PERRIN.

Sur les cas de résolubilité par radicaux de l'équation du cinquième degré

Bulletin de la S. M. F., tome 11 (1883), p. 61-65
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1883__11__61_1>

Sur les cas de résolubilité par radicaux de l'équation du cinquième degré; par M. Perrin.

(Séance du 15 décembre 1882.)

1. Dans une Note insérée au *Bulletin* (t. X, n° 3, p. 139), j'ai montré que, lorsque les coefficients de l'équation du cinquième degré privée de second terme

$$x^5 + 10px^3 + 10qx^2 + 5rx + s = 0 \tag{1}$$

satisfont aux deux conditions

$$q = 0, \quad r = 4p^2,$$

les cinq racines de l'équation ont pour expression

$$a + b,$$
$$\theta a + \theta^4 b,$$
$$\theta^2 a + \theta^3 b,$$
$$\theta^3 a + \theta^2 b,$$
$$\theta^4 a + \theta b,$$

θ étant une racine cinquième imaginaire de l'unité, et a et b ayant respectivement pour valeurs

$$\sqrt[5]{\frac{1}{2}\left(-s + \sqrt{s^2 + 128p^5}\right)}, \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2}\left(-s - \sqrt{s^2 + 128p^5}\right)},$$

où l'on peut remarquer que $s^2 + 128p^5$ est la racine carrée du discriminant : ce qui complète l'analogie de cette formule de résolution avec la formule de Cardan pour l'équation du troisième degré.

2. Il existe un autre cas où les racines de l'équation (1) s'expriment encore au moyen de deux radicaux cinquièmes seulement. Supposons qu'on ait d'une manière générale

$$x_p = \theta^p a + \theta^{2p} b, \tag{2}$$

p devant recevoir les cinq valeurs successives 1, 2, 3, 4, 5, de telle sorte que x_p représente successivement les cinq racines de l'équation (1). Élevons à la puissance m les deux membres de l'équation (2) :

$$(x_p)^m = \theta^{mp} a^m + m\theta^{(m+1)p} a^{m-1} b + \ldots$$
$$+ \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k} \theta^{(m+k)p} a^{m-k} b^k + \ldots + \theta^{2mp} b^m.$$

Ajoutons membre à membre les cinq équations semblables correspondant aux cinq racines. Nous obtiendrons dans le premier membre la somme Σx^m des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des cinq racines ; dans le second, il ne subsistera que les termes dans lesquels l'exposant de θ est égal à p multiplié par un multiple de 5 ; chacun de ces termes se trouvera d'ailleurs multiplié par 5. On aura ainsi, en faisant successivement $m = 1, 2, 3, 4, 5,$

$$\begin{aligned}
\Sigma x &= 0,\\
\Sigma x^2 &= 0,\\
\Sigma x^3 &= 15ab^2,\\
\Sigma x^4 &= 20a^3b,\\
\Sigma x^5 &= 5(a^5+b^5).
\end{aligned}$$

Comparant ces valeurs des sommes de puissances semblables des racines à celles que donnent les formules de Newton en fonction des coefficients de l'équation, il vient

$$\begin{aligned}
p &= 0,\\
2q &= -ab^2,\\
r &= -a^3b,\\
s &= -(a^5+b^5),
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$a^5 = -\frac{r^2}{2q}, \quad b^5 = \frac{8q^3}{r},$$

avec l'équation de condition

$$(3) \qquad 16q^4 + 2qrs - r^3 = 0.$$

Si donc l'équation (1) est de la forme

$$x^5 + 10qx^2 + 5rx + s = 0,$$

et si les coefficients q, r, s satisfont à la relation (3), les cinq racines de l'équation seront données par la formule

$$(4) \qquad x_p = -\theta^p\sqrt[5]{\frac{r^2}{2q}} + \theta^{2p}\sqrt[5]{\frac{8q^3}{r}} \quad (p = 1, 2, 3, 4, 5),$$

où θ est une même racine cinquième imaginaire de l'unité, quelconque d'ailleurs, et où les radicaux sont pris avec leurs valeurs arithmétiques.

3. Les deux formes $\theta^p a + \theta^{-p} b$ et $\theta^p a + \theta^{2p} b$, qui viennent d'être considérées successivement comme expressions de la racine x_p de l'équation du cinquième degré, sont des cas particuliers de la forme générale

$$(5) \qquad x_p = \theta^p a + \theta^{2p} b + \theta^{3p} c + \theta^{4p} d,$$

à laquelle on sait que doit pouvoir se ramener l'expression de la racine de toute équation du cinquième degré privée de second terme et résoluble par radicaux; a^5, b^5, c^5, d^5 étant d'ailleurs racines d'une équation du quatrième degré dont les coefficients doivent être des fonctions rationnelles des coefficients de la proposée.

D'autre part, Lagrange a montré que, pour l'équation générale du cinquième degré, les coefficients de la résolvante du quatrième degré, qui donneraient a^5, b^5, c^5, d^5, dépendent d'une seule équation du sixième degré; il semble donc que toutes les fois qu'une équation du cinquième degré est résoluble par radicaux, l'équation correspondante de Lagrange du sixième degré doive avoir au moins une racine rationnelle; et il serait intéressant de pouvoir la former explicitement. Malheureusement la méthode de Lagrange conduit à des calculs à peu près impraticables, et il ne paraît pas que ces calculs aient jamais été poursuivis jusqu'au bout : les géomètres qui se sont occupés de cette question ont préféré se donner *a priori* des fonctions des racines choisies de manière à n'avoir que six valeurs distinctes, et à se prêter au calcul direct des coefficients de l'équation du sixième degré dont elles dépendent; c'est ainsi que M. Hermite a considéré la fonction

$$\begin{aligned}&(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_4)^2(x_4-x_5)^2(x_5-x_1)^2\\ &\quad+(x_1-x_3)^2(x_3-x_5)^2(x_5-x_2)^2(x_2-x_4)^2(x_4-x_1)^2,\end{aligned}$$

dont les six déterminations sont racines d'une équation ayant pour coefficients des invariants de la forme du cinquième ordre. Une autre réduite du sixième degré, calculée par M. Cayley, est celle dont les racines sont les six déterminations de l'expression

$$(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5+x_5x_1)-(x_1x_3+x_3x_5+x_5x_2+x_2x_4+x_4x_1),$$

mais cette réduite, de forme plus simple que la précédente, ne possède pas le même caractère d'invariance des coefficients.

En appliquant à la forme générale (5) exactement le même procédé de calcul employé ci-dessus pour le cas particulier de la forme (2), j'ai été conduit à une nouvelle réduite du sixième ordre, d'une simplicité remarquable. Les calculs, bien que ne présentant aucune difficulté, sont trop longs pour être développés ici, ainsi que les conséquences intéressantes qui se déduisent du résultat obtenu, et je me propose d'en faire l'objet d'un travail spécial. Je crois cependant devoir donner immédiatement la forme de la réduite et l'énoncé du principal théorème qui s'y rattache. Voici cet énoncé :

Soient U *la forme générale binaire du cinquième ordre;* T *son covariant canonique* (*covariant du troisième ordre, du troisième degré par rapport aux coefficients de* U, *et dont les trois facteurs permettent de transformer* U *en une somme de trois cinquièmes puissances*); P *son covariant linéaire le plus simple* (*du cinquième degré par rapport aux coefficients de* U); *posons*

$$25\mathrm{T}^2 - \mathrm{UP} = 0.$$

Cette équation du sixième ordre par rapport aux variables et du sixième degré par rapport aux coefficients est la réduite dont il s'agit. Si l'on peut, par un moyen quelconque, déterminer l'une des racines $\frac{x}{y}$ *de cette équation ou, ce qui revient au même, l'un des facteurs du covariant* $25\mathrm{T}^2 - \mathrm{UP}$, *il suffira de résoudre ensuite deux équations successives du second degré pour obtenir les quatre quantités* a^5, b^5, c^5, d^5, *et par suite l'expression des cinq racines de l'équation* $\mathrm{U} = 0$, *sous la forme* (5), *à condition d'y ajouter le terme constant provenant du second coefficient de* U, *lorsqu'on ne l'a pas fait préalablement disparaître.*