(\pi)\otimes\tau(\lambda_P)\ \textit{ et }\ \sigma\tau=\sigma.$$

REMARQUE 5.11. — Si (P,π) est une paire discrète, avec π unitaire, pour tout couple $(\sigma,\lambda_\pi)\in\mathrm{Fixe}(\pi)$, on a automatiquement $\lambda_\pi\in\mathrm{Im}\,\Lambda_P$.

6. Séries d'Eisenstein. Opérateurs d'entrelacement

Soit (P,π) une paire discrète ; M_P désignera le sous-groupe de Lévi de P, N_P son sous-groupe unipotent, et χ_π le caractère central de π. Soit K' un sous-groupe ouvert de K. On définit $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ comme l'espace des fonctions

$$\varphi : M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui vérifient les conditions suivantes :

i) φ est invariante à droite par K'.
ii) Pour tout $k\in K$, la fonction

$$\begin{aligned}\varphi_k : M_P(F)\backslash M_P(\mathbb{A})/J &\longrightarrow \mathbb{C}\\ m &\mapsto \rho_P^{-1}(m)\varphi(mk)\end{aligned}$$

est dans le sous-espace π de $L^2_\infty(M(F)\backslash M(\mathbb{A})/J,\chi_\pi)$.
iii) La norme $\|\varphi\|$ définie par $\|\varphi\|^2 := \int_K dk\ \|\varphi_k\|^2$ est finie.

Puis on note $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ la réunion filtrante de tels espaces $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ lorsque K' décrit tous les sous-groupes ouverts de K. Il est un espace hilbertien muni de la norme $\|\varphi\|^2 := \int_K dk\ \|\varphi_k\|^2$.

6.1. Séries d'Eisenstein. — Soit $\varphi : M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, et soit $\lambda_P\in\Lambda_P$. On introduit la série d'Eisenstein définie comme

$$E_P(\varphi,\lambda_P)(g) = \sum_{\delta\in P(F)\backslash G(F)} (\varphi\lambda_P)(\delta g),\quad \forall g\in M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J.$$

Plus généralement, soit $P'\in\mathcal{F}$, avec $P\subseteq P'$. On introduit une nouvelle série d'Eisenstein

$$E_P^{P'}(\varphi,\lambda_P)(g) = \sum_{\delta\in P(F)\backslash P'(F)} (\varphi\lambda_P)(\delta g),\quad \forall g\in M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J.$$

Voici un résultat fondamental de Langlands, cf. [15, section IV.1] :

THÉORÈME 6.2 (Langlands). — *Pour toute paire discrète (P,π), pour tout $P'\in\mathcal{F}$ contenant P et pour toute fonction $\varphi\in L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$, les séries d'Eisenstein $E_P(\varphi,\lambda_P)$ et $E_P^{P'}(\varphi,\lambda_P)$ sont convergentes pour $|\lambda_P|\gg\frac{\rho_P}{|\chi_\pi|}$. De plus, elles admettent un prolongement méromorphe à Λ_P tout entier.*

6.3. Opérateurs d'entrelacement. — Soient $P, P' \in \mathcal{F}$ qui sont associés, et soit w un élément de $W(P, P')$. Soit $\varphi : M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction, et soit $\lambda_P \in \Lambda_P$. On introduit l'opérateur d'entrelacement défini comme

$$\begin{aligned} M_{P,w}^{P'}(\varphi, \lambda_P) : & M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C} \\ & g \mapsto \int_{N_{P'}(\mathbb{A})\cap wN_P(\mathbb{A})w^{-1}\backslash N_{P'}(\mathbb{A})} (\varphi\lambda_P)(w^{-1}n_{P'}g)\frac{dn_{P'}}{dn_{P,P'}} \cdot w\lambda_P^{-1}(g) \end{aligned}$$

où $dn_{P,P'}$ est la mesure de Haar sur $N_{P'}(\mathbb{A})\cap wN_P(\mathbb{A})w^{-1}$ telle que le quotient $N_{P'}(F) \cap wN_P(F)w^{-1}\backslash N_{P'}(\mathbb{A}) \cap wN_P(\mathbb{A})w^{-1}$ soit de volume 1.

Langlands a montré :

PROPOSITION 6.4 (Langlands). — i) *Pour toute paire discrète (P, π), tout sous-groupe parabolique $P' \in \mathcal{F}$ avec $W(P, P') \neq \varnothing$, tout élément $w \in W(P, P')$, et toute fonction $\varphi \in L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$, l'intégrale $M_{P,w}^{P'}(\varphi, \lambda_P)$ converge pour tout $g \in G(\mathbb{A})$ et tout $\lambda_P \in \Lambda_P$ avec $|\lambda_P| \gg \frac{\rho_P}{|\chi_\pi|}$.*

De plus, elle admet un prolongement méromorphe à Λ_P tout entier, et prend ses valeurs dans $L^2_\infty(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi')$ où (P', π') est la paire discrète transformée de (P, π) par w.

ii) *Avec les mêmes notations, soit P'' un autre sous-groupe parabolique avec $W(P', P'') \neq \varnothing$, et soit w' un élément de $W(P', P'')$. Alors*

$$M_{P,w'w}^{P''}(\varphi, \lambda_P) = M_{P',w'}^{P''}(M_{P,w}^{P'}(\varphi, \lambda_P), w\lambda_P).$$

iii) *Avec les mêmes notations, soit $Q \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq Q$ et $P' \subseteq Q$. Alors*

$$E_{P'}^Q(M_{P,w}^{P'}(\varphi, \lambda_P), w\lambda_P) = E_P^Q(\varphi, \lambda_P).$$

6.5. — Plus généralement, soient $P, P' \in \mathcal{F}$ avec $\mathrm{Hom}(P, P') \neq \varnothing$. Soit $\sigma \in \mathrm{Hom}(P, P')$. Il existe certainement un sous-groupe parabolique $Q \in \mathcal{F}$, avec $Q \subseteq P'$ et un élément $w \in W(P, Q)$ tels que σ soit le composé de w avec l'inclusion $Q \subseteq P'$. Pour toute fonction $\varphi : M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$, et tout caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$, on définit la série d'Eisenstein généralisée comme

$$E_{P,\sigma}^{P'}(\varphi, \lambda_P) = E_Q^{P'}(M_{P,w}^Q(\varphi, \lambda_P), w\lambda_P).$$

Compte tenu de 6.4, on voit bien que cette série ne dépend pas du choix de Q, et de w. Les propriétés de fonctorialité s'en suivent facilement.

PROPOSITION 6.6 (Langlands). — *Pour toute paire discrète (P, π), tous sous-groupes paraboliques P', Q tels que P' soit associé à P (1.5), tous éléments $w \in W(P, P')$ et $w' \in \mathrm{Hom}(P', Q)$, et toute fonction $\varphi \in L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$, on a*

$$E_{P',w'}^Q(M_{P,w}^{P'}(\varphi, \lambda_P), w\lambda_P) = E_{P,w'w}^Q(\varphi, \lambda_P).$$

Langlands a montré aussi :

PROPOSITION 6.7 (Langlands). — *Soit (P,π) une paire discrète, avec π unitaire, et soit φ une fonction dans $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$. Alors*

i) *Pour tout sous-groupe parabolique $P' \in \mathcal{F}$, avec $P \subseteq P'$, la fonction méromorphe sur Λ_P*

$$\lambda_P \mapsto E_P^{P'}(\varphi,\lambda_P)$$

est régulière sur le tore imaginaire $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$.

ii) *Pour tout sous-groupe parabolique $P' \in \mathcal{F}$ associé à P (1.5), et tout élément $w \in W(P,P')$, la fonction mémorphe sur Λ_P*

$$\lambda_P \mapsto M_{P,w}^{P'}(\varphi,\lambda_P)$$

est régulière sur le tore imaginaire $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$. *De plus, pour tout $\lambda_P \in \mathrm{Im}\,\Lambda_P$, on a*

$$\|M_{P,w}^{P'}(\varphi,\lambda_P)\| = \|\varphi\|.$$

7. Fonctions de Paley-Wiener. Décomposition spectrale

7.1. — Soit (P,π) une paire discrète, et soit K' un sous-groupe ouvert de K (resp. et $\sigma \in \mathrm{Hom}(P,P')$). L'espace des fonctions de Paley-Wiener $L^2_{K'}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ (resp. $L^2_{K',\sigma}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$) est l'espace des fonctions

$$\Phi : \mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$$

vérifiant les conditions suivantes :

i) La fonction $\lambda_P \in \mathrm{Im}\,\Lambda_P \mapsto \Phi(\lambda_P,.)$ est une combinaison linéaire finie à coefficients dans $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ de caractères du tore $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$.

ii) Pour tout $\lambda_P \in \mathrm{Im}\,\Lambda_P$, et pour tout $\mu_P \in \mathrm{Fixe}_P(\pi)$ (resp. tout $(\tau,\mu_P) \in \mathrm{Fixe}_\sigma(\pi)$), on a :

$$\Phi(\lambda_P\mu_P,.) = \Phi(\lambda_P,.)$$

(resp. $M_{P,\tau}^P(\Phi(\lambda_P\mu_P,.),\lambda_P\mu_P) = \Phi(\tau(\lambda_P),.)$).

On notera

$$L^2_\infty(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$$

(resp. $L^2_{\infty,\sigma}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$) la réunion filtrante de

$$L^2_{K'}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$$

(resp. $L^2_{K',\sigma}(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$) lorsque K' décrit tous les sous-groupes ouverts de K. C'est un espace hilbertien muni de la norme

$$\|\Phi\|^2 := \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} \|\Phi(\lambda_P)\|^2 \cdot d\lambda_P.$$

Son complété pour cette norme sera noté $L^2(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ (resp. $L^2_\sigma(\mathrm{Im}\,\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$).

7.2. Décomposition spectrale. — On peut énoncer le théorème de la décomposition spectrale de Langlands, cf. [15, section VI.2].

THÉORÈME 7.3 (Langlands). — *Soit $P' \in \mathcal{F}$. Pour toute paire discrète (P, π) avec π unitaire, et pour tout homomorphisme $\sigma : P \longrightarrow P'$, l'application définie sur $L^2_\infty(\operatorname{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ par la formule*

$$\Phi \mapsto |\operatorname{Fixe}_\sigma(\pi)|^{-1/2} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} E^{P'}_{P,\sigma}(\Phi(\lambda_P, .), \lambda_P) \cdot d\lambda_P$$

induit une isométrie du sous-espace $L^2_{\infty,\sigma}(\operatorname{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ sur un sous-espace de $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J)$, et elle est nulle sur le supplémentaire orthogonal de ce sous-espace dans $L^2_\infty(\operatorname{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$.

Elle induit par suite une isométrie du sous-espace complété $L^2_\sigma(\operatorname{Im}\Lambda_P \times M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ sur un sous-espace fermé de $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J)$.

Enfin $L^2(M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J)$ est la somme directe hilbertienne de ces sous-espaces fermés lorsque (P, π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires dicrètes avec π unitaire, et σ décrit un ensemble des représentants des orbites de $\operatorname{Hom}(P, P')$ *sous l'action de* $\operatorname{Fixe}(\pi)$.

8. Expression spectrale du noyau. Traces tronquées d'Arthur

8.1. Expression spectrale du noyau. — On fixe une fonction $f : G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$ à support compact invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K' de K. Pour tout sous-groupe parabolique $P \in \mathcal{F}$, l'opérateur de convolution $\varphi \mapsto \varphi * f$ dans l'espace des fonctions localement intégrables de $M_P(F)N_P(F)\backslash G(F)/J$ dans $\mathbb{C}$ admet l'expression suivante pour noyau

$$K_{f,P}(g', g) = \sum_{\gamma \in M_P(F)} \int_{N_P(\mathbb{A})} f(g^{-1}\gamma n_P g') \cdot dn_P.$$

Pour tout caractère $\lambda_P \in \Lambda_P$, on obtient un opérateur composé $\varphi \mapsto f(\varphi, \lambda_P) := ((\varphi\lambda_P) * f)\lambda_P^{-1}$.

8.2. — Soit (P, π) une paire discrète. Comme la fonction h est invariante à droite et à gauche par le sous-groupe ouvert K' de K, l'opérateur de convolution à droite par f ainsi que les opérateurs $f(\varphi, \lambda_P)$ $(\lambda_P \in \Lambda_P)$ envoient l'espace $L^2_\infty(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ dans le sous-espace de dimension finie $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$. Or il y a un nombre fini de classes d'équivalences de paires discrètes (P, π) telles que le sous-espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \pi)$ ne soit pas nul. Combinée avec le théorème de décomposition spectrale de Langlands 7.3, la discussion précédente implique :

PROPOSITION 8.3. — *Pour tout $P' \in \mathcal{F}$, et pour toute fonction f à support compact invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K' de K, le noyau de l'opérateur de convolution à droite par f dans $L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J)$ admet une expression spectrale*

$$K_{f,P'}(g',g) = \sum_{(P,\pi)} \sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{K'}(P,\pi)} \sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(P,P')} \frac{1}{|\operatorname{Fixe}(\pi)|} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} E_{P,\sigma}^{P'}(f(\varphi,\lambda_P),\lambda_P)(g') \cdot \overline{E_{P,\sigma}^{P'}(\varphi,\lambda_P)(g)} \cdot d\lambda_P$$

où (P,π) décrit un ensemble de représentants des classes d'équivalence de paires dicrètes avec π unitaire, et $\mathcal{B}_{K'}(P,\pi)$ décrit une base orthonormée finie de chaque espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$.

DÉFINITION 8.4 (Trace tronquée d'Arthur). — *Étant donnée une fonction $f : G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$ à support compact invariante à droite et à gauche par un sous-groupe ouvert K' de K, on appelle trace tronquée d'Arthur de f par un polygone $p \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$ l'intégrale*

(8.4.1)
$$\operatorname{Tr}^{\leq p}(f) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} \sum_{P_0\subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G} \sum_{\delta\in P'(F)\backslash G(F)} 1(p_{P'}^{\delta g} >_{P'} p)\cdot K_{f,P'}(\delta g,\delta g)\cdot dg.$$

9. Intégrabilité

La première chose à faire est de vérifier que l'intégrale (8.4.1) est bien définie.

PROPOSITION 9.1. — *Soient (P,π) une paire discrète avec π unitaire, K' un sous-groupe ouvert de K, $\lambda_P \mapsto \varphi(\lambda_P)$ une fonction analytique sur Λ_P à valeurs dans l'espace de dimension finie $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$, ψ un élément de ce même espace $L^2_{K'}(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$, et p un élément dans $\mathfrak{a}_{P_0}^{G+}$.*

Alors il existe sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J$ une fonction positive intégrable qui majore en modules toutes les fonctions

$$g \mapsto K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g) = \sum_{P_0\subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G} \sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(P,P')} \sum_{\delta\in P'(F)\backslash G(F)} 1(p_{P'}^{\delta g} >_{P'} p) \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} E_{P,\sigma}^{P'}(\varphi(\lambda_1\lambda_P),\lambda_1\lambda_P)(\delta g) \cdot \overline{E_{P,\sigma}^{P'}(\psi,\lambda_2\lambda_P)(\delta g)} \cdot d\lambda_P \tag{9.1.1}$$

lorsque λ_1, λ_2 décrivent un certain voisinage de $\operatorname{Im}\Lambda_P$ dans Λ_P.

La suite de cette section est consacrée à la démonstration de cette proposition.

9.2. — D'après Langlands, il existe

i) une paire discrète $(\widetilde{P}, \widetilde{\pi})$, avec $\widetilde{P} \subseteq P$ et $\widetilde{\pi}$ unitaire cuspidale,

ii) une fonction analytique $\lambda \in \Lambda_P \mapsto \widetilde{\varphi}(\lambda_P)$ (resp. un élément $\widetilde{\psi}$) à valeurs dans $L^2_{K'}(M_{\widetilde{P}}(F)N_{\widetilde{P}}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J, \widetilde{\pi})$,

iii) un point $\widetilde{\lambda} \in \Lambda^P_{\widetilde{P}}$, avec $|\widetilde{\lambda}| \geq 1$, cf. la définition 5.6,

tels que

$$\varphi(\lambda_P) = \mathrm{Res}_{\widetilde{\lambda}} E^P_{\widetilde{P}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_P), .) \quad (\text{resp. } \psi = \mathrm{Res}_{\widetilde{\lambda}} E^P_{\widetilde{P}}(\widetilde{\psi}, .))$$

où $\mathrm{Res}_{\widetilde{\lambda}}$ est l'opérateur de résidus en $\widetilde{\lambda}$ dans $\Lambda^P_{\widetilde{P}}$.

Définition 9.3. — *Étant donnés un sous-groupe parabolique $P' \in \mathcal{F}$, et un élément $\sigma \in \mathrm{Hom}(P, P')$, on notera $\widetilde{\sigma}$ l'élément dans $\mathrm{Hom}(\widetilde{P}, P')$ obtenu en composant σ avec l'inclusion $\widetilde{P} \subseteq P$.*

Avec ces notations, en vertu de [3, Lemma 2.1], il suffit de montrer qu'il existe une fonction positive intégrable sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J$ qui majore en modules toutes les fonctions

$$g \mapsto \sum_{P_0 \subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}^G_{P'}} \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}(P,P')} \sum_{\delta \in P'(F)\backslash G(F)} 1(p^{\delta g}_{P'} >_{P'} p)$$
$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} \mathrm{Res}_{\widetilde{\lambda}} E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \cdot\lambda_1\lambda_P)(\delta g) \cdot \overline{\mathrm{Res}_{\widetilde{\lambda}} E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\psi}, \cdot\lambda_2\lambda_P)(\delta g)} \cdot d\lambda_P$$

lorsque λ_1, λ_2 décrivent un certain voisinage de $\mathrm{Im}\,\Lambda_P$ dans Λ_P.

9.4. — Pour tous $\lambda_1 \in \Lambda_P$, $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2 \in \Lambda_{\widetilde{P}}$, considérons donc la fonction sur $G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J$

$$g \mapsto \sum_{P_0 \subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}^G_{P'}} \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}(P,P')} \sum_{\delta \in P'(F)\backslash G(F)} 1(p^{\delta g}_{P'} >_{P'} p)$$
$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\delta g) \cdot \overline{E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\delta g)} \cdot d\lambda_P. \tag{9.4.1}$$

Fixons maintenant un élément $g \in G(\mathbb{A})$, et une constante positive $\mu \geq 0$. Soit $\mathcal{E}^g$ le G-fibré sur X associé à g (4.1). Rappelons que, pour chaque sous-groupe parabolique $P_0 \subseteq P'$, on a une bijection entre $\delta \in P'(F)\backslash G(F)$ et l'ensemble de P'-structure $\mathcal{E}^{\delta g}_{P'}$ de $\mathcal{E}^g$ (4.1). Ainsi, on peut associer à tout sous-groupe parabolique $P_0 \subseteq P'$ et tout $\delta \in P'(F)\backslash G(F)$ le couple $(\mathcal{E}_Q, \mathcal{E}_{Q^\mu})$ où $\mathcal{E}_Q$ (resp. $\mathcal{E}_{Q^\mu}$) est la réduction canonique (resp. la μ-réduction canonique) de

$\mathcal{E}^{\delta g}_{P'}$. Dans l'expression (9.4.1), on va regrouper les termes selon leurs couples $(\mathcal{E}_Q, \mathcal{E}_{Q^\mu})$ pour obtenir :

$$\sum_{(Q,Q^\mu)} \sum_{\delta\in Q(F)\backslash G(F)} \sum_{Q^\mu\subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}^G_{P'}} \cdot 1((\mathcal{E}^{\delta g}_Q \times^Q P')^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}^{\delta g}_Q) \cdot 1((\mathcal{E}^{\delta g}_Q \times^Q P')^{\mu} = \mathcal{E}^{\delta g}_{Q^\mu})$$
$$1(p(\mathcal{E}^{\delta g}_{P'}) >_{P'} p) \sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(P,P')} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\delta g) \cdot \overline{E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\delta g)} \cdot d\lambda_P.$$

D'après (4.11), lorsque la constante μ est assez grande en fonction de K', on peut remplacer les séries d'Eisenstein par leurs termes constants :

$$E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\delta g) = \int_{N_{Q^\mu}(F)\backslash N_{Q^\mu}(\mathbb{A})} E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(n_{Q^\mu}\delta g) \cdot dn_{Q^\mu}.$$

D'après Langlands [15, section II.1.7], on a la formule suivante pour le terme constant d'une série d'Eisenstein cuspidale :

$$\begin{aligned} &\int_{N_{Q^\mu}(F)\backslash N_{Q^\mu}(\mathbb{A})} E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(n_{Q^\mu}\delta g) \cdot dn_{Q^\mu} \\ =& \sum_{\substack{\sigma_1\in\mathrm{Hom}(\widetilde{P},Q^\mu) \\ \sigma_1'=\widetilde{\sigma}}} E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_1}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\delta g) \end{aligned}$$

où σ_1' désigne le composé de σ_1 avec l'inclusion $Q^\mu \subseteq P'$.

On obtient ainsi

$$E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\delta g) = \sum_{\substack{\sigma_1\in\mathrm{Hom}(\widetilde{P},Q^\mu) \\ \sigma_1'=\widetilde{\sigma}}} E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_1}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\delta g).$$

De même,

$$E^{P'}_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\delta g) = \sum_{\substack{\sigma_2\in\mathrm{Hom}(\widetilde{P},Q^\mu) \\ \sigma_2'=\widetilde{\sigma}}} E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_2}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\delta g).$$

Si l'on suppose de plus que μ est assez grande en fonction de p, alors

$$\begin{aligned} &1((\mathcal{E}^{\delta g}_Q \times^Q P')^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}^{\delta g}_Q) \cdot 1((\mathcal{E}^{\delta g}_Q \times^Q P')^{\mu} = \mathcal{E}^{\delta g}_{Q^\mu}) \cdot 1(p(\mathcal{E}^{\delta g}_{P'}) >_{P'} p) \\ =&1((\mathcal{E}^{\delta g}_Q \times^Q P')^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}^{\delta g}_Q) \cdot 1((\mathcal{E}^{\delta g}_Q \times^Q P')^{\mu} = \mathcal{E}^{\delta g}_{Q^\mu}) \cdot 1(p(\mathcal{E}^{\delta g}_{Q^\mu}) >_{Q^\mu} p). \end{aligned}$$

On a donc montré :

PROPOSITION 9.5. — *Soit μ une constante positive assez grande en fonction de K' et de p. Alors, pour tout $g \in G(\mathbb{A})$, l'expression*

$$\sum_{P_0 \subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G} \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}(P,P')} \sum_{\delta \in P'(F)\backslash G(F)} 1(p_{P'}^{\delta g} >_{P'} p)$$
$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} E_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}^{P'}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\delta g) \cdot \overline{E_{\widetilde{P},\widetilde{\sigma}}^{P'}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\delta g)} \cdot d\lambda_P$$

est égale à

$$\sum_{(Q,Q^\mu)} \sum_{\delta \in Q(F)\backslash G(F)} \sum_{Q^\mu \subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G} \cdot 1((\mathcal{E}_{P'}^{\delta g})^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}_Q^{\delta g}) \cdot 1((\mathcal{E}_{P'}^{\delta g})^\mu = \mathcal{E}_{Q^\mu}^{\delta g}) \cdot 1(p(\mathcal{E}_{Q^\mu}^{\delta g}) >_{Q^\mu} p)$$
$$\sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2 \in \mathrm{Hom}(\widetilde{P},Q^\mu) \\ \exists \sigma \in \mathrm{Hom}(P,P') : \sigma_1' = \sigma_2' = \widetilde{\sigma}}} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} E_{\widetilde{P},\sigma_1}^{Q^\mu}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_P)(\delta g) \cdot \overline{E_{\widetilde{P},\sigma_2}^{Q^\mu}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\lambda}_2\lambda_P)(\delta g)} \cdot d\lambda_P.$$

9.6. — Avant de continuer, on a besoin du lemme suivant :

LEMME 9.7. — *Soient $\mu > 0$ une constante positive, $P, \widetilde{P}, Q, Q^\mu$ les sous-groupes paraboliques dans $\mathcal{F}$, avec $\widetilde{P} \subseteq P$ et $P_0 \subseteq Q \subseteq Q^\mu$, σ_1, σ_2 deux éléments de* $\mathrm{Hom}(\widetilde{P}, Q^\mu)$, *et g un élément de $G(\mathbb{A})$. Alors :*

i) *L'ensemble $\{Q^\mu \subseteq P' \mid (\mathcal{E}_{P'}^g)^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}_Q^g, (\mathcal{E}_{P'}^g)^\mu = \mathcal{E}_{Q^\mu}^g\}$ est ou bien vide ou bien égale à $\{Q^\mu \subseteq P' \subseteq Q'\}$ pour un certain sous-groupe parabolique $Q' \in \mathcal{F}$.*

ii) *Avec les notations ci-dessus, l'ensemble $\{Q^\mu \subseteq P' \subseteq Q' \mid \exists \sigma \in$ $\mathrm{Hom}(P, P') : \sigma_1' = \sigma_2' = \widetilde{\sigma}\}$ est ou bien vide ou bien égale à $\{Q'' \subseteq P' \subseteq Q'\}$ pour un certain sous-groupe parabolique $Q'' \in \mathcal{F}$.*

Donc la somme

$$\sum_{\substack{Q^\mu \subseteq P' \\ \exists \sigma \in \mathrm{Hom}(P,P') : \sigma_1' = \sigma_2' = \widetilde{\sigma}}} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G} \cdot 1((\mathcal{E}_{P'}^g)^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}_Q^g) \cdot 1((\mathcal{E}_{P'}^g)^\mu = \mathcal{E}_{Q^\mu}^g)$$

vaut ou bien 0 ou bien $(-1)^{\dim \mathfrak{a}_{Q'}^G}$.

Elle vaut $(-1)^{\dim \mathfrak{a}_{Q'}^G}$ si et seulement si les homomorphismes $\sigma_1^* : \mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}} \longrightarrow$ $\mathrm{Re}\,\Lambda_{Q^\mu}$ et $\sigma_2^* : \mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}} \longrightarrow \mathrm{Re}\,\Lambda_{Q^\mu}$ qui sont induits par les homomorphismes $A_{Q^\mu} \hookrightarrow \sigma_1 A_{\widetilde{P}} \sigma_1^{-1}$ et $A_{Q^\mu} \hookrightarrow \sigma_2 A_{\widetilde{P}} \sigma_2^{-1}$ vérifient les trois conditions suivantes :

(a) *σ_1^* et σ_2^* envoient le sous-groupe $\mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}}^P$ de $\mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}}$ dans le sous-groupe $\mathrm{Re}\,\Lambda_{Q^\mu}^{Q'}$ de $\mathrm{Re}\,\Lambda_{Q^\mu}$.*

(b) *σ_1^*/σ_2^* envoient le groupe $\mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}}$ dans le sous-groupe $\mathrm{Re}\,\Lambda_{Q^\mu}^{Q'}$ de $\mathrm{Re}\,\Lambda_{Q^\mu}$.*

(c) *Le sous-groupe de $\mathrm{Re}\,\Lambda_{Q^\mu}^{Q'}$ engendré par $\sigma_1^*(\mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}}^P)$, $\sigma_2^*(\mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}}^P)$ et $\sigma_1^*/\sigma_2^*(\mathrm{Re}\,\Lambda_{\widetilde{P}})$ rencontre le cône $\{\lambda_{Q^\mu}^{Q'} \in \mathrm{Re}\,\Lambda_{Q^\mu}^{Q'} \mid \lambda_{Q^\mu}^{Q'} < 1\}$.*

Démonstration. — i) On voit bien que l'ensemble considéré est non vide si et seulement s'il contient Q^μ, autrement dit (3.6.1)

$$0 \le (\alpha, p(\mathcal{E}^g_Q)) \le \mu, \quad \text{pour tout } \alpha \in \Delta_Q^{Q^\mu}.$$

Il existe un unique sous-groupe parabolique Q' contenant Q^μ tel que

$$\Delta^{Q'}_{Q^\mu} = \{\alpha \in \Delta^G_{Q^\mu} : (\alpha, p(\mathcal{E}^g_Q)) > \mu\}.$$

Pour que P' soit dans l'ensemble $\{Q^\mu \subseteq P' \mid (\mathcal{E}^g_{P'})^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}^g_Q, (\mathcal{E}^g_{P'})^\mu = \mathcal{E}^g_{Q^\mu}\}$, il faut et il suffit que

$$(\alpha, p(\mathcal{E}^g_Q)) > \mu, \quad \text{pour tout } \alpha \in \Delta^{P'}_{Q^\mu},$$

autrement dit $Q^\mu \subseteq P' \subseteq Q'$. D'où la conclusion.

ii) Remarquons d'abord que les homomorphismes $A_{Q^\mu} \hookrightarrow \sigma_1 A_{\widetilde{P}} \sigma_1^{-1}$ et $A_{Q^\mu} \hookrightarrow \sigma_2 A_{\widetilde{P}} \sigma_2^{-1}$ induisent aussi les applications linéaires $\sigma_1^* : \mathfrak{a}^{G*}_{\widetilde{P}} \longrightarrow \mathfrak{a}^{G*}_{Q^\mu}$ et $\sigma_2^* : \mathfrak{a}^{G*}_{\widetilde{P}} \longrightarrow \mathfrak{a}^{G*}_{Q^\mu}$. En vertu de (5.4) et (5.5), les trois conditions (a), (b) et (c) se traduisent de manière équivalente :

(a′) σ_1^* et σ_2^* envoient le sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}^{P*}_{\widetilde{P}}$ de $\mathfrak{a}^{G*}_{\widetilde{P}}$ dans le sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}^{Q'*}_{Q^\mu}$ de $\mathfrak{a}^{G*}_{Q^\mu}$.

(b′) $\sigma_1^* - \sigma_2^*$ envoient l'espace vectoriel $\mathfrak{a}^{G*}_{\widetilde{P}}$ dans le sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}^{Q'*}_{Q^\mu}$ de $\mathfrak{a}^{G*}_{Q^\mu}$.

(c′) Le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}^{Q'*}_{Q^\mu}$ engendré par $\sigma_1^*(\mathfrak{a}^{P*}_{\widetilde{P}})$, $\sigma_2^*(\mathfrak{a}^{P*}_{\widetilde{P}})$ et $(\sigma_1^* - \sigma_2^*)(\mathfrak{a}^{G*}_{\widetilde{P}})$ rencontre l'intérieur du cône positif engendré par $\Delta^{Q'}_{Q^\mu}$.

L'ensemble $\{Q^\mu \subseteq P' \subseteq Q' \mid \exists \sigma \in \mathrm{Hom}(P, P') : \sigma_1' = \sigma_2' = \widetilde{\sigma}\}$ est non vide si et seulement s'il contient Q'. La condition (a') traduit le fait que σ_1' et σ_2' se factorise à travers l'inclusion $\widetilde{P} \subseteq P$. Puis la condition (b') traduit le fait que σ_1' et σ_2' induisent le même élément dans $\mathrm{Hom}(P, Q')$.

Plus généralement, P' est dans l'ensemble considéré si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- σ_1^* et σ_2^* envoient le sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}^{P*}_{\widetilde{P}}$ de $\mathfrak{a}^{G*}_{\widetilde{P}}$ dans le sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}^{P'*}_{Q^\mu}$ de $\mathfrak{a}^{G*}_{Q^\mu}$.
- $\sigma_1^* - \sigma_2^*$ envoient l'espace vectoriel $\mathfrak{a}^{G*}_{\widetilde{P}}$ dans le sous-espace vectoriel $\mathfrak{a}^{P'*}_{Q^\mu}$ de $\mathfrak{a}^{G*}_{Q^\mu}$.

La première assertion de ii) s'en suit immédiatement. Par conséquent, la somme

$$\sum_{\substack{Q^\mu \subseteq P' \\ \exists \sigma \in \mathrm{Hom}(P,P') : \sigma_1' = \sigma_2' = \widetilde{\sigma}}} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G} \cdot 1((\mathcal{E}_{P'}^g)^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}_Q^g) \cdot 1((\mathcal{E}_{P'}^g)^\mu = \mathcal{E}_{Q^\mu}^g)$$
$$= \sum_{Q'' \subseteq P' \subseteq Q'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G}$$

vaut 0 si $Q'' \subsetneq Q'$, et $(-1)^{\dim \mathfrak{a}_{Q'}^G}$ si $Q'' = Q'$.

Pour terminer, supposons que $Q'' = Q'$. Il suffit de montrer que cela implique la condition (c'), ce qui résulte de deux lemmes suivants.

Lemme 9.8. — *L'ensemble* $\{Q^\mu \subseteq P' \subseteq Q' \mid \sigma_1^*(\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{P*}) \subseteq \mathfrak{a}_{Q^\mu}^{P'*}\}$ *est égal à* $\{Q_1 \subseteq P' \subseteq Q'\}$ *pour un certain sous-groupe parabolique* Q_1 *contenant* Q^μ*. De plus,* $\sigma_1^*(\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{P*})$ *rencontre l'intérieur du cône positif engendré par* $\Delta_{Q^\mu}^{Q_1}$*.*

Preuve du lemme 9.8. — La première assertion est évidente.

La deuxième assertion résulte de la définition de Q_1, de la remarque que $\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{P*}$ est engendré par $\Delta_{\widetilde{P}}^P$, et le fait que, pour tout $\alpha \in \Delta_{\widetilde{P}}^P$, ou bien $\sigma_1^*(\alpha)$ ou bien $\sigma_1^*(-\alpha)$ est dans le cône positif engendré par $\Delta_{Q^\mu}^{Q_1}$. $\square$

Lemme 9.9. — *L'ensemble* $\{Q^\mu \subseteq P' \subseteq Q' \mid (\sigma_1^* - \sigma_2^*)(\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{G*}) \subseteq \mathfrak{a}_{Q^\mu}^{P'*}\}$ *est égal à* $\{Q_2 \subseteq P' \subseteq Q'\}$ *pour un certain sous-groupe parabolique* Q_2 *contenant* Q^μ*.*

De plus, $(\sigma_1^* - \sigma_2^*)(\mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^*)$ *rencontre l'intérieur du cône positif engendré par* $\Delta_{Q^\mu}^{Q_2}$*.*

Démonstration. — La première assertion est évidente.

Reste à démontrer la deuxième assertion. Il existe un sous-groupe parabolique standard $P_1 \subseteq Q^\mu$ tel que σ_1 soit le composé d'un élément, noté encore σ_1, de $W(\widetilde{P}, P_1)$ avec l'inclusion $P_1 \subseteq Q^\mu$. On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a}_{P_0}^{G*} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_1^*"'] & \mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{G*} \arrow[d, "\sigma_1^*"] & \\
\mathfrak{a}_{P_0}^{G*} \arrow[r] & \mathfrak{a}_{P_1}^{G*} \arrow[r] & \mathfrak{a}_{Q^\mu}^{G*}
\end{tikzcd}$$

où toutes les flèches horizontales sont des projections canoniques.

De même, il existe un sous-groupe parabolique standard $P_2 \subseteq Q^\mu$ tel que σ_2 soit le composé d'un élément, noté encore σ_2, de $W(\widetilde{P}, P_2)$ avec l'inclusion $P_2 \subseteq Q^\mu$. De plus, on a aussi un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{a}_{P_0}^{G*} \arrow[r] \arrow[d, "\sigma_2^*"'] & \mathfrak{a}_{\widetilde{P}}^{G*} \arrow[d, "\sigma_2^*"] & \\
\mathfrak{a}_{P_0}^{G*} \arrow[r] & \mathfrak{a}_{P_2}^{G*} \arrow[r] & \mathfrak{a}_{Q^\mu}^{G*}
\end{tikzcd}$$

où toutes les flèches horizontales sont des projections canoniques.

Avec ces observations, il suffit donc de démontrer la deuxième assertion dans le cas particulier où $\widetilde{P} = P_0$ et $\sigma_2 = 1$. On le fait par récurrence sur la longueur de σ_1^{-1}. L'assertion est évidente lorsque $l(\sigma_1^{-1}) = 0$, autrement dit $\sigma_1 = 1$. Supposons que l'on a démontré l'assertion pour tout $\sigma_1 \in W$, avec $l(\sigma_1^{-1}) \leq n$ ($n \geq 0$). On va montrer que l'assertion est aussi vraie pour tout $\sigma_1 \in W$, avec $l(\sigma_1^{-1}) = n+1$. En effet, écrivons $\sigma_1^{-1} = s_\alpha w$ où $\alpha \in \Delta_0$, $w \in W$, avec $l(w) = n$ et $w^{-1}\alpha \in \Phi_0^+$. On se ramène donc à montrer que $(w^{-1*} - s_\alpha^*)(\mathfrak{a}_{P_0}^{G*})$ rencontre l'intérieur du cône engendré par $\Delta_{Q^\mu}^{Q_2}$.

Pour tout $x \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G*}$, on notera $\overline{x}$ son image par la projection canonique $\mathfrak{a}_{P_0}^{G*} \twoheadrightarrow \mathfrak{a}_{Q^\mu}^{G*}$. Pour tout $x \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G*}$, on a

$$(w^{-1*} - s_\alpha^*)(x) = w^{-1*}(x) - (\overline{x} + m_x\overline{\alpha}) = (w^{-1*} - 1^*)(x) - m_x\overline{\alpha}$$

pour un certain réel m_x.

Si $m_x\overline{\alpha} = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G*}$, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à w^{-1} pour conclure. Sinon, d'après l'hypothèse de récurrence appliquée à w^{-1}, il existe $x \in \mathfrak{a}_{P_0}^{G*}$ tel que

$$(w^{-1*} - 1^*)(x) = \sum_{\substack{\gamma \in \Delta_{Q^\mu}^{Q_2} \\ \gamma \neq \alpha}} x_\gamma \overline{\gamma} + x_\alpha \overline{\alpha}$$

avec $x_\gamma > 0$ pour tout $\gamma \in \Delta_{Q^\mu}^{Q_2}$ et $\gamma \neq \alpha$. On obtient ainsi

$$(w^{-1*} - s_\alpha^*)(x) = \sum_{\substack{\gamma \in \Delta_{Q^\mu}^{Q_2} \\ \gamma \neq \alpha}} x_\gamma \overline{\gamma} + x'_\alpha \overline{\alpha}.$$

Compte tenu du fait que $w^{-1}\alpha \in \Phi_0^+$ et $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$, on peut écrire

$$(w^{-1*} - s_\alpha^*)(\alpha) = \sum_{\substack{\gamma \in \Delta_{Q^\mu}^{Q_2} \\ \gamma \neq \alpha}} z_\gamma \overline{\gamma} + z_\alpha \overline{\alpha}$$

avec des réels $z_\gamma \geq 0$ et $z_\alpha > 0$. On en déduit que, pour $m \gg 1$ assez grand, $(w^{-1*} - s_\alpha^*)(x + m\alpha)$ est à l'intérieur du cône engendré par $\Delta_{Q^\mu}^{Q_2}$. La preuve est terminée. □

La preuve du lemme 9.7 s'achève. □

Définition 9.10. — *Deux éléments de* $\operatorname{Hom}(\widetilde{P}, Q^\mu)$ *sont dit équivalents si et seulement s'ils se déduisent l'un de l'autre par composition avec un élément de* $W(\widetilde{P}, \widetilde{P})$ *qui commute avec l'inclusion* $\widetilde{P} \subseteq Q^\mu$, *et fixe* $\widetilde{\pi} \otimes \widetilde{\lambda}$.

On remarque que si σ_1 et σ_2 vérifient les conditions (a)-(c) du lemme 9.7, alors pour tout élément σ_1' dans la classe d'équivalence de σ_1 dans $\operatorname{Hom}(\widetilde{P}, Q^\mu)$, σ_1' et σ_2 vérifient aussi les conditions (a)-(c) du lemme 9.7.

Compte tenu de cette remarque, de la proposition 9.5, et du lemme 9.7, il suffit de démontrer la proposition suivante pour terminer la preuve de (9.1).

Proposition 9.11. — *Soit* $\mu > 0$ *une constante positive assez grande en fonction de* K' *et de* p. *Soient* Q, Q^μ, Q' *trois sous-groupes paraboliques standard de* G, *avec* $Q \subseteq Q^\mu \subseteq Q'$. *Soient* $\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}$ *deux classes d'équivalence de* $\operatorname{Hom}(\widetilde{P}, Q^\mu)$ *qui vérifient les conditions* (a)-(c) *du lemme 9.7.*

Alors, lorsque λ_1, λ_2 *décrivent un certain voisinage de* $\operatorname{Im}\Lambda_P$ *dans* Λ_P, *les fonctions*

$$g \mapsto 1(p(\mathcal{E}^g_{Q^\mu}) >_{Q^\mu} p)$$
$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} \sum_{\sigma_1 \in \{\sigma_1\}} E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_1}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \cdot\lambda_1\lambda_P)(g) \cdot \overline{\operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} \sum_{\sigma_2 \in \{\sigma_2\}} E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_2}(\widetilde{\psi}, \cdot\lambda_2\lambda_P)(g)} \cdot d\lambda_P$$

sur l'ouvert dans $Q(F)\backslash G(F)/J$ *constitué des éléments* g *tels que*

$$\{Q^\mu \subseteq P' \mid (\mathcal{E}^g_{P'})^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}^g_Q, (\mathcal{E}^g_{P'})^\mu = \mathcal{E}^g_{Q^\mu}\} = \{Q^\mu \subseteq P' \subseteq Q'\}$$

sont majorées en modules par une fonction positive intégrable.

Preuve de la proposition 9.11. — On peut supposer que les deux opérateurs de résidus qui paraissent dans l'expression ci-dessus ne sont pas identiquement nuls. D'après [15, sections V.3.15 et VI.1.6(c)], pour tous $\sigma_1 \in \{\sigma_1\}$ et $\sigma_2 \in \{\sigma_2\}$, et pour tout $\widetilde{\lambda}'$ dans un certain voisinage de $\widetilde{\lambda}$ dans $\Lambda^P_{\widetilde{P}}$, les caractères $\sigma_1^*(|\widetilde{\lambda}'|)$ et $\sigma_2^*(|\widetilde{\lambda}'|)$ sont ≤ 1 dans $\operatorname{Re}\Lambda^{Q'}_{Q^\mu}$.

Comme $\{\sigma_1\}, \{\sigma_2\}$ vérifient les conditions (a)-(c) du lemme 9.7, on déduit qu'il existe $\lambda_0 \in \operatorname{Re}\Lambda_P$ proche de 1 tel que, pour tous $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2$ dans un certain voisinage $\widetilde{U}$ de $\widetilde{\lambda}$ dans $\Lambda^P_{\widetilde{P}}$, pour tous λ_1, λ_2 dans un certain voisinage U de $\operatorname{Im}\Lambda_P$ dans Λ_P, et pour tous $\sigma_1 \in \{\sigma_1\}$ et $\sigma_2 \in \{\sigma_2\}$, le caractère

$$\sigma_1^*(|\widetilde{\lambda}_1|)\sigma_1^*(|\lambda_1|)\sigma_2^*(|\widetilde{\lambda}_2|)\sigma_2^*(|\lambda_2|)\sigma_1^*/\sigma_2^*(\lambda_0)$$

dans $\operatorname{Re}\Lambda_{Q^\mu}$ se projette dans $\operatorname{Re}\Lambda_{Q^\mu}^{Q'}$ sur un élément $\leq \Lambda < 1$, et dans $\operatorname{Re}\Lambda_{Q'}$ sur un voisinage U' de 1 qui peut être arbitrairement petit en fonction du voisinage U de $\operatorname{Im}\Lambda_P$ dans Λ_P.

En faisant un changement de contour, les fonctions considérées peuvent être écrites sous la forme

$$g \mapsto 1(p(\mathcal{E}^g_{Q^\mu}) >_{Q^\mu} p) \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} \sum_{\sigma_1 \in \{\sigma_1\}} E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_1}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \cdot\lambda_0\lambda_1\lambda_P)(g) \\ \cdot \overline{\operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} \sum_{\sigma_2 \in \{\sigma_2\}} E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_2}(\widetilde{\psi}, \cdot\lambda_0^{-1}\lambda_2\lambda_P)(g)} \cdot d\lambda_P.$$

Pour tout $\lambda_P \in \operatorname{Im}\Lambda_P$, pour tous $\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2 \in \widetilde{U}$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in U$, et pour tous $\sigma_1 \in \{\sigma_1\}$ et $\sigma_2 \in \{\sigma_2\}$, la fonction

$$g \mapsto \frac{|E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_1}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \widetilde{\lambda}_1\lambda_0\lambda_1\lambda_P)(g) \cdot \overline{E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_2}(\widetilde{\psi}, \widetilde{\lambda}_2\lambda_0^{-1}\lambda_2\lambda_P)(g)}|}{\big(\sigma_1^*(|\widetilde{\lambda}_1|)\sigma_1^*(|\lambda_1|)\sigma_2^*(|\widetilde{\lambda}_2|)\sigma_2^*(|\lambda_2|)\sigma_1^*/\sigma_2^*(\lambda_0)\rho^2_{Q^\mu}\big)(g)}$$

est invariante par $M_{Q^\mu}(F)$, $N_{Q^\mu}(\mathbb{A})$ et $A_{Q^\mu}(\mathbb{A})$.

Or d'après (4.4), la projection de l'ouvert U_Q dans $Q(F)\backslash G(F)/J$ constitué des éléments g vérifiant

i) $\{Q^\mu \subseteq P' \mid (\mathcal{E}^g_{P'})^{\mathrm{rc}} = \mathcal{E}^g_Q, (\mathcal{E}^g_{P'})^\mu = \mathcal{E}^g_{Q^\mu}\} = \{Q^\mu \subseteq P' \subseteq Q'\}$,
ii) $p(\mathcal{E}^g_{Q^\mu}) >_{Q^\mu} p$,

se projette sur une partie compacte de $M_{Q^\mu}(F)N_{Q^\mu}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/A_{Q^\mu}(\mathbb{A})$. On en déduit qu'il existe une constante positive C telle que, pour tout $\lambda_P \in \operatorname{Im}\Lambda_P$, pour tous $\lambda_1, \lambda_2 \in U$, et pour tous $\sigma_1 \in \{\sigma_1\}$ et $\sigma_2 \in \{\sigma_2\}$, on ait la majoration

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_1}(\widetilde{\varphi}(\lambda_1\lambda_P), \cdot\lambda_0\lambda_1\lambda_P)(g) \cdot \overline{\operatorname{Res}_{\widetilde{\lambda}} E^{Q^\mu}_{\widetilde{P},\sigma_2}(\widetilde{\psi}, \cdot\lambda_0^{-1}\lambda_2\lambda_P)(g)}| \\ \leq &C \cdot \max_{\lambda \in U'}\{\lambda(g)\} \cdot \Lambda(g) \cdot \rho^2_{Q^\mu}(g). \end{aligned}$$

Pour terminer, remarquons que la dernière fonction sur U_Q est intégrable lorsqu'on choisit le voisinage U' assez petit. La preuve de (9.11) est donc terminée. □

10. Transformées de Fourrier des fonctions de troncature

Dans cette section, fixons un élément $p \in \mathfrak{a}^{G+}_{P_0}$, et un sous-groupe parabolique standard P de G dont le sous-groupe de Lévi sera noté M. L'ensemble $\Gamma_P = X_*(A'_P)/(J + \sum_{\alpha \in \Delta_P} \mathbb{Z}\alpha^\vee)$ est fini et on identifie Γ_P à un ensemble de représentants dans $X_*(A'_P)$.

10.1. — On observe (cf. [5, section 18]) que l'application

$$\coprod_{P_0\subseteq P_1} W(P,P_1) \longrightarrow \mathcal{P}(M) \tag{10.1.1}$$
$$s\in W(P,P_1)\mapsto s^{-1}P_1 s$$

est une bijection.

Soit $Q\in\mathcal{P}(M)$; (P_1,s) désignera le couple associé à Q (10.1.1). On définit

$$\varepsilon(Q)=\sharp\{\alpha\in\Delta_{P_1} : s^{-1}\alpha<0\}.$$

Puis on définit la fonction $1^p_{P,Q}$ sur $M_{P_1}(F)N_{P_1}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J$ comme la fonction caractéristique de l'ensemble suivant

$$(\varpi_\alpha, p^g_P-p)>0 \quad \text{si } s^{-1}\alpha<0,$$
$$(\varpi_\alpha, p^g_P-p)\leq 0 \quad \text{si } s^{-1}\alpha>0$$

pour tout $\alpha\in\Delta_{P_1}$.

On introduit la fonction rationnelle

$$\widehat{1}^p_{P,Q} : \Lambda_P \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$\widehat{1}^p_{P,Q}(\lambda_P)=\prod_{\alpha\in\Delta_Q}\frac{1}{1-\lambda_P(\alpha^\vee)}\times\sum_{\lambda\in\Gamma_P}\frac{(-1)^{\varepsilon(Q)}}{\lambda_P(\lambda+\sum_{\alpha\in\Delta_Q}[(w_\alpha, s^{-1}p-s^{-1}\lambda)]\alpha^\vee)}.$$

Proposition 10.2. — *Avec les notations ci-dessus, pour tout $\lambda\in\Lambda_P$, avec $\lambda\ll 1$, on a l'égalité :*

$$1^p_{P,Q}(.)=\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P}\widehat{1}^p_{P,Q}(\lambda\lambda_P)\cdot s(\lambda\lambda_P)(.)\cdot d\lambda_P. \tag{10.2.1}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que, pour tout choix convenable $\lambda_P\in\Lambda_P$, on a l'égalité

$$\widehat{1}^p_{P,Q}(\lambda_P)=\sum_{x\in X_*(A'_P)/J}\frac{1^p_{P,Q}(sx)}{\lambda_P(x)}.$$

En effet, la proposition résulte de cette égalité et de la théorie de Fourier.

Démontrons l'égalité ci-dessus sous la condition $\lambda_P\ll 1$. Notons

$$\Gamma_{P_1}=X_*(A'_{P_1})/\big(J+\sum_{\alpha\in\Delta_{P_1}}\mathbb{Z}\alpha^\vee\big);$$

c'est un ensemble fini. On a :

$$
\begin{aligned}
\widehat{1}^p_{P,Q}(\lambda_P) &= \sum_{x\in X_*(A'_P)/J} \frac{1^p_{P,Q}(sx)}{\lambda_P(x)} = \sum_{x\in X_*(A'_{P_1})/J} \frac{1^p_{P,Q}(x)}{\lambda_P(s^{-1}x)} \\
&= \sum_{\lambda\in\Gamma_{P_1}} \sum_{\alpha\in\Delta_{P_1}} \sum_{m_\alpha\in\mathbb{Z}} \frac{1^p_{P,Q}(\lambda+m_\alpha\alpha^\vee)}{\lambda_P(s^{-1}\lambda+\sum_{\alpha\in\Delta_{P_1}} m_\alpha s^{-1}\alpha^\vee)} \\
&= \sum_{\lambda\in\Gamma_{P_1}} \frac{1}{\lambda_P(s^{-1}\lambda)} \prod_{\alpha\in\Delta_{P_1}} f(\alpha)
\end{aligned}
$$

où la fonction $f(\alpha)$ est la suivante :

i) Si $s^{-1}\alpha<0$, alors

$$
f(\alpha)=\sum_{m_\alpha\in\mathbb{Z}} \frac{1((w_\alpha,\lambda-p)+m_\alpha>0)}{\left[\lambda_P(s^{-1}\alpha^\vee)\right]^{m_\alpha}} = \frac{-1}{(1-\lambda_P(s^{-1}\alpha^\vee))\left[\lambda_P(s^{-1}\alpha^\vee)\right]^{[(w_\alpha,p-\lambda)]}}.
$$

ii) Si $s^{-1}\alpha>0$, alors

$$
f(\alpha)=\sum_{m_\alpha\in\mathbb{Z}} \frac{1((w_\alpha,\lambda-p)+m_\alpha\le 0)}{\left[\lambda_P(s^{-1}\alpha^\vee)\right]^{m_\alpha}} = \frac{1}{(1-\lambda_P(s^{-1}\alpha^\vee))\left[\lambda_P(s^{-1}\alpha^\vee)\right]^{[(w_\alpha,p-\lambda)]}}.
$$

La preuve est donc terminée. □

Remarque 10.3. — Le referee a remarqué que des calculs analogues ont été faits dans [4, section 6].

10.4. (G,M)**-familles.** — Soit $Q\in\mathcal{P}(M)$. Les racines de (Q,A_M) déterminent une chambre de Weyl positive $\mathfrak{a}_Q^+$ dans l'espace vectoriel $\mathfrak{a}_Q=\mathfrak{a}_M$.

Définition 10.5. — *Deux éléments $Q,Q'\in\mathcal{P}(M)$ sont adjacents si leurs chambres de Weyl positives $\mathfrak{a}_Q^+$ et $\mathfrak{a}_{Q'}^+$ sont adjacentes dans $\mathfrak{a}_M$.*

Soient $Q,Q'\in\mathcal{P}(M)$ deux éléments adjacents. Il existe une racine $\alpha\in\Delta_Q$ telle que $-\alpha\in\Delta_{Q'}$, et l'hyperplan séparant $\mathfrak{a}_Q^+$ et $\mathfrak{a}_{Q'}^+$ soit défini par l'équation $(\alpha^\vee,H)=0$.

Rappelons maintenant la notion de (G,M)-famille d'Arthur, cf. [5, section 17].

Définition 10.6. — *Une collection $\{f_Q:\Lambda_P\longrightarrow\mathbb{C}\}_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ de fonctions holomorphes sur Λ_P est dite une (G,M)-famille si elle vérifie la condition suivante :*

Pour tout couple d'éléments adjacents (Q,Q') de $\mathcal{P}(M)$ dont l'hyperplan séparant $\mathfrak{a}_Q^+$ et $\mathfrak{a}_{Q'}^+$ soit défini par l'équation $(\alpha^\vee,H)=0$, alors

$$
f_Q(\lambda)=f_{Q'}(\lambda)
$$

pour tout $\lambda\in\Lambda_P$ vérifiant $\lambda(\alpha^\vee)=1$.

Avec cette notion, Arthur a montré, cf. [5, lemma 17.1] :

Proposition 10.7 (Arthur). — *Soit* $\{f_Q : \Lambda_P \longrightarrow \mathbb{C}\}_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ *une* (G,M)*-famille* (10.6)*. Alors la fonction méromorphe*

$$\lambda \in \Lambda_P \mapsto \sum_{Q\in\mathcal{P}(M)} \frac{f_Q(\lambda)}{\prod_{\alpha\in\Delta_Q}(1-\lambda(\alpha^\vee))}$$

admet un plongement holomorphe à Λ_P *tout entier.*

Proposition 10.8. — *La famille* $\{(-1)^{\varepsilon(Q)}\prod_{\alpha\in\Delta_Q}\big(1-\lambda_P(\alpha^\vee)\big)\widehat{1}^p_{P,Q}\}_{Q\in\mathcal{P}(M)}$ *est une* (G,M)*-famille.*

Démonstration. — Soient Q et Q' deux éléments adjacents de $\mathcal{P}(M)$. Supposons que le mur séparant Q et Q' est défini par l'équation $\lambda_P(\beta^\vee)=1$ pour une certaine racine $\beta\in\Delta_Q$. On notera (P_1,s) (resp. (P_1',s')) le couple associé à Q (resp. Q') (10.1.1). Il nous faut vérifier que, pour tout $\lambda_P\in\Lambda_P$, avec $\lambda_P(\beta^\vee)=1$, on a

$$(-1)^{\varepsilon(Q)}\prod_{\alpha\in\Delta_Q}\big(1-\lambda_P(\alpha^\vee)\big)\widehat{1}^p_{P,Q}(\lambda_P) = (-1)^{\varepsilon(Q')}\prod_{\alpha\in\Delta_{Q'}}\big(1-\lambda_P(\alpha^\vee)\big)\widehat{1}^p_{P,Q'}(\lambda_P)$$

ou de manière équivalente (10.1)

$$\sum_{\lambda\in\Gamma_P}\frac{1}{\lambda_P(\lambda+\sum_{\alpha\in\Delta_Q}[(w_\alpha,s^{-1}p-s^{-1}\lambda)]\alpha^\vee)}$$
$$=\sum_{\lambda\in\Gamma_P}\frac{1}{\lambda_P(\lambda+\sum_{\alpha\in\Delta_{Q'}}[(w_\alpha,s'^{-1}p-s'^{-1}\lambda)]\alpha^\vee)}.$$

Cela résulte du fait que pour tout $\lambda\in\Gamma_P$, la différence

$$\Big(\lambda+\sum_{\alpha\in\Delta_Q}[(w_\alpha,s^{-1}p-s^{-1}\lambda)]\alpha^\vee\Big)-\Big(\lambda+\sum_{\alpha\in\Delta_{Q'}}[(w_\alpha,s'^{-1}p-s'^{-1}\lambda)]\alpha^\vee\Big)$$

est un multiple entier de $\beta^\vee$, et du fait que $\lambda_P(\beta^\vee)=1$. □

10.9. — On définit $1^p_P(.)$ comme la fonction caractéristique de l'ensemble $\{g\in M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J : p^g_P >_P p\}$. Les mêmes arguments montrent qu'il existe une fonction rationnelle explicite

$$\widehat{1}^p_P : \Lambda_P \longrightarrow \mathbb{C}$$

ayant le dénominateur $\lambda_P\mapsto\prod_{\alpha\in\Delta_P}\big(1-\lambda_P^{-1}(\alpha^\vee)\big)$, de telle sorte que, pour tout $\lambda\gg 1$ dans $\mathrm{Re}\,\Lambda_P$ (5.6), on a l'égalité suivante entre les fonctions sur $M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J$:

$$1^p_P(.) = \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P}\widehat{1}^p_P(\lambda\lambda_P)\cdot(\lambda\lambda_P)(.)\cdot d\lambda_P. \tag{10.9.1}$$

Définition 10.10. — *Soit $P_1 \in \mathcal{P}_0$ qui est associé à P, et soit $s \in W(P, P_1)$. On définit P_1^s le plus grand sous-groupe parabolique standard contenant P_1 qui vérifie la condition suivante : pour toute racine simple $\alpha \in \Delta_{P_1}^{P_1^s}$, on a $s^{-1}\alpha > 0$, autrement dit $s^{-1}\alpha \in \Phi_0^+$.*

Proposition 10.11. — *Soit $Q \in \mathcal{P}(M)$ dont le couple associé est noté (P_1, s) (10.1.1). Alors, pour toute fonction holomorphe $\psi : \Lambda_P \longrightarrow \mathbb{C}$, tout $\lambda_P^0 \in \Lambda_P$, avec $\lambda_P^0 \ll 1$, tout $P_1 \subseteq P' \subseteq P_1^s$ et tout $\lambda_{P'}^0 \in \Lambda_{P'}$, avec $\lambda_{P'}^0 \gg 1$, on a la formule de résidus :*

$$\begin{aligned}&\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \widehat{1}_{P,Q}^p(\lambda_P^0\lambda_P) \cdot \psi(\lambda_P^0\lambda_P) \cdot d\lambda_P \\ &= \sum_{P_1 \subseteq P' \subseteq P_1^s} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P'}} \widehat{1}_{P'}^p(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'}) \cdot \psi(s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})) \cdot d\lambda_{P'}.\end{aligned}$$

Démonstration. — Il suffit de vérifier cette formule pour les fonctions ψ de la forme $\psi(\lambda) = s\lambda(g)$ avec un certain $g \in G(\mathbb{A})$. Pour ces fonctions, l'égalité cherchée résulte des égalités (10.2.1) et (10.9.1). □

11. Recours à la théorie de Fourier

On conserve les notations de la proposition 9.1. D'après cette proposition, la fonction

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\Lambda_P \times \operatorname{Im}\Lambda_P &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda_1, \lambda_2) &\mapsto \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K_{\varphi(.),\psi}^p(\lambda_1, \lambda_2, g) \cdot dg\end{aligned}$$

est bien définie et analytique. Le but de la suite est de calculer la valeur de cette fonction en $(1, 1)$, autrement dit

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K_{\varphi(.),\psi}^p(1, 1, g) \cdot dg.$$

11.1. — Pour le faire, on a recours à la théorie de Fourier. Elle dit que le terme à calculer est la somme des coefficients de Fourier de la fonction $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto K_{\varphi(.),\psi}^p(\lambda_1, \lambda_2, g)$. D'après la définition de la fonction $(\lambda_1, \lambda_2) \mapsto K_{\varphi(.),\psi}^p(\lambda_1, \lambda_2, g)$ (9.1.1), on voit bien que cette fonction est invariante par le plongement diagonal de $\operatorname{Im}\Lambda_P$ dans $\operatorname{Im}\Lambda_P \times \operatorname{Im}\Lambda_P$:

$$K_{\varphi(.),\psi}^p(\lambda_1, \lambda_2, g) = K_{\varphi(.),\psi}^p(\lambda\lambda_1, \lambda\lambda_2, g), \quad \forall \lambda \in \operatorname{Im}\Lambda_P.$$

Cela entraîne que, pour tous caractères $\chi_1 \neq \chi_2$ de $\operatorname{Im}\Lambda_P$, le coefficient de Fourier associé à (χ_1, χ_2) vaut 0. Par conséquent, on a l'égalité :

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K^p_{\varphi(.),\psi}(1,1,g)\cdot dg$$
$$= \sum_{\chi} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_1)} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \chi(\lambda_2) \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g)\cdot dg\cdot d\lambda_2\cdot d\lambda_1$$

où la somme parcourt tout caractère χ de $\operatorname{Im}\Lambda_P$.

11.2. Calculs des coefficients de Fourrier. — Désormais, on fixe χ un caractère de $\operatorname{Im}\Lambda_P$, et on s'intéresse à calculer le terme

$$I(\chi) = \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_1)} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \chi(\lambda_2) \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K^p_{\varphi(.),\psi}(\lambda_1,\lambda_2,g)\cdot dg\cdot d\lambda_2\cdot d\lambda_1.$$

En vertu de (9.1), on peut intervertir l'ordre de l'intégration, puis on fait un changement des variables $\lambda_1 \mapsto \lambda_1/\lambda_P, \lambda_2 \mapsto \lambda_2/\lambda_P$ et remarque que $\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} 1\cdot d\lambda_P = 1$ pour obtenir

$$I(\chi) = \int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} \sum_{P_0\subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}^G_{P'}} \sum_{\sigma\in \operatorname{Hom}(P,P')} \sum_{\delta\in P'(F)\backslash G(F)} 1^p_{P'}(\delta g)$$
$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_1)}\cdot E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi(\lambda_1),\lambda_1)(\delta g)\cdot d\lambda_1 \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \chi(\lambda_2)\cdot \overline{E^{P'}_{P,\sigma}(\psi,\lambda_2)(\delta g)}\cdot d\lambda_2\cdot dg.$$

Pour transformer cette intégrale, on utilise la décomposition spectrale de Langlands (7.3). D'après ce théorème, pour tout sous-groupe parabolique standard P' de G, et pour tout $\sigma\in \operatorname{Hom}(P,P')$, les fonctions

$$g \mapsto \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_1)}\cdot E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi(\lambda_1),\lambda_1)(g)\cdot d\lambda_1$$
$$g \mapsto \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \chi(\lambda_2)\cdot \overline{E^{P'}_{P,\sigma}(\psi,\lambda_2)(g)}\cdot d\lambda_2$$

sont de carré intégrable sur $M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J$.

Comme

$$\int_{N_{P'}(F)\backslash N_{P'}(\mathbb{A})} 1\cdot dn_{P'} = 1,$$

la discussion ci-dessus entraîne :

$$I(\chi) = \sum_{P_0\subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}^G_{P'}} \sum_{\sigma\in \operatorname{Hom}(P,P')} \int_{M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J} 1^p_{P'}(g)$$
$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_1)}\cdot E^{P'}_{P,\sigma}(\varphi(\lambda_1),\lambda_1)(g)\cdot d\lambda_1 \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \chi(\lambda_2)\cdot \overline{E^{P'}_{P,\sigma}(\psi,\lambda_2)(g)}\cdot d\lambda_2\cdot dg.$$

Puis on applique la proposition 10.2. Ainsi, pour tout choix auxiliaire d'un ensemble $\{\lambda_{P'}^0\}_{P_0\subseteq P'}$, avec $\lambda_{P'}^0 \in \operatorname{Re}\Lambda_{P'}$ proche de 1, et $\lambda_{P'}^0 \gg 1$, on a l'égalité :

$$I(\chi) = \sum_{P_0\subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G} \sum_{\sigma\in \operatorname{Hom}(P,P')} \int_{M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P'}} \widehat{1}_{P'}^p(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'}) \cdot (\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})(g)$$
$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_1)} \cdot E_{P,\sigma}^{P'}(\varphi(\lambda_1),\lambda_1)(g)\cdot d\lambda_1 \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \chi(\lambda_2)\cdot \overline{E_{P,\sigma}^{P'}(\psi,\lambda_2)(g)}\cdot d\lambda_2 \cdot d\lambda_{P'}\cdot dg.$$

11.3. — Soit P' un sous-groupe parabolique standard, et soit $\sigma\in\operatorname{Hom}(P,P')$. Soit P_1 un sous-groupe parabolique standard tel qu'il soit associé à P (1.5), et $P_1\subseteq P'$. Calculons l'intégrale :

$$I(P',\sigma,\chi) = \int_{M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P'}} \widehat{1}_{P'}^p(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'}) \cdot (\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})(g)$$
$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_1)} \cdot E_{P,\sigma}^{P'}(\varphi(\lambda_1),\lambda_1)(g)\cdot d\lambda_1 \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \chi(\lambda_2)\cdot \overline{E_{P,\sigma}^{P'}(\psi,\lambda_2)(g)}\cdot d\lambda_2 \cdot d\lambda_{P'}\cdot dg.$$

Compte tenu du fait que $\lambda_{P'}^0\lambda_{P'}\in\Lambda_{P'}$ et après un changement de contour, on obtient :

$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_1)} \cdot E_{P,\sigma}^{P'}(\varphi(\lambda_1),\lambda_1)(g)\cdot (\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})(g)\cdot d\lambda_1$$
$$= \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P_1}} E_{P_1}^{P'}(M_{P,s}^{P_1}((\overline{\chi}\varphi)(\frac{s^{-1}(\lambda_1)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})}), \frac{s^{-1}(\lambda_1)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})}),\lambda_1)(g)\cdot d\lambda_1.$$

De même, on a :

$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P} \overline{\chi(\lambda_2)} \cdot E_{P,\sigma}^{P'}(\psi,\lambda_2)(g)\cdot d\lambda_2$$
$$= \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P_1}} E_{P_1}^{P'}(M_{P,s}^{P_1}(\overline{\chi}(s^{-1}(\lambda_2))\psi, s^{-1}(\lambda_2)),\lambda_2)(g)\cdot d\lambda_2$$

D'après le théorème fondamental de décomposition spectrale (7.3), on obtient :

$$I(P',\sigma,\chi) = \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P'}} \widehat{1}_{P'}^p(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'}) \int_{M_{P'}(F)N_{P'}(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J}$$
$$\times \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P_1}} E_{P_1}^{P'}(M_{P,s}^{P_1}((\overline{\chi}\varphi)(\frac{s^{-1}(\lambda_1)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})}), \frac{s^{-1}(\lambda_1)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})}),\lambda_1)(g)\cdot d\lambda_1$$
$$\times \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P_1}} \overline{E_{P_1}^{P'}(M_{P,s}^{P_1}(\overline{\chi}(s^{-1}(\lambda_2))\psi, s^{-1}(\lambda_2)),\lambda_2)(g)}\cdot d\lambda_2\cdot dg\cdot d\lambda_{P'}$$
$$= \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P'}} \widehat{1}_{P'}^p(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'}) \sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \operatorname{Fixe}_s(\pi)} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_P}$$

$$\left\langle M_{P,s}^{P_1}((\overline{\chi}\varphi)(\frac{\sigma(\lambda_P)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{\sigma(\lambda_P)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}),M_{P,s\sigma}^{P_1}(\overline{\chi}(\lambda_P)\psi,\lambda_P)s\sigma(\lambda_\pi)\right\rangle\cdot d\lambda_P\cdot d\lambda_{P'}$$

$$=\int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P'}}\widehat{1}_{P'}^{p}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in\operatorname{Fixe}_s(\pi)}\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P}\chi(s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P))$$

$$\left\langle M_{P,s}^{P_1}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{\sigma(\lambda_P)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}),M_{P,s\sigma}^{P_1}(\psi,\lambda_P)s\sigma(\lambda_\pi)\right\rangle\cdot d\lambda_P\cdot d\lambda_{P'}.$$

11.4. — Revenons aux calculs du coefficient de Fourier

$$I(\chi)=\sum_{P_0\subseteq P'}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_{P'}^G}\sum_{\sigma\in\operatorname{Hom}(P,P')}I(P',\sigma,\chi).$$

En réindexant la somme, on déduit que, pour tout sous-groupe parabolique standard P_1 associé à P tel que $P_1\subseteq P'$, on a :

$$I(\chi)=\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in\operatorname{Fixe}(\pi)}\sum_{P_0\subseteq P'}(-1)^{\dim\mathfrak{a}_{P'}^G}\sum_{\substack{s\in\operatorname{Hom}(P,P')\\ s\sigma=s}}$$

$$\int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P'}}\widehat{1}_{P'}^{p}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\int_{\operatorname{Im}\Lambda_P}\chi(s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P))$$

$$\left\langle M_{P,s}^{P_1}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{\sigma(\lambda_P)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}),M_{P,s\sigma}^{P_1}(\psi,\lambda_P)s\sigma(\lambda_\pi)\right\rangle\cdot d\lambda_P\cdot d\lambda_{P'}.$$

À un élément $\sigma\in\operatorname{Hom}(P,P')$, on peut associer une application linéaire, notée encore $\sigma:\mathfrak{a}_{P'}\hookrightarrow\mathfrak{a}_P$. En effet, il existe un parabolique $Q\in\mathcal{F}$ qui est associé à P, et $Q\subseteq P'$ tel que σ soit le composé d'un élément $\sigma_0\in W(P,Q)$ avec l'inclusion $Q\subseteq P'$. L'application $\sigma:\mathfrak{a}_{P'}\hookrightarrow\mathfrak{a}_P$ est le composé de l'inclusion $\mathfrak{a}_{P'}\hookrightarrow\mathfrak{a}_Q$ avec l'isomorphisme $\sigma_0:\mathfrak{a}_Q\xrightarrow{\sim}\mathfrak{a}_P$. Elle ne dépend pas du choix de Q et de σ_0.

Fixons un élément $(\sigma,\lambda_\pi)\in\operatorname{Fixe}(\pi)$, en particulier $\sigma\in W(P,P)$. On notera $\sigma:\mathfrak{a}_P\xrightarrow{\sim}\mathfrak{a}_P$ l'isomorphisme qui correspond à σ. Soit $s\in\operatorname{Hom}(P,P')$, avec $s\sigma=s$. On notera $s:\mathfrak{a}_{P'}\hookrightarrow\mathfrak{a}_P$ l'application qui correspond à s. Comme $s\sigma=s$, les deux applications $\sigma s:\mathfrak{a}_{P'}\hookrightarrow\mathfrak{a}_P$ et $s:\mathfrak{a}_{P'}\hookrightarrow\mathfrak{a}_P$ se coïncident.

Il existe un unique sous-groupe parabolique standard P_σ contenant P muni d'un isomorphisme (pas nécessairement unique)

$$\mathfrak{a}_{P_\sigma}\xrightarrow{\sim}\{x\in\mathfrak{a}_P\mid\sigma(x)=x\}.$$

Fixons un tel isomorphisme. Cet isomorphisme détermine une unique application $\tau_\sigma:\mathfrak{a}_{P_\sigma}\hookrightarrow\mathfrak{a}_P$ de telle sorte que $\sigma s=s$ si et seulement si s se factorise à travers τ_σ.

On obtient ainsi :

$$I(\chi) = \sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)} \sum_{P_0\subseteq P'} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G} \sum_{s\in \mathrm{Hom}(P_\sigma,P')}$$

$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P'}} \widehat{1}_{P'}^{p}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'}) \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} \chi(s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P))$$

$$\Big\langle M_{P,s}^{P_1}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}), \frac{\sigma(\lambda_P)}{s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}), M_{P,s\sigma}^{P_1}(\psi,\lambda_P)s\sigma(\lambda_\pi)\Big\rangle \cdot d\lambda_P\cdot d\lambda_{P'}.$$

11.5. — Rappelons une autre interprétation de $\mathrm{Hom}(P,P')$, cf. [5, page 59] : c'est l'ensemble des éléments s dans la réunion sur les sous-groupes paraboliques standard $P_1\subseteq P'$ de $W(P,P_1)$ tels que $s^{-1}\alpha>0$ pour toute racine α dans le sous-ensemble $\Delta_{P_1}^{P'}$ de Δ_{P_1}. Avec cette interprétation, on désignera (P^σ,τ_σ) le couple associé $\tau_\sigma\in \mathrm{Hom}(P,P_\sigma)$.

Soit $s\in\mathrm{Hom}(P_\sigma,P')$, avec $P_0\subseteq P'$. On notera (P'',s) le couple associé à $s\in \mathrm{Hom}(P_\sigma,P')$. Puis on notera (P_1,s_σ) le couple associé à $P^\sigma\subseteq P_\sigma\xrightarrow{s}P''$. On voit facilement que $(P_1,s_\sigma\tau_\sigma)$ est le couple associé à $s\tau_\sigma\in\mathrm{Hom}(P,P')$.

Définition 11.6. — *Soit $s\in\mathrm{Hom}(P_\sigma,P')$. Avec les notations ci-dessus, on dit que (P_1,s_σ) est le couple associé à s. On notera $s_\sigma\tau_\sigma(P)=P_1$.*

Avec ces notations ci-dessus, compte tenu de la proposition 10.11, on obtient donc :

$$I(\chi) = \sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)} \sum_{P_0\subseteq P''} \sum_{s\in W(P_\sigma,P'')} \sum_{P''\subseteq P'\subseteq P''^s} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G}$$

$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P'}} \widehat{1}_{P'}^{p}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'}) \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} \chi(\tau_\sigma^{-1}s_\sigma^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P))$$

$$\Big\langle M_{P,s_\sigma\tau_\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}s_\sigma^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}), \frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}s_\sigma^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}), M_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\psi,\lambda_P)s\sigma(\lambda_\pi)\Big\rangle d\lambda_P\cdot d\lambda_{P'}$$

$$= \sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)} \sum_{P_0\subseteq P''} \sum_{s\in W(P_\sigma,P'')} \sum_{P''\subseteq P'\subseteq P''^s} (-1)^{\dim \mathfrak{a}_{P'}^G}$$

$$\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P'}} \widehat{1}_{P'}^{p}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'}) \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} \chi(\tau_\sigma^{-1}s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P))$$

$$\Big\langle M_{P,s_\sigma\tau_\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}), \frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}s^{-1}(\lambda_{P'}^0\lambda_{P'})\sigma(\lambda_\pi)}), M_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\psi,\lambda_P)s\sigma(\lambda_\pi)\Big\rangle d\lambda_P\cdot d\lambda_{P'}$$

$$= \sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)} \sum_{Q\in\mathcal{P}(M_\sigma)} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P} \int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}} \widehat{1}_{P_\sigma,Q}^{p}(\lambda_{P_\sigma}^0\lambda_{P_\sigma}) \cdot \chi(\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma}^0\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P))$$

$$\Big\langle M_{P,s_\sigma\tau_\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma}^0\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}), \frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma}^0\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}), M_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\psi,\lambda_P)s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)\Big\rangle d\lambda_{P_\sigma}\cdot d\lambda_P.$$

En résumé, on obtient la formule suivante pour le coefficient de Fourier $I(\chi)$:

Proposition 11.7. — *On a :*
(11.7.1)

$$I(\chi)=\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)}\sum_{Q\in\mathcal{P}(M_\sigma)}\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_P}\int_{\mathrm{Im}\,\Lambda_{P_\sigma}}\widehat{1}^p_{P_\sigma,Q}(\lambda^0_{P_\sigma}\lambda_{P_\sigma})\cdot\chi(\tau_\sigma^{-1}(\lambda^0_{P_\sigma}\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P))$$

$$\Big\langle M^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}_{P,s_\sigma\tau_\sigma}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda^0_{P_\sigma}\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda^0_{P_\sigma}\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),M^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}(\psi,\lambda_P)s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)\Big\rangle\cdot d\lambda_{P_\sigma}\cdot d\lambda_P.$$

11.8. — L'expression ci-dessus de $I(\chi)$ dépend du choix auxiliaire d'un ensemble des éléments $\lambda^0_{P_\sigma}\in\mathrm{Re}\,\lambda_{P_\sigma}$, voir la fin de la section 11.2. Grâce à la notion de (G,M)-famille, on pourra se débarrasser de ce choix auxiliaire.

Lemme 11.9. — *Soient Q,Q' deux éléments adjacents de $\mathcal{P}(M_\sigma)$ (10.5) ; on notera*

$$\begin{array}{ccc}
\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tau_\sigma"] & P^\sigma \arrow[r] \arrow[d, "s_\sigma"'] & P_\sigma \arrow[d, "s"] \\ & P_1 \arrow[r] & Q \end{tikzcd} & \textit{resp.} & \begin{tikzcd} P \arrow[r, "\tau_\sigma"] & P^\sigma \arrow[r] \arrow[d, "s'_\sigma"'] & P_\sigma \arrow[d, "s'"] \\ & P'_1 \arrow[r] & Q' \end{tikzcd}
\end{array}$$

les données associées à Q (resp. Q'). Alors, pour tout $\lambda_{P_\sigma}\in\Lambda_{P_\sigma}$ appartenant au mur qui sépare Q et Q', on a l'égalité :

$$\begin{aligned}&\Big\langle M^{P_1}_{P,s_\sigma\tau_\sigma}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),M^{P_1}_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}(\psi,\lambda_P)s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)\Big\rangle\\ =&\Big\langle M^{P'_1}_{P,s'_\sigma\tau_\sigma}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),M^{P'_1}_{P,s'_\sigma\tau_\sigma\sigma}(\psi,\lambda_P)s'_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)\Big\rangle.\end{aligned}$$

Démonstration. — On pose $t_\sigma=s'_\sigma s_\sigma^{-1}\in W(Q_\sigma,Q'_\sigma)$. Comme $\lambda_{P_\sigma}\in\Lambda_{P_\sigma}$ appartient au mur qui sépare Q et Q', on a par définition de l'opérateur d'entrelacements :

$$\begin{aligned}&M^{P'_1}_{P,s'_\sigma\tau_\sigma}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)})\\ =&M^{P'_1}_{P_1,t_\sigma}\Big(M^{P_1}_{P,s_\sigma\tau_\sigma}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_P)}{s_\sigma(\lambda_{P_\sigma})s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)}\Big)\\ =&M^{P'_1}_{P_1,t_\sigma}\Big(M^{P_1}_{P,s_\sigma\tau_\sigma}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}),\frac{s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_P)}{s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)}\Big).\end{aligned}$$

Compte tenu de la proposition 6.7, cette égalité combinée avec l'égalité

$$M^{P'_1}_{P,s'_\sigma\tau_\sigma\sigma}(\psi,\lambda_P)s'_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)=M^{P'_1}_{P_1,t_\sigma}(M^{P_1}_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}(\psi,\lambda_P),s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_P))t_\sigma s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)$$

implique immédiatement l'égalité voulue. La preuve est achevée. □

COROLLAIRE 11.10. — i) *La famille sur* $Q \in \mathcal{P}(M_\sigma)$

$$Q \mapsto \Big\langle M_{P,s_\sigma\tau_\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}), \frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}), M_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\psi,\lambda_P)s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)\Big\rangle$$

est une (G, M_σ)*-famille.*

ii) *La fonction sur* $\operatorname{Im}\Lambda_P \times \Lambda_{P_\sigma}$

$$(\lambda_P, \lambda_{P_\sigma}) \mapsto \sum_{Q\in\mathcal{P}(M_\sigma)} \widehat{1}_{P_\sigma,Q}^{p}(\lambda_{P_\sigma}) \cdot \chi(\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)\lambda_P/\sigma(\lambda_P))$$

$$\Big\langle M_{P,s_\sigma\tau_\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\varphi(\frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}), \frac{\sigma(\lambda_P)}{\tau_\sigma^{-1}(\lambda_{P_\sigma})\sigma(\lambda_\pi)}), M_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\psi,\lambda_P)s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi)\Big\rangle$$

est bien définie et analytique dans un voisinage de $\operatorname{Im}\Lambda_P \times \operatorname{Im}\Lambda_{P_\sigma}$.

En particulier, dans l'intégrande (11.7.1)*, il est loisible de faire tendre* $\lambda_{P_\sigma}^0$ *vers 1.*

Démonstration. — Le i) découle directement de la proposition 10.8 et du lemme précédent. Puis le ii) résulte du i) et de la proposition 10.7. □

THÉORÈME 11.11. — *Avec ces notations, l'intégrale*

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K_{\varphi(.),\psi}(1,1,g)\cdot dg$$

est égale à

$$\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in \mathrm{Fixe}(\pi)} \int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P_\sigma}} \sum_{\lambda_\pi^\sigma} \lim_{\substack{\mu_\sigma\to 1\\ \mu_\sigma\in\Lambda_\sigma}} \sum_{Q\in\mathcal{P}(M_\sigma)} \widehat{1}_{P_\sigma,Q}^{p}(\tau_\sigma(\sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma\sigma(\lambda_\pi))\mu_\sigma)$$

$$\Big\langle M_{P,s_\sigma\tau_\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\varphi(\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma), \tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma), M_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}(\psi,\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma)\lambda_\pi^\sigma)s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi^\sigma)\Big\rangle \cdot d\lambda_{P_\sigma}$$

où, pour tout $(\sigma, \lambda_\pi) \in \mathrm{Fixe}(\pi) \subseteq W(P,P) \times \operatorname{Im}\Lambda_P$*, les* λ_π^σ *décrivent un ensemble d'antécédents par l'application* $\lambda_P \mapsto \tau_\sigma(\sigma(\lambda_P)/\lambda_P\sigma(\lambda_\pi))$ *de l'intersection finie de son image avec* $\operatorname{Im}\Lambda_{P_\sigma}$ *dans* $\operatorname{Im}\Lambda_{\tau_\sigma(P)}$.

Démonstration. — L'intégrale est égale à la somme des coefficients de Fourier

$$\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K_{\varphi(.),\psi}(1,1,g)\cdot dg = \sum_\chi I(\chi)$$

où la somme parcourt tout caractère χ de $\operatorname{Im}\Lambda_P$. Ces coefficients de Fourier sont calculés grâce à la proposition 11.7 et le corollaire 11.10.

Étant donné un élément $(\sigma, \lambda_\pi) \in \mathrm{Fixe}(\pi)$, l'homomorphisme

$$\operatorname{Im}\Lambda_P \longrightarrow \operatorname{Im}\Lambda_P$$
$$\lambda_P \mapsto \sigma(\lambda_P)/\lambda_P$$

est pour image $\tau_\sigma^{-1}(\operatorname{Im}\Lambda^{P_\sigma}_{\tau_\sigma(P)})$, et pour noyau $\tau_\sigma^{-1}(\operatorname{Im}\Lambda_{P_\sigma})$. De plus, ces deux sous-groupes engendrent $\operatorname{Im}\Lambda_P$, et leur intersection est finie. La conclusion en résulte immédiatement. □

12. Développement spectral de la formule des traces

Soient (P,π) une paire discrète avec π unitaire et $f : G(\mathbb{A})/J \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à support compact invariante à gauche et à droite par un sous-groupe ouvert K' de K. On conserve les notations de la section précédente.

On définit :

$$\operatorname{Tr}^p_{(P,\pi)}(f) = \frac{1}{|\operatorname{Fixe}(\pi)|}\sum_{\varphi\in\mathcal{B}_{K'}(P,\pi)}\int_{G(F)\backslash G(\mathbb{A})/J} K^p_{f(\varphi,.),\varphi}(1,1,g)\cdot dg.$$

Puis on définit l'opérateur tronqué $M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma)$ sur l'espace $L^2(M_P(F)N_P(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})/J,\pi)$ par la formule :

$$\sum_{\lambda_\pi^\sigma}\lim_{\substack{\mu_\sigma\to 1\\ \mu_\sigma\in\Lambda_\sigma}}\sum_{Q\in\mathcal{P}(M_\sigma)}\widehat{1}^p_{P_\sigma,Q}(\tau_\sigma(\sigma(\lambda_\pi^\sigma)/\lambda_\pi^\sigma\sigma(\lambda_\pi))\mu_\sigma)\cdot$$

$$\left(M^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}_{P,s_\sigma\tau_\sigma\sigma}(\cdot,\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma)\lambda_\pi^\sigma)s_\sigma\tau_\sigma\sigma(\lambda_\pi^\sigma)\right)^{-1}\circ M^{s_\sigma\tau_\sigma(P)}_{P,s_\sigma\tau_\sigma}(\cdot,\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma)\circ f(.,\tau_\sigma^{-1}(\lambda_\sigma/\mu_\sigma)\lambda_\pi^\sigma).$$

On rassemble tous les calculs dans les sections précédentes pour obtenir l'expression fine du côté spectral :

Théorème 12.1. — *Avec les notations précédentes, on a l'égalité :*

$$\operatorname{Tr}^p_{(P,\pi)}(f) = \frac{1}{|\operatorname{Fixe}(\pi)|}\sum_{(\sigma,\lambda_\pi)\in\operatorname{Fixe}(\pi)}\int_{\operatorname{Im}\Lambda_{P_\sigma}}\operatorname{Tr}(M^p_{P,\pi,\sigma,\lambda_\pi}(.,f,\lambda_\sigma))\cdot d\lambda_{P_\sigma}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. G. Arthur – « A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$ », *Duke Math. J.* **45** (1978), p. 911–952.

[2] ______, « On a family of distributions obtained from Eisenstein series. II. Explicit formulas », *Amer. J. Math.* **104** (1982), p. 1289–1336.

[3] ______, « On the inner product of truncated Eisenstein series », *Duke Math. J.* **49** (1982), p. 35–70.

[4] ______, « A local trace formula », *Publ. Math. I.H.É.S.* **73** (1991), p. 5–96.

[5] ______, « An introduction to the trace formula », in *Harmonic analysis, the trace formula, and Shimura varieties*, Clay Math. Proc., vol. 4, Amer. Math. Soc., 2005, p. 1–263.

[6] K. A. Behrend – « Semi-stability of reductive group schemes over curves », *Math. Ann.* **301** (1995), p. 281–305.

[7] A. Borel & J. Tits – « Groupes réductifs », *Publ. Math. I.H.É.S.* **27** (1965), p. 55–150.

[8] V. G. Drinfel′d – « Varieties of modules of F-sheaves », *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **21** (1987), p. 107–122.

[9] ———, « Cohomology of compactified moduli varieties of F-sheaves of rank 2 », *Journal of Soviet Mathematics* **46** (1989), p. 1789–1821.

[10] D. Kazhdan & Y. Varshavsky – en préparation.

[11] J.-P. Labesse – « La formule des traces d'Arthur-Selberg », *Astérisque* **133-134** (1986), p. 73–88, Séminaire Bourbaki, vol. 1984/85.

[12] L. Lafforgue – « Chtoucas de Drinfeld et conjecture de Ramanujan-Petersson », *Astérisque* **243** (1997).

[13] ———, « Chtoucas de Drinfeld et correspondance de Langlands », *Invent. Math.* **147** (2002), p. 1–241.

[14] G. Laumon & M. Rapoport – « The Langlands lemma and the Betti numbers of stacks of G-bundles on a curve », *Internat. J. Math.* **7** (1996), p. 29–45.

[15] C. Mœglin & J.-L. Waldspurger – *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein*, Progress in Mathematics, vol. 113, Birkhäuser, 1994.

[16] B. C. Ngô – « Fibration de Hitchin et endoscopie », *Invent. Math.* **164** (2006), p. 399–453.

[17] T. Ngo Dac – « Sur le développement spectral de la formule des traces d'Arthur-Selberg sur les corps de fonctions II », prépublication 2008.

[18] Y. Varshavsky – « Moduli spaces of principal F-bundles », *Selecta Math. (N.S.)* **10** (2004), p. 131–166.