

# Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## **ESTIMATIONS DE LA FONCTION MAXIMALE DE HARDY-LITTLEWOOD**

Noël Lohoué

**Tome 135  
Fascicule 3**

**2007**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 1-

## ESTIMATIONS DE LA FONCTION MAXIMALE DE HARDY-LITTLEWOOD

PAR NOËL LOHOUÉ

---

RÉSUMÉ. — On montre que la fonction maximale de Hardy-Littlewood est de type  $(p, p)$  sur certains groupes de Lie et variétés de Cartan-Hadamard.

ABSTRACT (*Estimations of the maximal Hardy-Littlewood function*)

We prove  $L^p$  boundness of Hardy-Littlewood maximal functions on a class of Lie groups and Cartan-Hadamard manifolds.

### 1. Introduction

On se donne un espace métrique  $M$  muni d'une distance  $\delta$  et d'une mesure  $d\sigma$  qui charge les boules de  $M$  de centre arbitraire et de rayon quelconque d'une masse finie. Si  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  est une fonction  $d\sigma$  mesurable, on s'intéresse à la fonction  $f^*$  définie par

$$f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |f(y)| d\sigma(y)$$

où  $B_x(r)$  désigne la boule, au sens de  $\delta$ , de centre  $x$  et de rayon  $r$ ,  $|B_x(r)|$  sa mesure.

---

*Texte reçu le 25 octobre 2005, révisé le 19 décembre 2006*

NOËL LOHOUÉ, Université de Paris-Sud, Mathématique, bât. 425, UMR 8628 du CNRS, 91405 Orsay Cedex (France) • *E-mail* : [noel.lohoue@math.u-psud.fr](mailto:noel.lohoue@math.u-psud.fr)

Classification mathématique par sujets (2000). — 22E80 ; 43A90, 60B90.

Mots clefs. — Fonction maximale.

On voudrait prouver des estimations du style, pour  $1 < p < \infty$ , il existe une constante  $C(p)$  telle que

$$\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p.$$

Ceci est un vieux thème et l'on sait bien que cette inégalité ne peut pas être prouvée en toute généralité pour tout triplet  $(M, \delta, d\sigma)$ .

On s'intéresse dans cet article à deux situations particulières où l'on veut utiliser la géométrie de  $(M, \delta, d\sigma)$  pour donner une réponse positive à la question ci-dessous.

- a)  $M$  est un groupe de Lie non moyennable, la distance  $\delta$  est la distance de contrôle associée à un système de champs de Hörmander invariants à gauche et  $d\sigma$  est la mesure de Haar sur  $G$ , bi-invariante.
- b)  $M$  est une variété de Cartan Hadamard avec quelques contraintes sur la courbure ; la distance associée sur  $M$  est la distance riemannienne et la mesure est induite par cette structure.

Ces deux exemples ont un point commun ; le volume des boules de grand rayon croît exponentiellement, ce qui rend toutes les techniques usuelles inutilisables : on ne peut faire appel au lemme de recouvrement que pour les boules de rayon plus petit qu'un nombre donné. Par contre, si  $M$  est à courbure de Ricci positive ou nulle, on sait qu'alors  $M$  est un espace de nature homogène et on a droit à tout.

L'énoncé général suivant indique la direction que l'on veut suivre.

PROPOSITION 1. — *Soit  $(M; \delta)$  un espace métrique muni d'une mesure  $d\sigma$  comme décrit ci-dessus. On suppose qu'il existe une constante  $0 < C < \infty$  telle que pour tout couple de point  $(x, y)$ ,*

$$C^{-1} < \frac{|B_x(r)|}{|B_y(r)|} < C \quad \text{et} \quad |B_x(2r)| < C|B_x(r)|,$$

*pour  $0 < r < 1$ . Soit  $0$  un point distingué de  $M$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe pour tout  $1 < p < \infty$ , une constante  $C_\varepsilon(p)$  telle que*

$$\| (1 + |B_0(\tilde{\delta})|)^{-\varepsilon} f^* \|_p \leq C_\varepsilon(p) \|f\|_p.$$

*où  $\tilde{\delta}$  est la fonction  $\tilde{\delta}(x) = \delta(x, 0)$ .*

Les deux résultats sur lesquels on veut s'attarder sont indiqués ci-dessous.

REMARQUE. — La proposition 1 s'applique si  $G$  est un groupe unimodulaire,  $\delta$  une métrique invariante à gauche sur  $G$  et  $d\sigma$  la mesure de Haar. Dans le premier résultat on va essayer d'enlever  $\varepsilon$  pour un cas particulier. Pour énoncer ce premier résultat que l'on veut démontrer on aura besoin de quelques notations.

**Notations.** — Soit  $G$  un groupe de Lie connexe, unimodulaire, non compact, non moyennable. On note

$$G = H \oplus G_0$$

sa décomposition de Levi. On suppose que la partie résoluble distinguée  $H$  de  $G$  est unimodulaire, à croissance polynomiale, de dimension  $D$  à l'infini (voir [9] pour la notion de dimension à l'infini). On suppose aussi que la partie semi-simple  $G_0$  est de centre fini, connexe, de dimension topologique  $m_0$ .

On note  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de  $G$ ,  $\mathcal{H}$  celle de  $H$ ,  $\mathcal{G}_0$  celle de  $G_0$  et  $\sigma$  la représentation de  $\mathcal{G}_0$  sur  $\mathcal{H}$ . Alors  $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{H}_i$  où  $\sigma|_{\mathcal{H}_i} = \sigma_i$  est une sous-représentation irréductible de  $\mathcal{G}_0$  et de poids  $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{m_{i_1}}, m_i$ . On pose

$$\Theta = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{m, m_i} m_{ij} \alpha_{ij}$$

Par la suite on va considérer une distance de contrôle associée à un système de Hörmander particulier pour des simples raisons d'exposition. La considération d'un système général alourdirait considérablement le texte sans simplifier la compréhension des idées développées.

Notons  $\mathcal{G}_0 = k_0 \oplus p_0$  une décomposition de Cartan de  $\mathcal{G}_0$ ,  $K_0$  le sous-groupe compact maximal associé à  $k_0$ . On considère sur  $p_0$  une base orthonormée pour le produit scalaire  $\langle X, Y \rangle_0 = -B(X, \Theta_0 Y)$  où  $B$  est la forme de Killing,  $\Theta_0$  l'involution de Cartan.

Soit  $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_k$  un système de Hörmander de champs invariants à gauche sur  $G$  tels que :

- $X_1, \dots, X_\ell$  sont dans  $\mathcal{H}$  et  $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_\ell$  est un système de Hörmander sur  $H$  ;
- $X_{\ell+1}, \dots, X_s$  sont dans  $k_0$  et  $X_{s+1}, \dots, X_k$  dans  $p_0$  et les  $X_1, \dots, X_k$  sont linéairement indépendants.

On considère sur  $p_0$  le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$  tel que  $\langle X_i, X_j \rangle_1 = \delta_{ij}$  pour  $s+1 \leq i, j \leq k$ . On prolonge ce produit scalaire à  $\mathcal{G}$  de telle sorte que  $p_0$  et  $k_0$  soient orthogonaux.

On pose

$$\gamma_0 = \sup_{k' \in K_0} \|\mathrm{Ad}(k')\|,$$

où  $\|\mathrm{Ad}(k')\|$  est la norme de  $\mathrm{Ad}(k')$  agissant sur  $p_0$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ .

Soient

$$\|\alpha\| = \sup_{i,j} \|\alpha_{ij}\|, \quad \beta = \gamma_0^2 \|\alpha\|.$$

On note  $\delta_0$  la distance sur  $G_0$ , invariante à gauche dont la restriction au plan tangent à l'origine correspond au produit scalaire  $\langle X, Y \rangle_0$ .

Soient  $\mathcal{A}^+$  une chambre de Weyl positive associée à la décomposition de  $\mathcal{G}_0 = k_0 \oplus p_0$  et  $2\rho$  la somme des racines positives comptées avec leurs multiplicités relatives à  $\mathcal{A}^+$ .

Soit  $\mathcal{H}_{ij}^1$  l'espace radiciel de poids  $\alpha_{ij} \geq 0$  sur  $\mathcal{A}$ , si  $\mathcal{H}_{ij}^2$  est l'espace radiciel de poids  $-\alpha_{ij}$ ; on suppose que  $K$  est transitif sur les sphères de  $\mathcal{H}_{ij}^1 \oplus \mathcal{H}_{ij}^2$ .

Sous ces conditions on a l'énoncé suivant :

THÉORÈME 2. — *On suppose qu'il existe  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$  tel que*

$$0 < \frac{D\beta}{\|2\rho + \Theta\|_0 - 2\|\rho\|_0(1 - \varepsilon)} < 1.$$

*Alors pour tout  $p > 1/(1 - \varepsilon)$  il existe  $C(p)$  telle*

$$\|f^*\|_p \leq C(p)\|f\|_p$$

*où  $\|2\rho + \Theta\|_0$ ,  $2\|\rho\|_0$  est la norme de  $2\rho + \Theta$ ,  $2\rho$  donnée par le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ .*

REMARQUE. — L'exemple type où l'hypothèse du théorème s'applique est  $\mathbb{R}^2 \rtimes \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . Les groupes concernés sont non moyennables et non semi-simples. Ils échappent à un contrôle brutal par Kunze-Stein. On va utiliser de la géométrie pour s'y ramener.

Au cours de la preuve du théorème on montrera aussi l'énoncé suivant :

PROPOSITION 3. — *Soit  $\delta$  une métrique comme ci-dessus. Soit  $\chi_r$  la fonction caractéristique de la boule de rayon  $r$ , notée  $B_r$ ; on considère  $\beta_r = \chi_r/|B_r|$  où  $|B_r|$  est le volume de  $B_r$ . Si  $1/(1 - \varepsilon) < p < 1/\varepsilon$ , il existe  $\alpha(p) > 0$  telle que*

$$\|\beta_r\|_{p \rightarrow p} \leq C_1 e^{-\alpha(p)r} \quad \text{où } C_1 \text{ est une constante}$$

La proposition 3 est un cas particulier d'une conjecture de [8].

THÉORÈME 4. —  *$M$  est une variété de Cartan-Hadamard et les  $L^p$  que l'on considère sont relatifs à la mesure riemannienne. On fait sur  $M$  les hypothèses suivantes :*

- a) *La courbure de Ricci de  $M$  est minorée par  $-b^2$  où  $b \in \mathbb{R}^*$ .*
- b) *Pour tout  $x$  fixé, on note  $\Theta_x(s, \omega)$  la densité de volume en coordonnées polaires exponentielles au point  $x$  de  $M$  et  $H_x(r, \omega)$  la courbure moyenne de la sphère de centre  $x$  et de rayon  $r$  évaluée au point  $\exp_x r\omega$ , et l'on suppose que*

$$\sigma_0 = \inf_{x, r, \omega} H_x(r, \omega) > 0$$

- c) Soit  $\psi_x(y) = e^{-\phi_x(\delta(x,y))} = [\int_{\Sigma_{n-1}} \Theta_x(r, \omega) d\omega]^{-1}$  avec  $y = \exp_x r\omega$ , l'inverse de l'aire de la sphère de centre  $x$  et de rayon  $r$  pour la mesure induite. On suppose qu'il existe  $0 < \sigma < \sigma_0$  telle que

$$-\frac{d^2\varphi_x(r)}{dr^2} + \left(\frac{d\varphi_x(r)}{dr}\right)^2 - \tau \frac{d\varphi_x}{dr} + \sigma^2 \geq 0$$

où  $\tau = \sup_{\|\omega\|=1} H_x(r, \omega)$  et que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\psi(x; y)}{G_{\sigma(x, y)}} < C_1$$

où  $G_{\sigma}(x, y)$  est la fonction de Green de  $\Delta + \sigma^2$  et  $C_1$  une constante qui ne dépend pas de  $y$ .

Sous les hypothèses a), b), c), il existe une constante  $1 < p_0 < \infty$  telle que pour tout  $p_0 < p$  il existe  $C(p)$  telle que

$$\|f^*\|_p \leq C(p) \|f\|_p.$$

COROLLAIRE 5. — On suppose que la courbure  $C$  de  $M$  vérifie l'inégalité

$$-b^2 \leq C \leq -a^2, \quad \text{avec } 0 < a < b < \frac{5a}{4}.$$

Si  $p > p_0 = a/(3a - 2b)$  alors il existe  $C(p)$  tel que  $\|f^*\|_p \leq C(p) \|f\|_p$ .

Ce corollaire est établi dans [4].

## 2. Démonstration des résultats

L'idée générale de la preuve consiste à utiliser la troncature de [2] :

$$\begin{aligned} f^*(x) &\leq \sup_{r \leq 1} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |f(y)| d\sigma(y) \\ &\quad + \sup_{r \geq 1} \frac{1}{|B_x(r)|} \int_{B_x(r)} |f(y)| d\sigma(y) = f_1^*(x) + f_2^*(x). \end{aligned}$$

Sous les hypothèses de la proposition 1 d'après les résultats classiques pour tout  $1 < p < \infty$ , il existe une constante  $C(p)$  telle que

$$\|f_1^*\|_p \leq C(p) \|f\|_p.$$

Cette inégalité vaut pour les boules du théorème 2 d'après [7] ainsi que pour celles du théorème 4 car  $M$  est à géométrie bornée et l'on utilise un lemme de recouvrement pour les boules de rayon plus petit que 1.

Dans les trois cas, il faut s'occuper de  $f_2^*(x)$ . On remarque dans les trois cas que

$$f_2^*(x) \leq \int_M \inf \left\{ |B_x(1)|^{-1}, \frac{1}{|B_x(\delta(x, y))|} \right\} |f(y)| d\sigma(y).$$

Mais par hypothèse  $|B_x(1)| \geq C^{-1}|B_0(1)|$  où 0 est un point distingué sur  $M$ , comme  $|B_x(r)|$  est croissante  $|B_x(\delta(x, y))| \geq C^{-1}|B_0(1)|$  pour  $\delta(x, y) \geq 2$  et

$$\begin{aligned} f_2^*(x) &\leq C_1 \int_{1 < \delta(x, y) \leq 2} |f(y)| d\sigma(y) \\ &\quad + C_2 \int_{\delta(x, y) \geq 2} \frac{1}{|B_x(\delta(x, y))|} |f(y)| d\sigma(y) = f_3^*(x) + f_4^*(x). \end{aligned}$$

Comme  $\|f_3^*\|_p \leq C_p \|f\|_p$  pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , il faut étudier  $f_4^*$ , que l'on note  $S(f)$  pour simplifier.

**2.1. Preuve de la proposition 1.** — On considère le noyau

$$K(x, y) = \frac{1}{|B_x(\delta(x, y))|} \mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq 2}$$

où  $\mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq 2}$  est la fonction caractéristique de  $\{x, y \in M ; \delta(x, y) \geq 2\}$ .

Alors pour  $x$  fixé (resp.  $y$  fixé),  $K(x, y)$  comme fonction de  $y$  (resp. fonction de  $x$ ) est dans  $L^{1, \infty}(M)$  uniformément en  $x$  (resp. en  $y$ ). On a en effet

$$|\{y ; K(x, y) > \alpha\}| \leq \left| B_x \left( \gamma_x \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right) \right| = \frac{1}{\alpha}$$

où  $\gamma_x$  est l'inverse de la fonction  $r \mapsto |B_x(r)|$ . On a de même

$$|\{x ; K(x, y) > \alpha\}| = \left| B_x \left[ \gamma_y \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right|$$

et par hypothèse

$$|B_x(r)| \leq C |B_y(r)| \quad \text{et} \quad \left| B_x \left[ \gamma_y \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right| \leq C \left| B_y \left[ \gamma_y \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right| = \frac{C}{\alpha}.$$

d'où le résultat annoncé.

Comme  $|K(x, y)| \leq C$ , pour tout  $x$  (resp. tout  $y$  fixé),  $K(x, y)$  comme fonction de  $y$  (resp. fonction de  $x$ ) est dans  $L^p(M)$  pour tout  $1 < p \leq \infty$ , il s'ensuit d'après [3] que

$$\|S(f)\|_q \leq C \|f\|_p$$

si  $1/q = 1/p + 1/r - 1 = 1/p - 1/r'$ . Choisissons  $r'$  tel que  $\varepsilon > 1/r'$  et  $r \gg 1$ , Alors d'après ce qui a été dit précédemment la fonction de  $x$ ,  $(1 + |B_0(\delta(0, x))|)^{-\varepsilon}$ , est dans  $L^{r'}(M)$  et

$$\|(1 + |B_0(\delta(0, x))|)^{-\varepsilon} S(f)\| \leq C \|f\|_p$$

d'où le résultat de la proposition.

**2.2. Preuve du théorème 2.** — La proposition suivante sera déterminante par la suite.

PROPOSITION 6. — Soit  $G = H \otimes G_0$  comme ci-dessus. On considère  $z_0 = (x_1, y_1)$  avec  $x_1$  dans  $H$  et  $y_1$  dans  $G_0$ . Alors si  $\delta_H$  désigne la distance de contrôle associée au système de Hörmander dans  $H$ ,

$$\log [\delta_H(x_1, e)] \leq \beta \delta_G(z_0, e) + C$$

où  $C$  est une constante, pourvu que  $\delta_H(x_1, e) \geq C_2$  et  $\delta_{G_0}(e, y_1) \geq C_2$  où  $C_2$  est une constante suffisamment grande.

Preuve de la proposition. — Soient  $X_1, \dots, X_k$  comme précédemment. Si  $X_j$  est dans  $\mathcal{H}$ , on a  $\widetilde{X}_j f(x, y) = df(x \cdot y \exp tX_j, y)/dt|_{t=0}$  pour toute fonction  $C^\infty f : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors

$$\widetilde{X}_j f(x, y) = \frac{d}{dt} f(x \cdot \exp \tau_y t X_j, y)|_{t=0}$$

où  $\tau_y$  désigne la différentielle de l'automorphisme  $y \mapsto \tau_y : t_y(x) = x \cdot y$ .

En particulier, si  $y = \exp H_0$  avec  $H_0 \in \mathcal{A}_0$  où  $\mathcal{A}_0$  désigne le sous-espace abélien maximal de  $p_0$  correspondant à  $\mathcal{A}_0^+$  et si  $X$  est dans un espace radiciel  $\mathcal{H}_{ij}$ , on a

$$\widetilde{X} f(x, \exp H_0) = \alpha_{ij}(H_0) \widetilde{X}_{j|x}^{(1)} f(x, \exp H_0)$$

où  $\widetilde{X}_j^{(1)}$  désigne le champ des vecteurs invariant à gauche sur  $H$  induit par  $X_j$ .

Soit  $\psi : [0, T] \rightarrow G$  une courbe minimisante pour la distance dans  $G$ . On a

$$\psi(t) = (\omega_1(t), \omega_2(t)) \quad \text{avec} \quad \omega_1 \in H \text{ et } \omega_2 \in G_0,$$

$$\psi(0) = e, \quad \psi(T) = (x_1, y_1), \quad y_1 = k_1 \exp a k_2,$$

$$\psi'(t) = (\omega'_1(t), \omega'_2(t)) = \sum_{j=1}^n \psi_j(t) \widetilde{X}_j | \psi'(t) \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^n |\psi_j(t)|^2 = 1.$$

Soient  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $C^\infty$  et  $1 \leq j \leq \ell$ . On a

$$\widetilde{X}_{j|\psi(t)} f = \frac{d}{ds} f(\psi(t) \exp sX_j)|_{s=0} = \frac{d}{ds} f(\omega_1(t), \omega_2(t)) (\exp sX_j, e)|_{s=0}$$

où on a posé  $\omega_2(t) = k_1(t) \exp a(t) k_2(t)$ ,

$$\begin{aligned} f[\omega_1(t), \omega_2(t)] (\exp sX_j, e) &= f[(\omega_1(t) \cdot \omega_2(t) \cdot \exp sX_j, \omega_2(t))] \\ &= f[(\omega_1(t) \cdot \exp s\tau_{\omega_2(t)} X_j, \omega_2(t))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{df}{ds} [\psi(t) (\exp sX_j, e)]|_{s=0} &= \frac{d}{ds} f[(\omega_1(t) \exp s\tau_{\omega_2(t)} X_j, \omega_2(t))] \\ &= \widetilde{\tau_{\omega_2(t)} X_j | \psi(t)} f[\omega_1(t), \omega_2(t)]. \end{aligned}$$

□

On considère enfin une base  $Y_1, \dots, Y_{m_0}$  de  $\mathcal{H}$  de vecteurs radiciels et  $H_0$  dans  $\mathcal{A} \exp H_0 \cdot Y_j = e^{\alpha_{\ell,j}(H_0)} Y_j$ . Si  $1 \leq j \leq \ell$ , on a

$$\begin{aligned} \tau_{\omega_2(t)} X_j &= \tau_{k_1(t)} \tau_{a(t)} \tau_{k_2(t)} X_j \\ &= a_{j,\ell_1} \tau_{k_1(t)} \tau_{a(t)} Y_{\ell_1} \\ &= a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_2(t)) \tau_{a(t)} Y_{\ell_2} \\ &= a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_2(t)) e^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell'_2}(k_2(t)) Y_{\ell'_2} \\ &= a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_2(t)) a^{\ell'_2,\ell'_3} e^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell'_2}(k_2(t)) X_{\ell'_3}^0 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la sommation muette. Par ailleurs si  $\ell + 1 \leq j \leq k$ , on a

$$(*) \quad \widetilde{X}_j|_{\psi(t)} f = \frac{d}{ds} f(\omega_1(t), \omega_2(t) \exp s X_j)_{s=0} = \widetilde{X}_j^0 f$$

Mais  $\psi'(t) = (\omega'_1(t), \omega'_2(t))$ ; l'expression de  $\widetilde{X}_j|_{\psi(t)}$  pour  $1 \leq j \leq \ell$  prend la forme

$$a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} \varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}(k_2(t)) e^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \widetilde{X}_{\ell'_3}^{0(1)}.$$

D'après (\*),

$$\omega'_1(t) = \psi_j(t) a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} e^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}(k_2(t)) \widetilde{X}_{\ell'_3}^{0(1)}.$$

Si  $\mathcal{X}$  désigne la projection sur le plan engendré par  $(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_{\ell_1})$

$$\begin{aligned} \omega'_1(t) &= \psi_j(t) a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} e^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}(k_2(t)) \mathcal{X}(\widetilde{X}_{\ell'_3}^0)^{(1)} \\ &= \psi_j(t) a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} e^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}(k_2(t)) U_{\ell'_3,\ell_4} \widetilde{X}_{\ell_4}^{(1)} \end{aligned}$$

soit

$$\omega'_{\ell_4} = \psi_j(t) a^{\ell'_2,\ell'_3} a_{j,\ell_1} e^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))} \varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_1(t)) \varphi_{\ell_2,\ell'_2}(k_2(t)) U_{\ell_3,\ell_4}.$$

Comme  $K_0$  est compact,  $\sup_{k \in K_0} |\varphi_{\ell_1,\ell_2}(k_1(t))| = a_1$  est fini. Mais

$$|\psi_j(t) a_{j,\ell_1}| \leq \left( \sum |a_{j,\ell_1}|^2 \right)^{1/2} = a_2, \quad \sup |U_{\ell_3,\ell_4}| = a_3$$

et

$$(**) \quad |\omega'_{\ell_4}(t)| \leq a_1^2 a_2^2 a_3 e^{\alpha_{\ell_2,\ell_3}(a(t))}.$$

Puisque  $\psi'(t) = \sum_{j=1}^m \theta_j(t) \widetilde{X}_j|_{\psi(t)} = \omega'_1(t) + \omega'_2(t)$ , on a

$$\omega'_1(t) = \sum_{j=1}^{\ell} \omega'_{j,1}(t) \widetilde{X}_j^{(1)}|_{\omega(t)}.$$

La majoration (\*\*) montre que

$$|\omega'_j(t)| \leq c e^{\|\alpha\| \cdot \|a(t)\|}$$

où  $\|a(t)\|$  est la norme donnée par la forme de Killing.

On voudrait montrer que

$$\|a(t)\| \leq \gamma^2 t.$$

Les  $X_i$ ,  $\ell + 1 \leq i \leq k$  engendrent un système de Hörmander sur  $G_0$  d'où une distance associée notée  $\delta_1$ . Alors  $\delta_1(e_2, \omega_2(t)) \leq \delta(e, \psi(t)) \leq \int_0^t ds = t$ .

On désigne l'élément neutre de  $G$  par  $e = (e_1, e_2)$ . Soit  $\eta(s)$  une courbe dans  $G_0$  qui joint  $e_2$  à  $\omega_2(t)$  telle que

$$\begin{aligned} \eta'(s) &= \sum_{i=\ell+1}^k \eta'_i(s) \widetilde{X}_i|_{\eta(s)} \quad \text{avec} \quad \sum |\eta'_i(s)|^2 = 1, \\ \eta(\tau) &= \omega_2(t), \quad \delta_1(e_2, \omega_2(t)) = \tau, \\ \eta(s) &= \exp X(s)k(s). \end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned} \omega_2(t) &= k_1(t) \exp a(t)k_2(t) = k_1(t) \exp a(t)k_1^{-1}(t)k_1(t)k_2(t), \\ &= \exp \operatorname{Ad}(k_1(t)) a(t)k_1(t)k_2(t), \\ X(\tau) &= \operatorname{Ad}(k_1(t)) a(t), \quad k(\tau) = k_1(t)k_2(t) \\ \eta'(s) &= \operatorname{Ad}(\widetilde{k^{-1}(s)})X'(s)|_{\exp X(s)k(s)} + \widetilde{Z}(s) \end{aligned}$$

où  $\widetilde{Z}$  provient des champs sur  $K_0$ , on a

$$\begin{aligned} \|\eta'(s)\|_1^2 &= \sum_{i=\ell+1}^k |\eta'_i(s)|^2 \cdot \|\widetilde{X}_i|_{\eta(s)}\|^2 \\ &= \|\operatorname{Ad}(\widetilde{k^{-1}(s)})X'(s)|_{\exp X(s)k(s)} + \widetilde{Z}(s)\|_1^2 \\ &= \|\operatorname{Ad}(k^{-1}(s))X'(s)\|_1^2 + \|\widetilde{Z}(s)\|_1^2 \end{aligned}$$

et  $\|X'(s)\|_1 \leq \|\operatorname{Ad}(k(s))\eta'_0(s)\|_1$  avec  $\eta'_0(s) = \sum_{i=\ell+1}^k \eta'_i(s)X_i$ , d'où

$$\|X'(s)\|_1 \leq \sup_{k \in K_0} \|\operatorname{Ad}(k)\| \cdot \|\eta'_0\|_1 = \gamma_0.$$

Alors

$$\|X(\tau)\|_1 \leq \int_0^\tau \|X'(s)\|_1 ds \leq \gamma_0 \tau = \gamma_0 \delta_1(e, \omega_2(t))$$

$$a(t) = \operatorname{Ad}(k^{-1}(t))X(\tau)$$

$$\|a(t)\|_1 \leq \gamma_0 \|X(t)\|_1 \leq \gamma_0^2 \delta_1(e, \omega_2(t)) \leq \gamma_0^2 t.$$

### 2.3. Preuve de la proposition 3. — Écrivons

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(r)|} \int \chi_r(hg) dh &= \frac{1}{|B(r)|} \int_{\delta(hg,e) \leq 1} \chi_r(hg) dh + \frac{1}{|B(r)|} \int_{\delta(hg,e) \geq 1} \chi_r(hg) dh \\ &= F_1(g) + F_2(g). \end{aligned}$$

La norme de  $F_1$  comme opérateur de convolution de  $L^p(G_0)$  est dominée par  $c/|B(r)|$ ; par conséquent, il suffit d'estimer celle de  $F_2$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  fixé,

$$\begin{aligned} F_2(g) &= \frac{1}{|B(r)|^\varepsilon} \int_{\delta(hg,e) \geq 1} \frac{\chi_r(hg) dh}{|B(r)|^{1-\varepsilon}} \\ &\leq \frac{C}{|B(r)|^\varepsilon} \int_{\delta(hg,e) \geq 1} \frac{\chi_r(hg) dh}{c_1 + |B^{1-\varepsilon}(\delta(hg,e))|} \\ &= \frac{C}{|B(r)|^\varepsilon} F_{2,\varepsilon}(g) \leq ce^{-\beta_\varepsilon r} F_{2,\varepsilon}(g) \end{aligned}$$

où  $C_1$  est une constante qu'on choisira comme il convient.

Les calculs pour  $F_{2,\varepsilon}$  sont les mêmes que pour la fonction  $E_1$  que nous allons définir ci-dessous. On va d'ailleurs voir que

$$\sup_{k_1, k_2} F_{2,\varepsilon}(k_1 \exp ak_2) \leq F_{2,\varepsilon}(\exp a) \quad \text{avec de bonnes propriétés.}$$

### 3. Suite de la preuve du théorème 2

Soit

$$E(x) = \frac{1}{|B[\delta(0,x)]|} \mathbf{1}_{B_1^c}(x) \simeq \frac{1}{|B(\delta(x,0))| + C}$$

où  $\mathbf{1}_{B_1^c}(x)$  est la fonction caractéristique du complémentaire de la boule de rayon 1 centrée à l'origine de  $G$ . D'après [6] et le théorème de Kunze-Stein [6], il suffit de voir que la fonction

$$E_1(x) = \int_H E(hx) dh$$

est dans  $L^p(G_0)$  pour une valeur de  $p$  inférieure à celle de l'énoncé. En effet comme  $H$  est moyennable,  $E$  donne lieu à un opérateur borné sur  $L^{p_1}(G)$  si et seulement si  $E_1$  donne lieu à un opérateur borné de  $L^{p_1}(G_0)$  (ceci résulte de [6]) et il en est ainsi si  $E_1$  est dans  $L^p(G_0)$ .

On veut d'abord estimer  $E_1(x)$  pour  $\delta_1(e, \dot{x})$  très grand. On pose

$$x = k \exp ak_1$$

et l'on voit que

$$(***) \quad \delta(hk \exp ak_1, e) \geq \delta(hk \exp a, e) - C$$

car par hypothèse  $\delta_1(e, \dot{x})$  est très grand comme c'est une distance quotient  $\delta(hk \exp ak_1, e) \geq \delta_1(e, \dot{x})$  qui est très grand. Alors

$$\frac{1}{|B[\delta(hk \exp ak_1, e)]|} \leq \frac{C_1}{|B[\delta(hk \exp a, e)]|}.$$

En effet, soient  $r, s > 0$ ; alors  $B(r+s) = \bigcup_{y \in B(r)} B_y(s)$ . Si  $Y$  est un sous-ensemble fini de  $B(r)$  dont deux points  $y_1, y_2$  avec  $y_1 \neq y_2$  satisfont l'inégalité  $\delta(y_1, y_2) > b$  où  $b$  est une constante positive

$$\bigcup_{y \in Y} B_y\left(\frac{1}{2}b\right) \subset B\left(r + \frac{1}{2}b\right)$$

et  $\text{Card}(Y)|B_y(\frac{1}{2}b)| = \text{Card } Y C_b \leq |B(r + \frac{1}{2}b)|$ . Soit  $Y \subset B(r)$  fini, maximal pour la propriété : tous les points  $y_1, y_2$  de  $Y$  avec  $y_1 \neq y_2$  satisfont  $\delta(y_1, y_2) > b$ . D'après la maximalité de  $Y$ , on a l'inclusion  $B(r+s) \subset \bigcup_{y \in Y} B(y, s+b)$  et

$$|B(r+s)| \leq \text{Card}(Y) |B(s+b)| \leq C_b^{-1} |B(r - \frac{1}{2}b)| \cdot |B(s+b)|.$$

Si l'on pose  $r + \frac{1}{2}b = r_1$  et  $s - \frac{1}{2}b = s_1$ , on a

$$|B(r_1 - s_1)| \leq C_b^{-1} B(r_1) B(s_1 + \frac{3}{2}b)$$

pour  $r_1 > \frac{1}{2}b$  et  $s \geq -\frac{1}{2}b$ ; en particulier pour  $s_1 \geq 0$ , on trouve avec l'inégalité  $\delta(hk \exp a, e) \leq c + \delta(hk \exp ak_1, e)$

$$\begin{aligned} |B[\delta(hk \exp a, e)]| &\leq |B(\delta(hk \exp ak_1, e)) + c| \\ &\leq C_b^{-1} |B[(\delta(hk \exp a, e)) \cdot |B(c + \frac{3}{2}b)|] \end{aligned}$$

d'où l'inégalité ci-dessus.

Soit  $r$  très grand; on veut estimer  $|B_e(r)| = |B(r)|$ . Soit  $\gamma_1 = \sup_{k \in K_0} \delta(k, e)$ ; si  $\delta(g, e)$  est très grand et que  $g = k_1 \exp X k_2$ ,  $k_i \in K$ ,  $X$  dans  $\mathfrak{a}$ ,  $g \in G_0$

$$\delta(\exp X, e) - 2\gamma_1 < \delta(g, e) \leq \delta(\exp X, e) + 2\gamma_1$$

Par ailleurs  $\delta(\exp X, e) \leq \delta_{G_0}(\exp X, e_1)$  où  $\delta_{G_0}$  est la distance induite sur  $G_0$ .

Comme

$$\delta_{G_0}(\exp X, e) \leq \|X\| \delta(g, e) \leq \|X\| + \gamma_1,$$

on a

$$B' = \{g = k_1 \exp X k_2, \|X\| \leq r - 1 - 2\gamma\},$$

$$B' \cdot B(1) \subset B(r), \quad B' \cdot B(1) = \{(g \cdot x, g \cdot y), g \in B', \delta(x, y, e) \leq 1\},$$

$$\int_{B_r} dx \geq \int_{B' \cdot B(1)} dx.$$

La trace de la boule  $B(1)$  sur  $H$  sera notée  $B''(1)$ . Alors

$$B' \circ B''(1) \subset B(r) \quad \text{et} \quad B' \circ B''(1) = \{(g, x), g \in B', x \in B''(1)\},$$

$$\int_{B_r} dx \geq \int_{B'} dg \int_{gB''(1)} du.$$

Quitte à diminuer l'intégrale ci-dessus, on peut trouver des boules  $D_{j,n}^0$  dans  $H^i$  de petit rayon, pour une bonne métrique  $K$  invariante, telle que pour tout  $x_j \subset D_{j,n}^0$ ,  $\exp x_i \in B'(1)$  et  $x = \prod_{j=1}^m \exp x_j \in B''(1)$ . Si  $a \in \mathfrak{A}^+$ , alors  $\exp a \cdot x = \prod_{j=1}^m \exp \text{Ad } ax_j$ .

Si  $x_j$  est dans l'espace radical d'indice  $n$ ,  $x_j$ , on l'indexe  $x_{n,j}$  et on a

$$\prod_{j=1}^m \exp[e^{\alpha_{n,j}(a)} x_{n,j}].$$

Si  $k \in K$ , on a

$$k \cdot \prod_{j=1}^m \exp e^{\alpha_{n,j}(a)} x_{n,j} = \prod_{j=1}^m \exp e^{\alpha_{n,j}(a)} \text{Ad } k \cdot x_{n,j}.$$

Comme on a supposé qu'il existe des sous-ensembles  $D_{j,n}$  dans l'espace radical  $H_{j,n}$  tels que pour tout  $x_{j,n} \in D_{j,n}$

$$\|x_{j,n}\| \leq 1, \quad [x_{j,n}, a] = \alpha_{j,n}(a)x_{j,n} \quad \text{avec} \quad \alpha_{j,n}(a) \geq 0,$$

on a

$$\begin{aligned} & \int_{\prod_{j=1}^n K \cdot \prod_{n=1}^{m_j} \exp D_{j,n}^+} dx > C_1 > 0, \\ & \int_{B'} dg \int_{gB''(1)} dx \geq \int_{\substack{a \in a^+ \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} Sh^{m_\alpha}(a) \\ & \quad \times \int_K dk \int_{k \cdot \prod_{j=1}^n K \cdot \prod_{n=1}^{m_j} \exp e^{\alpha_{j,n}(a)} D_{j,n}^+} dx da \\ & = \int_{\substack{a \in a^+ \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} Sh^{m_\alpha}(a) da \int_{\prod_{j=1}^n K \cdot \prod_{n=1}^{m_j} \exp e^{\alpha_{j,n}(a)} D_{j,n}^+} dx \\ & = \int_{\substack{a \in a^+ \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} Sh^{m_\alpha}(a) da e^{\sum \alpha_{j,n}(a)} \int_{\prod_{j=1}^n K \cdot \prod_{n=1}^{m_j} \exp D_{j,n}^+} dx \\ & \geq C_0 \int_{\substack{a \in a^+ \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} \prod_{\alpha \in \Sigma^+} Sh^{m_\alpha}(a) e^{\sum m_{ij} \alpha_{ij}(a)} da \\ & \geq C_0 \int_{\substack{a \in a^+ \\ \alpha(a) \geq \sqrt{2} \\ \|a\| \leq r-1-2\gamma}} e^{2\rho(a) + \theta(a)} da \geq C^{\text{te}} e^{r\|2\rho + \theta\|} r^\ell. \end{aligned}$$

Nous sommes donc amenés à estimer

$$\begin{aligned} \int_H \frac{\mathbf{1}_{B^c}(hk \exp a) dh}{|B\{\delta(hk \exp a), e\}| + C_1} &= \int_H \frac{dh}{|B[\delta\{(kk^{-1}hk \exp a), e\}]| + C_1} \\ &\leq \int_H \frac{dh'}{|B(\delta(kh' \exp a), e)| + C_1} \\ &\leq C_2 \int_H \frac{dh}{|B(\delta(h \exp a, e))| + C_1} \quad (\text{d'après (***)}). \end{aligned}$$

Si  $\delta_H(h, e_2) \leq 1 \cdot \delta(h, e) \leq 1$ , d'après [9] et

$$\begin{aligned} \int_{\delta_H(h, e_2) \leq 1} \frac{dh}{|B(\delta(h \exp a, e))| + C_1} \\ \leq C \frac{1}{|B[\delta(\exp a), e]| + C_1} = F'_0(\exp a). \end{aligned}$$

La restriction de  $\delta$  à  $G_0$  est une distance invariante à gauche ; par conséquent,  $F'_0$  est dans  $L^p(G_0)$  pour tout  $1 < p \leq \infty$  et

$$\int_H \frac{\mathbf{1}_{B^c}(h g k) dh}{|B(\delta(h g k, e))| + C} \leq C \int_H \frac{dh}{|B[\delta(h g, e)]| + C_1}.$$

Pour estimer  $E_1$ , il suffit donc d'estimer

$$\int_{\delta_H(h, e) \geq 1} \frac{dh}{|B\{\delta(h \exp a, e)\}| + C} = F'_0(a).$$

Mais si  $\varepsilon > 0$ , on a

$$\begin{aligned} \tau(a) &= \int_{\delta_H(h, e_2) \geq 1} \frac{\delta^\ell(h \exp a, e) \delta^{-\ell}(h \exp a, e) e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e_2)}}{e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e_2)} |B(\delta(h \exp a, e_2))| + C} \\ &\leq \delta_{G_0}^{-\ell}(\exp a, e) e^{-2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta_{G_0}(\exp a, e)} \\ &\quad \times \int_{\delta_H(e, h) \geq 1} \frac{e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e)}}{|B(\delta(h \exp a, e))| + C} dh. \end{aligned}$$

Pour évaluer la dernière intégrale, on va utiliser l'estimation

$$\begin{aligned} e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e)} e^{-\|2\rho+\theta\|\delta(h \exp a, e)} \delta^\ell(h \exp a, e) \\ \leq e^{-\{\|2\rho+\theta\| - 2\|\rho\|(1-\varepsilon')\}\delta(h \exp a, e)}, \quad \varepsilon \approx \varepsilon \end{aligned}$$

puisque  $\|2\rho + \theta\| > 2\|\rho\|(1 - \varepsilon)$ .

Mais d'après la proposition 1, on a

$$\begin{aligned} e^{2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta(h \exp a, e)} e^{-\|2\rho+\theta\|\delta(h \exp a, e)} \delta^\ell(h \exp a, e) \\ \leq C (\delta_H(h, e_2))^{-\{\|2\rho+\theta\| - 2\|\rho\|(1-\varepsilon')\}/\beta}. \end{aligned}$$

Mais par hypothèse

$$|\{h; \delta_H^{-\gamma}(h, e_2) > \alpha\}| = |B(\alpha^{-1/\gamma})| \leq C \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{D/\gamma}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{\delta_H(e, h) \geq 1} \frac{dh}{\{\delta_H(h, e_2)\}^{\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon')\}/\beta}} \\ \leq C \int_0^1 \frac{d\alpha}{\alpha^{D\beta/(\|2\rho+\theta\|-2\|\rho\|(1-\varepsilon'))}} < \infty \end{aligned}$$

d'où la finitude de l'intégrale si  $p_1(\varepsilon) = 1/(1-\varepsilon)$ . Il s'ensuit que

$$F_{2,0}(k \exp ak') \leq c \delta_{G_0}^{-\ell}(\exp a, e) e^{-2\|\rho\|(1-\varepsilon)\delta_{G_0}(\exp a, e)}.$$

Comme on ne s'intéresse qu'aux  $a$  grands,  $F_{2,0}$  est dans  $L^{p_1-\varepsilon_0}(G_0)$  et d'après [6], l'opérateur de convolution associé est borné sur  $L^p(G_0)$  et d'après [5],  $E$  donne lieu à un opérateur borné sur  $L^p(G)$ .

### 3.1. Démonstration du théorème 4

1) Comme la courbure de Ricci est  $\geq -b^2$ , si l'on note  $\Delta$  le laplacien de  $M$ , on a d'après le théorème de comparaison (voir [1])

$$\frac{1}{n-1} \Delta r \leq \Delta_b r_b$$

où  $r$  désigne la fonction distance sur  $M$  d'un point distingué et  $r_b$  la fonction distance sur la variété simplement connexe hyperbolique de courbure de Ricci  $-b^2$  et de dimension  $n$ . Si  $\theta(s, w)$  désigne la densité de volume en coordonnées polaires exponentielles au point  $x$  de  $M$ , on en déduit que

$$\frac{1}{n-1} \theta'(s, w) \leq c \theta(s, w)$$

pour  $s \geq 1$ , et tout point  $w$  de la sphère-unité de  $T_x M$ . Alors

$$\begin{aligned} \int_1^r \theta'(s, w) ds &\leq c \int_0^r \theta(s, w) ds, \\ \int_{\Sigma_{n-1}} [\theta(r, w) - \theta(1, w)] dw &\leq c \int_0^r \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(s, w) ds dw \end{aligned}$$

si  $r$  est assez grand,  $\frac{1}{10} \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) dw > \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(1, w) dw$  alors

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) dw \leq c \int_0^r \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(s, w) ds dw.$$

Il s'ensuit que pour  $r$  assez grand,

$$\int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) dw \leq c |B_r(x)|$$

où  $B_r(x)$  désigne la boule riemannienne de centre  $x$  et de rayon  $r$  et  $|B_r(x)|$  son volume.

On commence la preuve du théorème comme pour celle de [1]. En effet

$$f^*(x) \leq \sup_{r \leq r_0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, d\sigma(y) \\ + \sup_{r \geq r_0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, d\sigma(y).$$

On choisit  $r_0$  très grand pour que l'inégalité

$$\frac{1}{10} \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) \, dw > \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(1, w) \, dw$$

soit vérifiée pour tout  $r > r_0$ .

On continue comme précédemment et l'on s'intéresse à

$$f_2^0(x) = \sup_{r \geq r_0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(y)| \, d\sigma(y) \\ \leq \int_M \inf \left( 1, \frac{1}{|B_{\delta(x,y)}(x)|} \right) |f(y)| \, d\sigma(y) \\ \leq \int_{\delta(x,y) \leq r_0} |f(y)| \, d\sigma(y) + \int_{\delta(x,y) \geq r_0} \frac{1}{|B_{\delta(x,y)}(x)|} |f(y)| \, d\sigma(y) \\ ??? \int_M \left| \int_{\delta(x,y) \leq C} |f(y)| \, d\sigma(y) \right|^p \, d\sigma(x) \leq C \|f\|_p^p.$$

Car  $M$  est à géométrie bornée. Il ne nous reste plus que la fonction

$$f_2(x) = \int_{\delta(x,y) \geq r_0} \frac{1}{(|B_{\delta(x,y)}(x)|)} |f(y)| \, d\sigma(y).$$

D'après la première partie le noyau intéressant à étudier est

$$K^{-1}(\delta(x, y)) = \int_{\Sigma_{n-1}} \theta[\delta(x, y), w] \, dw \, \mathbf{1}_{\delta(x,y) \geq r_0}$$

puisque

$$f_2(x) \leq \int_M K(x, y) |f(y)| \, d\sigma(y).$$

On se propose d'estimer  $K(x, y)$ . On considère un système de coordonnées polaires au point  $x$  dans  $T_x M$ . On note  $(r, w)$  un système de coordonnées polaires en  $x_0$ ,  $r = \delta(x, y)$  le volume de la boule de centre  $x$  de rayon  $r$  vaut

$|B_r(x)| = \int_0^r \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) dw$  et l'aire de la sphère  $e^{\varphi(r)} = \int_{\Sigma_{n-1}} \theta(r, w) dw$  pour  $\delta(x, y)$  suffisamment grand, le laplacien de la fonction  $\psi_x(y) = e^{-\varphi_x(\delta(x, y))}$  vaut

$$\Delta_y \psi_x(y) = \left[ -\frac{d^2 \phi_x(r)}{dr^2} + \left( \frac{d\phi(r)}{dr} \right)^2 - \frac{\theta'_x(r, w)}{\theta_x(r, w)} \frac{d\phi_x(r)}{dr} \right] e^{-\varphi_x[\delta(x, y)]}.$$

Mais  $\theta'_x(r, w)/\theta(r, w) = H(r, w)$  où  $H(r, w)$  est la courbure moyenne de la sphère centrée en  $x$  et de rayon  $r$  évaluée au point de coordonnées polaires  $(r, w)$ .

Il existe par hypothèse  $\sigma$  telle que  $0 < \sigma < \sigma_0$  et

$$(*) \quad \left[ -\frac{d^2 \phi_x(r)}{dr^2} + \left[ \frac{d\phi_x(r)}{dr} \right]^2 - \tau \frac{d\phi_x(r)}{dr} + \sigma^2 \right] e^{-\phi_x(r)} \geq 0.$$

Alors

$$\left[ -\frac{d^2 \varphi_x(r)}{dr^2} + \left[ \frac{d\varphi_x(r)}{dr} \right]^2 - H(r, w) \frac{d\varphi_x(r)}{dr} + \sigma^2 \right] e^{-\varphi_x(r)} \geq 0$$

et la fonction  $\psi_x(y) = e^{-\varphi_x(\delta(x, y))}$  est  $\Delta + \sigma$  sous harmonique.

Mais si  $f$  est une fonction  $M \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $C^\infty$  à support compact,  $f(x_0) = 0$

$$\int_0^\infty |f(r, w)|^2 \theta(r, w) dr \leq \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty |f(r, w)|^2 \theta'(r, w) dr,$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \int_0^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial r}(r, w) \right| \cdot |f(r, w)| \theta(r, w) dr \\ & \leq \frac{1}{\sigma} \left( \int_0^\infty \left| \frac{\partial f}{\partial r}(r, w) \right|^2 \theta(r, w) dr \right)^{1/2} \cdot \left( \int_0^\infty |f(r, w)|^2 \theta(r, w) dr \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} |f(r, w)|^2 \theta(r, w) dr dw \leq \frac{1}{\sigma_0^2} \int_0^\infty \int_{\Sigma_{n-1}} \left| \frac{\partial f}{\partial r}(r, w) \right|^2 dr dw$$

$$\text{et } \|f\|_2^2 \leq -\frac{1}{\sigma_0^2} \langle \Delta f, f \rangle$$

$$\langle (-\Delta - \sigma_0^2) f, f \rangle \geq 0$$

$$\text{et si } \varepsilon > 0, \langle -\Delta - (\sigma^2) f, f \rangle \gg (\sigma^2 - \sigma_0^2) \|f\|_2^2.$$

Par conséquent

$$\Delta + \sigma^2 \text{ est inversible sur } L^2(M)$$

d'où l'existence d'une fonction de Green pour  $\Delta + \sigma^2 : G_\sigma$ .

On peut appliquer le principe du maximum à  $\psi$  et  $G_\sigma$  avec l'opérateur elliptique  $\Delta + \sigma^2$ . Malheureusement la constante  $\sigma$  est positive et on ne peut l'appliquer brutalement.

a) Comme  $M$  est à géométrie bornée pour  $\delta(x, y) = r_0 > 0$ ,  $C_\sigma^{-1} < G_\sigma(x, y) \leq C_\sigma$  où  $C_\sigma$  est une constante finie qui ne dépend ni de  $x$ , ni de  $y$ .

b) On considère l'opérateur

$$(G_\sigma^x)^{-1}(\Delta + \sigma)G_\sigma^x = \Delta + \nabla \log G_\sigma^x = \Delta_\sigma^x$$

où  $G_\sigma^x(y) = G_\sigma(x, y)$ .

c) Pour  $\delta(x, y) > r_0$ ,  $\Delta_\sigma^x G_\sigma^x = 0$ . Si  $\psi^x(y) = e^{-\varphi_x(y)}$ ,  $\Delta_\sigma^x(\frac{\psi^x}{G_\sigma^x}) \geq 0$  d'après ce qui a été dit précédemment.

d) De plus  $\Delta_\sigma^x$  est sans terme constant et par hypothèse

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\psi^x(y)}{G_\sigma^x(y)} \leq C$$

le principe du maximum appliqué à 1 et  $\psi^x/G_\sigma^x$  pour  $\Delta_\sigma^x$  dit que

$$\psi^x(y) \leq C_\sigma G_\sigma^x(y) = C_\sigma G_\sigma(x, y)$$

pour tout  $y$  avec  $\delta(x, y) \geq r_0$ . Il existe  $p_0$ ,  $1 < p_0 \leq 2$  tel que

$$\left\| \int_M G_\sigma(x, y) \mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq r_0}(y) f(y) d\sigma(y) \right\|_{p_0} \leq C(p, \sigma) \|f\|_{p_0}.$$

Soit  $\mu^2 = -\inf \langle \Delta f, f \rangle / (f \in C_0^\infty(M), \|f\|_2)$  soit

$$G_\sigma(x, y) = \int_0^\infty e^{\sigma^2 t} P_t(x, y) dt$$

où  $P_t$  est la solution fondamentale de l'équation de la chaleur. On a déjà vu que  $G_\sigma$  est fini partout, elle est même  $C^\infty$  en dehors de la diagonale.

On considère l'ensemble  $\Gamma = \{z, 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$ . On définit

$$G_z(x, y) = \int_0^\infty e^{(\mu^2 - \varepsilon)zt} P_t(x, y) dt$$

Alors pour  $\operatorname{Re} z = 1$ ,  $\|\int_M G_z(x, y) f(y) d\sigma(y)\|_2 \leq c\|f\|_2$ .

Pour  $\operatorname{Re} z = 0$ ,  $\|\int_M G_z(x, y) f(y) d\sigma(y)\|_p \leq c\|f\|_p$  pour tout  $1 < p \leq 2$ . En effet

$$\left| \int_M \int_0^\infty e^{(u^2 - \varepsilon)it} P_t(x, y) dt f(y) d\sigma(y) \right| \leq \int_M \int_0^\infty P_t(x, y) |f(y)| d\sigma(y) dt.$$

Comme  $\mu^2 > 0$ , on a  $\|P_t\|_{2 \rightarrow 2} \leq e^{-\mu^2 t}$  pour  $t > 1$  et par interpolation

$$\|P_t\|_{p \rightarrow p} \leq e^{-2\mu^2/p't} \quad \text{pour } t > 1.$$

Il s'ensuit que

$$\|G_s f\|_{p_s} \leq C(s) \|f\|_{p_s} \quad \text{où} \quad G_s = \int_0^\infty e^{+(\mu^2 - \varepsilon)s} P_t(x, y) dt,$$

$1/p_s = \frac{1}{2}(1 - s) + 1/p$ ; on peut choisir

$$s = \frac{\sigma^2}{\mu^2 - \varepsilon}, \quad \frac{1}{p_s} = \frac{1 - \sigma^2}{\frac{1}{2}(\mu^2 - 2)} + \frac{\sigma^2}{(\mu^2 - \varepsilon)p}.$$

Comme  $p$  est voisin de 1 et  $\varepsilon$  arbitraire, on voit que pour tout  $p$  tel que  $p_0 > \frac{1}{2}[1 + \sigma^2/\mu^2]$ , on a

$$\left\| \int_M G_\sigma(x, y) f(y) d\sigma(y) \right\|_{p_0} \leq C_\sigma \|f\|_{p_0}.$$

Alors

$$\left\| \int_M G_\sigma(x, y) \mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq r_0}(y) f(y) d\sigma(y) \right\|_{p_0} \leq C_\sigma(p_0) \|f\|_{p_0},$$

$$\left\| \int_M \psi_\sigma(x, y) \mathbf{1}_{\delta(x, y) \geq r_0}(y) f(y) d\sigma(y) \right\|_{p_0} \leq C(\sigma, p_0) \|f\|_{p_0}.$$

Par conséquent

$$\|f_2\|_{p_0} \leq C(p, p_0) \|f\|_{p_0} \quad \text{et} \quad \|f^*\|_{p_0} \leq C(p_0) \|f\|_{p_0}.$$

Comme l'inégalité est vraie pour  $p = +\infty$ , il s'ensuit que  $\|f^*\|_p \leq C(p) \|f\|_p$  pour tout  $p \geq p_0$ .

Ce qui termine la preuve du théorème.

**3.2. Démonstration du corollaire.** — Nous n'insisterons pas sur la preuve de ce corollaire qui est une conséquence facile des théorèmes de comparaison — voir [1].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. CHAVEL — *Eigenvalues in Riemannian geometry*, Pure and Applied Mathematics, vol. 115, Academic Press Inc., 1984, Including a chapter by Burton Randol, With an appendix by Jozef Dodziuk.
- [2] J. L. CLERC & E. M. STEIN — «  $L^p$ -multipliers for noncompact symmetric spaces », *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **71** (1974), p. 3911–3912.
- [3] G. B. FOLLAND & E. M. STEIN — « Estimates for the  $\bar{\partial}_b$  complex and analysis on the Heisenberg group », *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974), p. 429–522.
- [4] N. LOHOUE — « Fonction maximale de Hardy-Littlewood sur les variétés de Cartan-Hadamard », *C. R. Acad. Sci. Paris* **300** (1885).
- [5] ———, « Estimations  $L^p$  des coefficients de représentation et opérateurs de convolution », *Adv. in Math.* **38** (1980), p. 178–221.
- [6] ———, « Sur les représentations uniformément bornées et le théorème de convolution de Kunze-Stein », *Osaka J. Math.* **18** (1981), p. 465–480.

- [7] A. NAGEL, E. M. STEIN & S. WAINGER – « Balls and metrics defined by vector fields. I. Basic properties », *Acta Math.* **155** (1985), p. 103–147.
- [8] A. NEVO – « Radial geometric analysis on groups », in *Proceedings of first SAM Symposium on Discrete Geometric Analysis, Sendai 12-20 (Japan)*, 2002.
- [9] N. T. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE & T. COULHON – « Analysis and geometry on groups », *Cambridge Tracts in Math.* **100** (1992), p. 156.

