

# Bulletin

de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

## **NOMBRE DE POINTS VISITÉS SUR UN AMAS DE PERCOLATION**

**Clément Rau**

**Tome 135  
Fascicule 1**

**2007**

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

pages 135-169

## SUR LE NOMBRE DE POINTS VISITÉS PAR UNE MARCHÉ ALÉATOIRE SUR UN AMAS INFINI DE PERCOLATION

PAR CLÉMENT RAU

---

RÉSUMÉ. — On s'intéresse à une marche aléatoire simple sur un amas infini issu d'un processus de percolation surcritique sur les arêtes de  $\mathbb{Z}^d$  ( $d \geq 2$ ) de loi  $Q$ . On montre que la transformée de Laplace du nombre de points visités au temps  $n$ , noté  $N_n$ , a un comportement similaire au cas où la marche évolue dans  $\mathbb{Z}^d$ . Plus précisément, on établit que pour tout  $0 < \alpha < 1$ , il existe des constantes  $C_i, C_s > 0$  telles que pour presque toute réalisation de la percolation telle que l'origine appartienne à l'amas infini et pour  $n$  assez grand,

$$e^{-C_i n^{d/(d+2)}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq e^{-C_s n^{d/(d+2)}}.$$

Le point principal du travail réside dans l'obtention de la borne supérieure. Notre approche consiste dans un premier temps, à trouver une inégalité isopérimétrique sur l'amas infini, et dans un deuxième temps à la remonter sur un produit en couronne, ce qui nous permet alors d'obtenir une majoration de la probabilité de retour d'une certaine marche sur ce produit en couronne. L'introduction d'un produit en couronne est justement motivée par le fait que la probabilité de retour sur un tel graphe s'interprète comme l'espérance de la transformée de Laplace du nombre de points visités.

---

*Texte reçu le 24 avril 2006, révisé le 12 septembre 2006*

CLÉMENT RAU, Laboratoire d'Analyse, de Topologie et de Probabilités, Centre de Mathématiques et d'Informatique, 39, rue F. Joliot Curie, 13453 Marseille Cedex 13 (France)  
*E-mail* : [rau@cmi.univ-mrs.fr](mailto:rau@cmi.univ-mrs.fr) • *Url* : <http://www.cmi.univ-mrs.fr/~rau/>

Classification mathématique par sujets (2000). — 60J10, 60K35.

Mots clefs. — Inégalité isopérimétrique, nombre de points visités, percolation, produit en couronne.

ABSTRACT (*On the number of distinct visited sites by a random walk on the infinite cluster of the percolation model*)

We consider random walk on the infinite cluster of the percolation model on the edges of  $\mathbb{Z}^d$  ( $d \geq 2$ ) with law  $Q$ , in the surcritical case. We prove that the Laplace transformation of the number of visited sites up to time  $n$ , called  $N_n$ , has the same behaviour as the random walk on  $\mathbb{Z}^d$ . More precisely, we show for all  $0 < \alpha < 1$ , there exists some constants  $C_i, C_s > 0$  such that for almost all realisations of the percolation such that the origin belongs to the infinite cluster and for large enough  $n$ ,

$$e^{-C_i n^{d/(d+2)}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq e^{-C_s n^{d/(d+2)}}.$$

The main work is to get the upper bound. Our approach is based, first on finding an isoperimetric inequality on the infinite cluster and secondly to lift it on a wreath product, which enables us to get an upper bound of the return probability of a particular random walk. The introduction of a wreath product is motivated by the fact that the return probability on such graph is linked to the Laplace transform of distinct visited sites.

## 1. Introduction et résultats

Soit  $d \geq 2$ . On appelle *percolation de Bernoulli de paramètre  $p$*  le sous-graphe aléatoire de la grille de dimension  $d$  obtenu en supprimant (resp. gardant) une arête avec probabilité  $p$  (resp.  $1 - p$ ) de façon indépendante pour les différentes arêtes. On notera  $\omega$  une réalisation typique de la percolation. On appelle alors amas infini une composante connexe infinie du graphe  $\omega$ . On montre qu'une telle composante connexe infinie existe et est presque sûrement unique si le paramètre  $p$  est choisi au-dessus d'une certaine valeur critique  $p_c$ . Une construction plus formelle de la percolation est donnée plus loin dans cette introduction.

La percolation est un modèle important de la mécanique statistique des milieux désordonnés, un « concept unificateur » pour reprendre l'expression de P.-G. De Gennes [5], qui intervient aussi dans de nombreuses applications, par exemple dans les problèmes de diffusion dans un environnement non homogène que l'on rencontre dans la recherche pétrolière. Depuis son introduction en 1956 par J.M. Hammersley, la percolation a également donné lieu à une jolie théorie mathématique qui recèle encore bien des défis. Nous renvoyons aux livres de Kesten et Grimmett (voir [10] et [9]) pour une introduction aux outils mathématiques de la percolation. On y trouvera en particulier de nombreux résultats sur la géométrie des amas infinis.

Depuis quelques années, différents auteurs se sont attachés à développer la théorie du potentiel des amas infinis ou, en d'autres termes, à décrire le comportement d'une marche aléatoire évoluant sur un amas infini (la « fourmi dans un labyrinthe » pour reprendre une autre expression de P.-G. De Gennes). Les premières bornes sur le noyau de la chaleur sur un amas infini ont été

démontrées par P. Mathieu et E. Rémy [13] à l'aide d'estimées du profil isopérimétrique d'un amas infini. Puis, M. Barlow [2] a obtenu des estimées de type gaussien. Ces premiers résultats ont ensuite permis de prouver la convergence de la marche aléatoire vers un mouvement brownien sous la forme d'un principe d'invariance valable pour presque toute réalisation de  $\omega$ , voir [17, 3, 12].

L'objet du travail présenté ici est de compléter ce panorama en donnant des estimées précises sur le nombre de points visités par la marche aléatoire simple symétrique évoluant sur un amas infini.

Le processus de percolation est défini de la manière suivante. Pour  $d \geq 2$ , notons  $E^d$  l'ensemble des arêtes de  $\mathbb{Z}^d$  défini par,

$$E^d = \left\{ (x, y) ; \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1 \right\},$$

où  $x = (x_1, \dots, x_d)$  et  $y = (y_1, \dots, y_d)$ . Pour  $p \in ]0, 1]$ , soit  $\omega$  le sous-graphe aléatoire de  $\mathcal{L}^d := (\mathbb{Z}^d, E^d)$  obtenu en gardant (resp. effaçant) une arête avec probabilité  $p$  (resp.  $1 - p$ ) de manière indépendante pour les différentes arêtes de  $E^d$ . On identifie ce sous-graphe de  $\mathbb{Z}^d$  avec l'application  $\omega : E^d \rightarrow \{0, 1\}$  telle que  $\omega(x, y) = 1$  si l'arête  $(x, y)$  est présente dans  $\omega$  (on dira qu'une telle arête est *ouverte*) et  $\omega(x, y) = 0$  sinon. On munit  $\{0, 1\}^{E^d}$  de la mesure de probabilité  $Q$  sous laquelle les variables aléatoires  $(\omega(e), e \in E^d)$  sont indépendantes et suivent des lois de Bernoulli( $p$ ). Soit  $\mathcal{C}$  la composante connexe de  $\omega$  contenant l'origine,  $|\mathcal{C}|$  son cardinal et  $p_c$  la probabilité critique,

$$p_c = \sup \{ p ; Q(|\mathcal{C}| = +\infty) = 0 \}.$$

On sait que  $0 < p_c < 1$  (voir [9]) et on suppose désormais que  $p > p_c$ . On se place sur l'évènement  $\{|\mathcal{C}| = +\infty\}$ ;  $\mathcal{C}$  est alors l'unique amas infini. On considère alors sur  $\mathcal{C}$  la marche aléatoire suivante :  $X_0 = x$  et  $X_{n+1}$  est choisi uniformément parmi les voisins de  $X_n$  dans  $\mathcal{C}$ , *i.e.*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \mid X_n = x) = \frac{\omega(x, y)}{\sum_{z; (x,z) \in E^d} \omega(x, z)}.$$

Le but de cet article est d'estimer le nombre de points visités par la marche  $X$ . Plus précisément, posons :

- $N_n = |\{X_0, X_1, \dots, X_n\}|$ ,
- $\mathbb{P}_x^\omega$  la loi de la marche issue de  $x$ ,
- $\mathbb{E}_x^\omega$  son espérance.

Le principal résultat est :

**THÉORÈME 1.1.** — *Pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , il existe deux constantes  $C_i, C_s > 0$  telles que  $Q$  p.s. sur l'évènement  $|\mathcal{C}| = +\infty$ , et pour  $n$  assez grand,*

$$e^{-C_i n^{d/(d+2)}} \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq e^{-C_s n^{d/(d+2)}}.$$

REMARQUE 1.2. — Ce résultat est également valide pour la marche aléatoire à temps continu qui attend un temps exponentiel entre chaque saut.

Dans le cas où  $\omega = \mathcal{L}^d$  cette expression a déjà été étudiée par M.D. Donsker et S.R.S Varadhan [6]. Ils prouvent, en particulier pour la marche aléatoire simple sur la grille  $\mathbb{Z}^d$ , le théorème suivant :

THÉORÈME 1.3 (voir [6]). — *Il existe une constante  $c(d, \alpha) > 0$  telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{d/(d+2)}} \log \mathbb{E}_0^{\mathbb{Z}^d} (\alpha^{N_n}) = -c(d, \alpha)$$

Ce résultat est prouvé par double inégalité. La stratégie adoptée dans la preuve de M.D. Donsker et S.R.S Varadhan, pour obtenir une majoration de l'expression  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{-d/(d+2)} \log \mathbb{E}_0^{\mathbb{Z}^d} (\alpha^{N_n})$ , ne semble pas se généraliser dans un amas infini de percolation pour plusieurs raisons. Par exemple, la symétrie de  $\mathbb{Z}^d$  est un point crucial dans leur preuve, qui n'est évidemment pas satisfait dans un amas. En particulier, la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$  satisfait une propriété de martingale qui n'est plus vraie pour la marche aléatoire sur l'amas de percolation.

La méthode développée ici repose sur le fait suivant :  $\mathbb{E}_0^\omega (\alpha^{N_n})$  peut s'écrire comme une probabilité de retour à l'origine d'une marche  $Z$  construite à partir de  $X$  dans un graphe plus « gros » que  $\mathcal{C}$ , qui sera un produit en couronne. Trouver une borne supérieure de  $\mathbb{E}_0^\omega (\alpha^{N_n})$  revient donc à trouver une borne supérieure de la probabilité de retour de la marche  $Z$ . On sait que les inégalités isopérimétriques sont un outil important pour prouver des inégalités fonctionnelles comme celles de Poincaré ou de Nash, qui elles mêmes, permettent d'obtenir des bornes supérieures du noyaux d'une marche simple (voir [4]). On étudie donc le profil isopérimétrique sur ce produit en couronne. Grâce aux récents travaux d'A. Erschler, on sait contrôler l'isopérimétrie du produit en couronne de deux graphes à partir de l'isopérimétrie de chacun d'entre eux. Ici, un des deux graphes étant le graphe ayant comme ensemble de points  $\mathcal{C}$ , on est finalement ramené à étudier de manière assez fine la géométrie d'un amas et ses propriétés isopérimétriques. Notons  $\mathcal{B}_n = [-n; n]^d$  et  $\mathcal{C}_n$  la composante connexe de  $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}_n$  contenant l'origine. Avec des techniques similaires à celles de [13], on prouve la propriété suivante.

PROPOSITION 1.4. — *Soient  $\gamma > 0$  et  $p > p_c$ . Il existe  $\beta > 0$  tel que pour tout  $c > 0$ ,  $Q$  p.s. sur  $\#\mathcal{C} = +\infty$ , pour  $n$  assez grand, on ait,*

$$(1) \quad \frac{|\partial_{\mathcal{C}_\gamma} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta \text{ pour tout sous-ensemble } A \text{ connexe de } \mathcal{C}_n,$$

où

$$f_c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < cn^\gamma, \\ x^{1-1/d} & \text{si } x \geq cn^\gamma, \end{cases}$$

$$\partial_{C^g} A = \{(x, y) \in \mathbb{E}^d ; \omega(x, y) = 1 \text{ et } x \in A \text{ et } y \notin A\}.$$

Le rang à partir duquel l'inégalité (1) est satisfaite dépend de l'amas  $\omega$  et de  $c$ .

REMARQUE 1.5. — Les mêmes techniques s'appliquent pour des marches aléatoires sur  $\mathbb{Z}^d$  aux plus proches voisins, symétriques et dont les taux de transitions sont bornés supérieurement et inférieurement (condition d'ellipticité). Cette dernière condition n'est pas satisfaite pour la percolation.

Après avoir fixé quelques notations, ce travail se décompose en quatre parties. Dans la partie 2, nous définissons un produit en couronne, nous expliquons l'intérêt d'un tel outil dans notre cas et nous traitons le problème de l'isopérimétrie sur un produit en couronne. Dans la partie 3, nous étudions le profil isopérimétrique d'un amas et nous prouvons en particulier la propositions 1.4. À l'aide des parties 2 et 3, nous établissons dans la partie 4, une borne supérieure pour la probabilité de retour à l'origine dans le produit en couronne, et nous en déduisons une borne supérieure pour  $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$ . Enfin, dans la partie 5 nous prouvons la borne inférieure du théorème 1.1.

### 1.1. Notations

- Nous utiliserons le symbole  $:=$  pour définir une nouvelle quantité; on notera  $|A|$  ou bien  $\#A$  le cardinal d'un ensemble  $A$ .
- La somme disjointe de deux ensembles  $A$  et  $B$  sera notée  $A \dot{\cup} B$ . Cette notation représente un ensemble en bijection avec  $(A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\})$ .
- On notera  $D(0, x)$  la longueur minimale (appelée aussi *distance chimique*) d'un chemin constitué d'arêtes ouvertes reliant  $x$  à 0 et on pose

$$B_r(\mathcal{C}) = \{x \in \mathbb{Z}^d ; D(0, x) \leq r\}.$$

On utilisera également la norme  $N_1$  sur  $\mathbb{Z}^d$  définie par  $N_1(x) = \sum_{i=1, \dots, d} |x_i|$ , si  $x = (x_1, \dots, x_d)$ .

- $C$  et  $c$  représenteront des constantes dont la valeur peut évoluer de ligne en ligne mais la dépendance en  $n$  ou  $\omega$  sera spécifiée par l'ordre des quantificateurs. La constante  $\beta$  dépendra uniquement de  $p$ .
- Un graphe  $G$  est un couple  $(V(G), E(G))$ , où  $V(G)$  désigne l'ensemble des points de  $G$  (vertices of  $G$ ) et  $E(G)$  désigne l'ensemble des arêtes de  $G$ . Dans cet article, les graphes ne seront pas orientés (sauf mention explicite comme par exemple dans le lemme 2.7); les arêtes de type  $(x, x)$  sont exclues. Un *sous-graphe* de  $G$  est un graphe  $G'$  tel que  $V(G') \subset V(G)$  et  $E(G') \subset E(G)$ .

- On utilisera en particulier le graphe  $\mathcal{C}^g$  défini par

$$V(\mathcal{C}^g) = \mathcal{C} \quad \text{et} \quad E(\mathcal{C}^g) = \{(x, y) \in E^d ; x, y \in \mathcal{C} \text{ et } \omega(x, y) = 1\}$$

et le graphe  $\mathcal{C}_n^g$  défini par

$$V(\mathcal{C}_n^g) = \mathcal{C}_n \chi \quad \text{et} \quad E(\mathcal{C}_n^g) = \{(x, y) \in E^d ; x, y \in \mathcal{C}_n \text{ et } \omega(x, y) = 1\}$$

(on rappelle que  $\mathcal{C}_n$  désigne la composante connexe de  $\mathcal{C} \cap [-n, n]^d$  contenant l'origine).

De façon générale, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur les arêtes,  $V^g$  désignera le graphe ayant cet ensemble d'arêtes et dont l'ensemble des points est  $V$ . On notera également  $\mathcal{B}_n^g$  le graphe ayant  $\mathcal{B}_n = [-n, n]^d$  comme ensemble de points et où

$$E(\mathcal{B}_n^g) = \{(x, y) \in E^d ; x \text{ et } y \in \mathcal{B}_n\}.$$

- Soit  $G$  un graphe, pour  $A \subset V(G)$ , on notera

$$\partial_G A = \{(x, y) \in E(G) ; x \in A \text{ et } y \in V(G) - A\}.$$

Cette notation est évidemment cohérente avec la définition du bord  $\partial_{\mathcal{C}^g}$  dans la proposition 1.4. En notant  $\mathcal{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$ , le bord « classique » dans  $\mathbb{Z}^d$  d'un ensemble  $A$  est donc noté  $\partial_{\mathcal{L}^d} A$ .

- On travaillera plutôt avec les fonctions de Følner lorsqu'on parlera d'isopérimétrie. Soit  $G$  un graphe, on désigne par  $\text{Fol}_G$  la fonction de Følner de  $G$ , définie par

$$\text{Fol}_G(k) = \min \{|U| ; U \subset V(G) \text{ et } |\partial_G U|/|U| \leq \frac{1}{k}\}.$$

- Si  $G'$  est un sous-graphe de  $G$ , on notera :

$$\text{Fol}_{G'}^G(k) = \min \{|U| ; U \subset V(G') \text{ et } |\partial_G U|/|U| \leq \frac{1}{k}\}.$$

$\text{Fol}_{G'}^G$  est toujours une fonction de Følner de  $G'$  mais où le bord est compté dans  $G$ .

## 2. Produit en couronne

Dans cette section, après avoir donné la définition d'un produit en couronne, on motive l'introduction de tels graphes par la propriété 2.3, en considérant une marche aléatoire construite à partir des noyaux de transition de la marche  $X$ , sur un certain produit en couronne. Enfin, on estime la fonction de Følner du produit en couronne en question à l'aide des fonctions de Følner des graphes considérés.

**2.1. Définition.** — Soient  $A$  et  $B$  deux graphes et  $b_0$  un point de  $V(B)$ . Pour une fonction  $f : V(A) \rightarrow V(B)$ , on appelle *support* de  $f$ , l'ensemble

$$\{a \in V(A) ; f(a) \neq b_0\}.$$

DÉFINITION 2.1. — Le *produit en couronne*  $A \wr B$  de deux graphes  $A$  et  $B$ , est le graphe suivant :

- $V(A \wr B)$  est l'ensemble des couples  $(a, f)$  où  $a \in V(A)$  et  $f : V(A) \rightarrow V(B)$  est à support fini ;
- les arêtes sont définies de la manière suivante :  $((a_1, f_1), (a_2, f_2))$  appartient à  $E(A \wr B)$  si l'on a
  - $a_1 = a_2$  et, pour tout  $x \neq a_1$ ,  $f_1(x) = f_2(x)$  et  $(f_1(a_1), f_2(a_1)) \in E(B)$
  - ou  $f_1 = f_2$  et  $(a_1, a_2) \in E(A)$ .

Si  $(a, f) \in V(A \wr B)$ , l'élément  $f$  est appelée la *configuration*. On appellera le graphe  $A$  la *base* du produit en couronne  $A \wr B$ .

REMARQUE 2.2. — Si  $A$  et  $B$  sont des graphes de Cayley de groupes, le produit en couronne de  $A$  et  $B$  est le graphe de Cayley du produit en couronne de ces groupes, avec l'ensemble « standard » de générateurs construits à partir des générateurs de  $A$  et  $B$  (voir [8]). (Le produit en couronne de deux groupes  $A$  et  $B$  est le produit semi-direct de  $A$  et  $\sum_A B$  où  $A$  agit sur  $\sum_A B$  par  ${}^a f(x) = f(xa^{-1})$ .)

**2.2. Marches aléatoires.** — Dans notre cas, on prend  $A = \mathcal{C}^g$  et pour  $B$  le graphe de Cayley du groupe  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$  avec  $\bar{1}$  comme générateur. On notera « encore »  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ce graphe. On choisit  $b_0 = \bar{0}$ . Soit  $o$  le point de  $A \wr B$  tel que  $o = (0, f_0)$  où  $0$  est l'origine de  $\mathbb{Z}^d$  et  $f_0$  est la configuration qui vaut  $\bar{0}$  en tous points. Notons  $p(\cdot, \cdot)$  les noyaux de transition de la marche  $X$  définie dans l'introduction, *i.e.* pour tout  $a, b \in \mathcal{C}$ ,

$$p(a, b) = \mathbb{P}_x^\omega(X_1 = y) = \frac{\omega(a, b)}{\nu(a)}$$

où  $\nu(a)$  est le nombre de voisins dans  $\mathcal{C}$  de  $a$ . Pour  $\alpha \in ]0; 1[$ , on considère alors la marche  $Z$  sur  $\mathcal{C}^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  définie par  $Z_0 = o$  et dont les noyaux de probabilité

sont

$$\begin{aligned} \tilde{p}((a, f), (b, f_{a,\bar{0}})) &= \alpha^2 p(a, b), \\ \tilde{p}((a, f), (b, f_{a,\bar{1}})) &= \alpha(1 - \alpha)p(a, b), \\ \tilde{p}((a, f), (b, f_{a,\bar{0}})) &= \alpha(1 - \alpha)p(a, b), \\ \tilde{p}((a, f), (b, f_{a,\bar{1}})) &= (1 - \alpha)^2 p(a, b), \end{aligned}$$

où

$$f_{b,y}^{a,x}(u) = \begin{cases} f(u) & \text{si } u \neq a \text{ ou } b, \\ x & \text{si } u = a, \\ y & \text{si } u = b. \end{cases}$$

L'interprétation de cette marche est la suivante : imaginons qu'il y ait une lampe en chaque point de  $\mathcal{C}$ , qui soit allumée (resp. éteinte) lorsque la configuration en ce point vaut  $\bar{1}$  (resp.  $\bar{0}$ ). Supposons maintenant qu'à un certain instant le marcheur se trouve en un certain point de  $\mathcal{C}$ . En une unité de temps, il allume (resp. éteint) la lampe où il se trouve avec probabilité  $1 - \alpha$  (resp.  $\alpha$ ), il saute ensuite dans  $\mathcal{C}$  uniformément sur ses voisins et il allume (resp. éteint) à nouveau la lampe au point où il se trouve avec probabilité  $1 - \alpha$  (resp.  $\alpha$ ).

Ces trois étapes sont indépendantes. Remarquons que si on « oublie » les configurations et que l'on regarde uniquement le premier argument de la marche  $Z$ , on retrouve la marche  $X$  ; ainsi on peut écrire  $Z_n = (X_n, f_n)$ . Par ailleurs, si nous fixons une trajectoire dans  $\mathcal{C}$ , les états des différentes lampes sont indépendants. Enfin, la marche  $Z$  admet des mesures réversibles, elles sont proportionnelles à

$$m(a, f) = \nu(a) \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^{\#\{i; f(i) = \bar{1}\}}.$$

Nous verrons plus tard qu'il suffit d'étudier le cas  $\alpha = \frac{1}{2}$  pour obtenir la borne supérieure dans le théorème 1.1 (la mesure  $m$  se réduit alors à  $m(a, f) = \nu(a)$ ) mais pour la borne inférieure du théorème et pour d'autres valeurs de  $\alpha$ , la mesure  $m$  nous sera utile.

Le lien entre la marche  $Z$  sur ce produit en couronne et notre problème initial réside dans la propriété suivante. On note  $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega$  la loi de la marche  $Z$  issue de  $o$ .

PROPOSITION 2.3. — On a  $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) = \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n} = 0\}})$ .

*Démonstration.* — On a

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) \\
 &= \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega((X_{2n}, f_{2n}) = (0, f_0)) \\
 &= \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_{2n}) \in \mathbb{Z}^d \\ k_0 = k_{2n} = 0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{2n} = k_{2n} \text{ et } f_{2n} = f_0) \\
 &= \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_{2n}) \in \mathbb{Z}^d \\ k_0 = k_{2n} = 0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{2n} = k_{2n}) \\
 &\quad \times \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(f_{2n} = f_0 \mid X_0 = k_0, \dots, X_{2n} = k_{2n}) \\
 &= \sum_{\substack{(k_0, k_1, \dots, k_{2n}) \in \mathbb{Z}^d \\ k_0 = k_{2n} = 0}} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{2n} = k_{2n}) \times \alpha^{\#\{k_0, \dots, k_{2n}\}} \\
 &= \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}). \quad \square
 \end{aligned}$$

**2.3. Remontée de l’isopérimétrie sur le produit en couronne.** — On explique dans cette sous-section, comment une inégalité isopérimétrique sur le graphe  $\mathcal{C}_n^g$  se transmet au produit en couronne  $\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Ce type de résultat est dû à A. Erschler. Nous présentons ici, une preuve légèrement plus simple et plus détaillée. Le résultat principal est le suivant :

PROPOSITION 2.4. — *Il existe des constantes universelles  $C_1, C_2 > 0$  telles que,*

$$\text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(k) \geq e^{C_1 \text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g}^{\mathcal{C}_n^g}(C_2 k)}.$$

On peut prendre (cf. preuve)  $C_1 = \frac{1}{9} \log(2)$  et  $C_2 = \frac{1}{1000}$ .

La preuve de cette propriété est assez technique et découle de plusieurs lemmes. Pour alléger les notations, on notera, dans cette section,

$$\partial_l = \partial_{\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}.$$

Pour comprendre la preuve, examinons d’où proviennent les points du bord d’un ensemble  $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ . Il y en a de deux types :

- les points du bord provenant du bord de la base  $\mathcal{C}_n^g$ , i.e. : les points de la forme  $((a, f); (b, f))$  avec  $(a, b) \in E(\mathcal{C}_n^g)$ ,
- les points du bord provenant du bord en « configuration », i.e. les points de la forme  $((a, f); (a, g))$  avec  $f = g$  sauf en  $a$ .

Avant d’énoncer les lemmes préliminaires à la preuve de la propriété 2.4, introduisons quelques notions. Soit  $U \subset V(\mathcal{C}_n \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ .

- On associe à chaque  $U$  un graphe  $K_U$  de la manière suivante :
  - les points sont les configurations  $f$  de l’ensemble

$$\{f ; \exists a \in \mathcal{C}_n, (a, f) \in U\},$$

- deux points distincts  $f$  et  $g$  sont reliés par une arêtes si  
 $\exists a \in C_n$  tel que  $(a, g)$  et  $(a, f) \in U$ , et  $\forall x \neq a, f(x) = g(x)$ ,  
*i.e.*  $f = g$  sauf en un point de  $p(V)$ , où  $p$  est la projection

$$V(C_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \longrightarrow V(C_n^g) = C_n.$$

- Soit  $f \in K_U$ . On dit que  $f$  est *b-satisfaisable* s'il y a au moins  $b$  arêtes attachées à  $f$  dans  $K_U$ , *i.e.*

$$\#\{x \in p(V) ; \dim_x f = 1\} \geq b,$$

où  $\dim_x f = \#\{g ; (x, g) \in V \text{ et } \forall y \neq x, f(y) = g(y)\} \in \{0, 1\}$ .

Nous noterons  $S_V(b)$  l'ensemble des configurations  $b$ -satisfaisables pour alléger les notations; la plupart du temps nous oublierons la dépendance en  $U$  et nous noterons donc  $S(b)$  cet ensemble.

REMARQUE 2.5. — Pour tout  $U$ , on a

$$|U| \geq 2|E(K_U)|,$$

et si pour tout  $(x, f) \in U$ , on a  $\dim_x f = 1$  (si  $U$  n'a pas de points « isolés ») alors,

$$|U| = 2\#E(K_U).$$

- Si  $f$  n'est pas  $b$ -satisfaisable, on dira que  $f$  est *b-non satisfaisable* et on notera  $NS(b)$  l'ensemble des configurations  $b$ -non satisfaisables.
- Soit  $K$  un graphe. On étend la notion de satisfaisabilité à  $K$ . Un point  $x \in V(K)$  sera dit *b-satisfaisable* (resp. *b-non satisfaisable*) s'il y a au moins (resp. strictement moins de)  $b$  arêtes attachées à  $x$ .
- Une arête sera dite *b-satisfaisable* si elle relie deux configurations  $b$ -satisfaisables; sinon on dira qu'elle est *b-non satisfaisable*. On notera  $S^e(b)$  ou  $S_U^e(b)$  (resp.  $NS^e(b)$ ) l'ensemble des arêtes  $b$ -satisfaisables (resp.  $b$ -non satisfaisables).
- Un point  $u = (x, f) \in U$  sera dit *b-satisfaisable* (resp. *b-nonsatisfaisable*) si  $f \in S(b)$  (resp.  $NS(b)$ ). On utilisera la notation  $S^p(b)$  et  $NS^p(b)$  pour l'ensemble des points de  $U$  qui sont (ou ne sont pas)  $b$ -satisfaisables.
- Un point  $u = (x, f) \in U$  sera dit *bon* si  $\dim_x f = 1$ ; sinon on dira qu'il est *mauvais*.

Maintenant la preuve de la proposition 2.4 se décompose en trois étapes : on suppose que  $|\partial_i U|/|U| \leq 1/k$ ; on prouve d'abord qu'il y a peu de points  $b$ -non satisfaisables (pour une certaine valeur de  $b$ ), puis on extrait un sous-graphe tel que tous les points soient  $\frac{1}{3}b$ -satisfaisables; on en déduit enfin une minoration de  $|U|$ .

Dans la proposition suivante, on note  $\phi$  la fonction  $\text{Fol}_{C_n^g}^{C_n^g}$ .

LEMME 2.6. — Soit  $U \subset V(C_n^g \setminus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  tel que  $|\partial_i U|/|U| \leq \frac{1}{1000k}$ . Alors :

- (i)  $\frac{|\{u \in U ; u \text{ mauvais}\}|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k}$ ;
- (ii)  $\frac{|\{u \in U ; u \in NS^p(\frac{1}{3}\phi(k))\}|}{|V|} \leq \frac{1}{500}$ .

*Démonstration.* — Pour (i), on remarque qu'un point mauvais de  $U$  nous donne un point du bord en « configuration » de  $U$ . Ainsi

$$|\partial_i U| \geq \#\{u \in U ; u \text{ mauvais}\}.$$

Pour (ii) posons

$$\begin{aligned} \text{Neud} &= \{u \in U ; u \in NS^p(\frac{1}{3}\phi(k))\} = \{u = (x, f) \in U ; f \in NS(\frac{1}{3}\phi(k))\}, \\ \text{Neud}(f) &= \{(x, f); (x, f) \in U\}. \end{aligned}$$

Notons que l'on a  $p(\text{Neud}(f)) = \{x ; (x, f) \in U\}$ . Pour un ensemble  $F$  de configurations, on pose

$$\text{Neud}(F) = \bigcup_{f \in F} \text{Neud}(f).$$

Remarquons que c'est une union disjointe.

Soit maintenant  $f \in NS(\frac{1}{3}\phi(k))$ , intéressons-nous à l'ensemble  $p(\text{Neud}(f))$ . Chaque point du bord de  $p(\text{Neud}(f))$  fournit un point du bord de  $U$  en « base ». Soit l'ensemble  $p(\text{Neud}(f))$  possède une part importante de bord relativement à son volume, et il fournit alors une part de bord en « base » dans  $U$  de l'ordre de son volume. Ou bien, cet ensemble possède peu de bord relativement à son volume, et dans ce cas, du fait que  $f$  soit non satisfaisable, cet ensemble fournit à  $U$  du bord en « configuration ».

Dans tous les cas, on obtient des points du bord de  $U$  mais les hypothèses sur  $U$  limitent cet apport. On distingue donc deux cas.

— Premier cas : on suppose que

$$f \in F_1 := \{f \in NS(\frac{1}{3}\phi(k)) ; |\partial_{C^g} p(\text{Neud}(f))|/|p(\text{Neud}(f))| > 1/k\}.$$

On fait correspondre à chaque point du bord de  $p(\text{Neud}(f))$  un point du bord de  $U$  par l'application injective

$$\bigcup_{f \in F_1} \partial_{C^g} p(\text{Neud}(f)) \longrightarrow \partial_i U, \quad (x, y) \longmapsto ((x, f); (y, f)).$$

Donc, on a

$$(2) \quad |\partial_i U| \geq \sum_{f \in F_1} |\partial_{C^g} p(\text{Neud}(f))| \geq \frac{1}{k} \sum_{f \in F_1} |p(\text{Neud}(f))| \geq \frac{1}{k} |\text{Neud}(F_1)|.$$

— Second cas : on suppose que

$$f \in F_2 := \{f \in NS(\frac{1}{3}\phi(k)) ; |\partial_{C^o} p(\text{Neud}(f))|/|p(\text{Neud}(f))| \leq 1/k\}.$$

Comme  $f \in NS(\frac{1}{3}\phi(k))$ , on a  $|\{x \in p(\text{Neud}(f)) ; \dim_x f = 1\}| < \frac{1}{3}\phi(k)$ , d'où

$$|\{x \in p(\text{Neud}(f)) ; \dim_x f = 0\}| \geq |\text{Neud}(f)| - \frac{1}{3}\phi(k)$$

(on a utilisé le fait que  $|p(\text{Neud}(f))| = |\text{Neud}(f)|$ ). Or  $f \in F_2$  ; donc par la définition de la fonction de Følner on a  $|\text{Neud}(f)| \geq \phi(k)$ . Ainsi,

$$|\{x \in p(\text{Neud}(f)) ; \dim_x f = 0\}| \geq \frac{2}{3}|\text{Neud}(f)|.$$

Mais pour tout  $f \in F_2$ , si  $y \in \{x \in p(\text{Neud}(f)) ; \dim_x f = 0\}$  le point  $(y, f)$  nous donne un point du bord de  $U$  en configuration de manière injective, par l'application

$$\begin{aligned} \bigcup_{f \in F_2} \{(x, f) \in \text{Neud}(f) ; \dim_x f = 0\} &\longrightarrow \partial_i U, \\ (x, f) &\longmapsto ((x, f); (y, \bar{f}_x)), \end{aligned}$$

où  $\bar{f}_x$  est la configuration qui vaut  $f$  en tout point différent de  $x$  et dont la valeur en  $x$  est  $\bar{0}$  (resp.  $\bar{1}$ ) si  $f(x) = \bar{1}$  (resp.  $f(x) = \bar{0}$ ). Donc, on obtient,

$$|\partial_i U| \geq \frac{2}{3} \sum_{f \in F_2} |\text{Neud}(f)| \geq \frac{2}{3} |\text{Neud}(F_2)|.$$

D'où l'on déduit que pour  $k \geq 2$

$$(3) \quad |\partial_i U| \geq \frac{1}{k} |\text{Neud}(F_2)|.$$

En additionnant (2) et (3) et en utilisant que  $|\partial_i U|/|U| < \frac{1}{1000k}$ , on a

$$\frac{|\text{Neud}|}{|U|} < \frac{1}{500}. \quad \square$$

LEMME 2.7. — Soit  $b > 0$  et soit  $K$  un graphe. Supposons que  $E(K) \neq \emptyset$  et

$$\frac{|NS_K^c(b)|}{|E(K)|} < \frac{1}{2}.$$

Alors il existe un sous-graphe non vide  $K'$  de  $K$  tel que toutes les arêtes soient  $S_{K'}^p(\frac{1}{3}b)$ .

Démonstration. — On efface tous les sommets  $NS^p(\frac{1}{3}b)$  et ainsi que toutes les arêtes adjacentes. Il peut alors apparaître de nouveaux sommets  $NS^p(\frac{1}{3}b)$  dans ce nouveau graphe. On les efface à nouveau ainsi que les arêtes adjacentes,

et on itère ce processus « d'effacement » tant qu'il y a des sommets  $NS^p(\frac{1}{3}b)$ . Prouvons que ce processus se termine avant que le graphe soit vide. Posons,

$$C_1 = |NS_K^e(b)|,$$

$$C_2 = |\{e \in S_K^e(b) ; e \text{ effacée à la fin du processus}\}|,$$

$$C_0 = |\{e \in E(K) ; e \text{ effacée à la fin du processus}\}|.$$

Si nous montrons que  $C_2 \leq C_1$ , le lemme sera démontré car

$$C_0 \leq C_1 + C_2 \leq 2C_1 < |E(K)|.$$

Ce qui signifiera qu'il reste des points non effacés.

Pour prouver que  $C_2 \leq C_1$ , introduisons une orientation des arêtes. Si  $A$  et  $B$  sont deux points du graphe  $K$  reliés par une arête, on oriente l'arête de  $A$  vers  $B$ , si  $A$  a été effacé avant  $B$ . Nous choisissons une orientation arbitraire si  $A$  et  $B$  sont effacés simultanément ou si  $A$  et  $B$  sont non effacés. Nous noterons

$$A, \quad (\text{resp. } A)$$

↓
↑

l'ensemble des arêtes orientées quittant  $A$  (resp. arrivant en  $A$ ).

SOUS-LEMME 2.8. — Soient  $b > 0$  et  $A$  un point de  $K$  effacé à la fin du processus. Supposons que  $A$  soit initialement  $S^p(b)$ ; alors

$$|A|_{\downarrow} \leq \frac{1}{2}|A|_{\uparrow}.$$

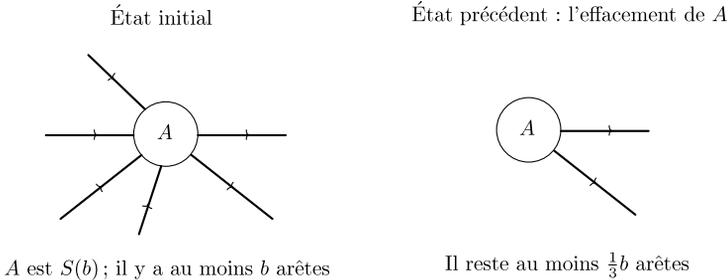


FIGURE a

Démonstration. — La figure a illustre le début et la fin du processus au point  $A$ . On a

$$|A|_{\downarrow} \leq \frac{1}{3}b \quad \text{et} \quad |A|_{\uparrow} \geq b - \frac{1}{3}b \geq \frac{2}{3}b.$$

D'où  $|A|_{\downarrow} \leq \frac{1}{2}|A|_{\uparrow}$ . □

Pour finir la preuve, on pose :

$$D_1 = \{\text{points effacés à l'étape 1}\},$$

$$D_i = \{\text{points initialement } S^p(b), \text{ effacés à l'étape } i\} \text{ pour } i \geq 2,$$

$$F_i = \{\text{arêtes entre } D_i \text{ et } D_{i-1}\},$$

$$F'_i = \{\text{arêtes quittant } D_{i-1}\}.$$

Ces ensembles sont schématisés sur la figure b.

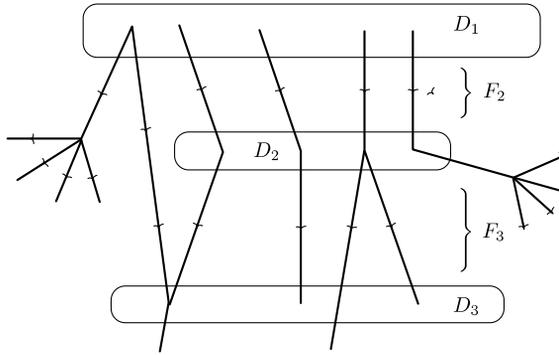


FIGURE b

Notons que  $F_i \subset F'_i$  et que par ailleurs les arêtes de  $F'_i$  sont effacées à l'étape  $i - 1$ . En appliquant le sous-lemme 2.8 en chaque point de  $D_i$ , on obtient

$$\forall i \geq 2, \quad |F'_{i+1}| \leq \frac{1}{2}|F_i|.$$

D'où,  $|F'_{i+1}| \leq 2^{-(i-1)}|F_2|$  (on a utilisé le fait que  $|F_i| \leq |F'_i|$ ). Ainsi,

$$(4) \quad \left| \bigcup_{i \geq 3} F'_i \right| \leq \left( \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \right) |F_2|.$$

Maintenant, les arêtes de  $F_2$  sont  $NS_K^e(b)$  car si elles étaient  $S_K^e(b)$ , elles relierait deux points  $S_K^p(b)$  et en particulier, les points de  $D_1$  seraient  $S_K^p(b)$ , donc  $S_K^p(\frac{1}{3}b)$  donc non effacés à l'étape 1. Il s'en suit que,

$$(5) \quad |F_2| \leq |NS_K^e(b)| = C_1.$$

Par ailleurs, toute arête  $S^e(b)$  effacée, est dans un certain  $F'_i$  avec  $i \geq 3$ , donc

$$(6) \quad C_2 = \#\{e \in S^e(b) ; e \text{ effacée à la fin du processus}\} \leq \left| \bigcup_{i \geq 3} F'_i \right|.$$

Des inégalités (6), (5), (4), on déduit que  $C_2 \leq C_1$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

LEMME 2.9. — Soit  $Y > 0$  et soit  $\mathcal{A}$  un ensemble non vide de configurations tel que pour toute configuration de  $\mathcal{A}$ , il existe au moins  $Y$  points où l'on peut changer la valeur de  $f$  tout en restant dans  $\mathcal{A}$ ; alors on a  $|\mathcal{A}| \geq 2^Y$ , i.e.

$$(\forall f \in \mathcal{A}, \exists a_1, a_2, \dots, a_Y \in \mathcal{C}_n \text{ tels que } \bar{f}_{a_i} \in \mathcal{A}) \implies |\mathcal{A}| \geq 2^Y,$$

où  $\bar{f}_{a_i}$  est définie à partir de  $f$  par

$$\bar{f}_{a_i}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a_i, \\ \bar{1} - f(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — On raisonne par récurrence sur  $Y$ . Si  $Y = 1$ , la propriété est satisfaite. Supposons  $Y \geq 2$  et considérons un point  $x$  (dans la base) tel qu'il existe  $f, g \in \mathcal{A}$  satisfaisant  $f(x) = 0$  et  $g(x) = 1$ , et posons

$$\mathcal{A}_0 = \{h \in \mathcal{A}; h(x) = 0\} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_1 = \{h \in \mathcal{A}; h(x) = 1\}.$$

Les ensembles  $\mathcal{A}_0$  et  $\mathcal{A}_1$  ne sont pas vides; on a  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_0$  et cette union est disjointe. Par ailleurs,  $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1$  vérifient l'hypothèse de récurrence avec la constante  $Y - 1$ . D'où

$$|\mathcal{A}| = |\mathcal{A}_0| + |\mathcal{A}_1| \geq 2 \cdot 2^{Y-1} = 2^Y. \quad \square$$

À l'aide des trois lemmes précédents, on peut maintenant démontrer la propriété 2.4.

Preuve de la propriété 2.4. — Soit  $U \subset \mathcal{C}_n^g \setminus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  vérifiant  $|\partial_i U|/|U| \leq \frac{1}{1000k}$ . Procédons en cinq étapes.

- Soit  $U' = U - \{u \in U; u \text{ mauvais}\}$ . Posons  $\tilde{K} = K_{U'}$ ; on a  $E(K_U) = E(K_{U'})$  ( $\tilde{K}$  est le sous-graphe de  $K_U$  qui ne contient que des points attachés à une arête de  $K_U$ ).
- $V(\tilde{K})$  (et donc aussi  $E(\tilde{K})$  par construction) est non vide, puisque par le (i) du lemme 2.6 :

$$|V(\tilde{K})| \geq (1 - \frac{1}{1000k})|U|.$$

- On a successivement, avec  $\theta = \frac{2}{999} < \frac{1}{2}$  :

$$\begin{aligned} \#\{e \in E(\tilde{K}) \cap NS^e(\frac{1}{3}\phi(k))\} &= \#\{e \in E(K_U) \cap NS^e(\frac{1}{3}\phi(k))\} \\ &\leq \frac{1}{2} \#\{u \in U; NS^p(\frac{1}{3}\phi(k))\} \quad (\text{remarque 2.5}) \\ &\leq \frac{1}{1000}|U| \quad (\text{par le lemme 2.6 (ii)}) \\ &\leq \frac{1}{1000-1/k} \#\{u \in U; u \text{ bon}\} \quad (\text{par le lemme 2.6 (i)}) \\ &= \frac{2}{1000-1/k} |E(\tilde{K})| \leq \theta |E(\tilde{K})|. \end{aligned}$$

- 1) Grâce aux points 2) et 3), on peut appliquer le lemme 2.7 à  $\widetilde{K}$  et déduire qu'il existe un sous-graphe  $K'$  de  $\widetilde{K}$  où tous les points sont  $S_{K'}^p(\frac{1}{9}\phi(k))$ .
- 2) On déduit du lemme 2.9 que,

$$|U| \geq 2^{\phi(k)/9}.$$

Ainsi on a prouvé que pour tout ensemble  $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ,

$$\frac{|\partial_i U|}{|U|} \leq \frac{1}{1000k} \implies |U| \geq 2^{\text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g}(k)/9},$$

ce qui implique,

$$\text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(k) \geq 2^{\text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g}(k/1000)/9},$$

et fournit des valeurs numériques des constantes  $C_1$  et  $C_2$ .

### 3. Isopérimétrie sur un amas de percolation

Après avoir brièvement discuté d'une première inégalité isopérimétrique, on explique quel type d'inégalité isopérimétrique est nécessaire pour prouver le théorème 1.1. Enfin le reste de cette section est consacrée à la preuve de la propriété 1.4.

**3.1. Point de départ.** — L'inégalité suivante est prouvée dans [13] :

PROPOSITION 3.1. — *Il existe une constante  $\beta = \beta(p, d) > 0$  telle que  $Q$  p.s. sur l'ensemble  $|\mathcal{C}| = +\infty$  on ait,*

$$\exists n_\omega, \forall n \geq n_\omega, \inf_{\substack{A \subset \mathcal{C}_n \\ |A| \leq \frac{1}{2}|\mathcal{C}_n|}} \frac{|\partial_{\mathcal{C}_n^g} A|}{|A|^{1-1/\epsilon}} \geq \frac{\beta}{n^{1-d/\epsilon}},$$

où  $\epsilon = \epsilon(n) = d + 2d(\log \log(n))/\log(n)$ .

Dans cette inégalité, on peut remplacer le bord dans  $\mathcal{C}_n^g$  par le bord dans  $\mathcal{C}^g$ , et enlever la condition sur le volume de  $A$ , en remarquant les deux points suivants :

- Pour tout  $A \subset \mathcal{C}_n$ ,  $\partial_{\mathcal{C}^g} A = \partial_{\mathcal{C}_{n+k}^g} A$  pour tout  $k \geq 1$ .
- Puis pour enlever la condition sur le volume, rappelons la propriété relative à la croissance du volume de  $\mathcal{C}_n$  (voir [13, Appendix B]).

PROPOSITION 3.2. — *Il existe  $\rho > 0$  tel que  $Q$  p.s. sur l'ensemble  $|\mathcal{C}| = +\infty$ , pour  $n$  assez grand,*

$$|\mathcal{C}_n| \geq \rho n^d.$$

Ainsi, par exemple il existe  $c' > 0$  tel que  $Q$  p.s. pour  $n$  assez grand, pour tout  $A \subset C_n$  on ait,

$$|A| \leq |C_n| \leq \frac{1}{2}|C_{n+c'n}|.$$

En effet  $|C_n| \leq n^d \leq \frac{1}{2}\rho(n+k)^d \leq \frac{1}{2}|C_{n+k}|$  est réalisée dès que l'on prend  $k \approx n$ .

On déduit donc de la propriété 3.1 (en modifiant la constante  $\beta$  par une constante multiplicative) que

$$\exists \beta > 0, Q \text{ p.s. pour } n \text{ assez grand, } \inf_{A \subset C_n} \frac{|\partial_{C_g} A|}{|A|^{1-1/\epsilon}} \geq \frac{\beta}{n^{1-d/\epsilon}}.$$

Cette manière de compter le bord nous donne une majoration de la probabilité de retour de la marche  $Z$  tuée quand elle sort de la boîte  $B_n = [-n, n]^d$ . Si on applique alors la même démarche que l'on va utiliser à la section 4, à partir de cette inégalité isopérimétrique, nous trouvons une majoration de la probabilité de retour de  $Z$  (et donc de la transformée de Laplace du nombre de points visités) en

$$e^{-ct^{d/(d+2)}/\log(t)^{c'}}.$$

Ceci n'est pas la borne supérieure attendue. La principale partie du travail consiste donc à supprimer le terme logarithmique. Pour cela, l'idée est de prouver une nouvelle inégalité isopérimétrique, qui est similaire à celle que l'on a dans le graphe  $\mathcal{L}^d = (\mathbb{Z}^d, E^d)$  pour les ensembles de 'gros' volume. Plus précisément, la propriété 1.4 peut s'interpréter ainsi, pour  $A \subset C_n$ , si  $|A|$  est grand, on a  $|\partial_{C_g} A|/|A|^{1-1/d} \geq C$ , et si  $|A|$  est petit, on peut dire que  $|\partial_{C_g} A| \geq 1$ .

Les deux sections suivantes sont consacrées à prouver la propriété 1.4 pour tout  $p > p_c$ , par des techniques de renormalisation. Dans la section 3.2, nous prouvons pour des valeurs de  $p$  proches de 1, une inégalité isopérimétrique modifiée, correspondant à un évènement croissant. Puis dans la section 3.3, à l'aide de [1, théorème 2.1], on déduit la propriété 1.4.

**3.2. Une autre inégalité isopérimétrique.** — Soit  $\mathcal{G}_n$  l'ensemble des points de  $B_n$  attachés à une arête ouverte. Soit alors  $\mathcal{L}_n$  la plus grosse composante connexe de  $\omega$  dans  $B_n$ . On note  $\bar{\mathcal{L}}_n$  la composante connexe de  $\mathcal{L}_n$  dans le graphe  $\omega$ . L'ensemble  $\bar{\mathcal{L}}_n^g$  est le graphe ayant  $\bar{\mathcal{L}}_n$  comme ensemble de points et l'ensemble des arêtes est défini par

$$E(\bar{\mathcal{L}}_n^g) = \{(x, y) ; \omega(x, y) = 1, x, y \in \bar{\mathcal{L}}_n\}.$$

Posons pour  $A \subset B_n$ ,  $n(A)$  le nombre de composantes connexes de  $B_n - \mathcal{L}_n$  qui contiennent au moins une composante connexe de  $A$ . Notons que si  $A$  est connexe, on a  $n(A) = 0$  ou 1 suivant que  $A \subset \mathcal{L}_n$  ou non.

Remarquons également que si  $A \subset B_n$ ,

$$|\partial_{\bar{\mathcal{L}}_n^g} A| = |\{(x, y) \in E^d ; x \in A \cap \bar{\mathcal{L}}_n, y \in B_{n+1} - A \text{ et } \omega(x, y) = 1\}|.$$

PROPOSITION 3.3. — Il existe  $p_0 < 1$  tel que pour tout  $p \in [p_0; 1]$  :

(7)  $\exists \beta > 0, \forall c > 0, Q$  p.s.  $\exists n_{\omega,c}, \forall n \geq n_{\omega,c}, \forall A \subset \mathcal{B}_n$  connexe,

$$\frac{n(A) + |\partial_{\mathcal{L}_n^g} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta.$$

Avant de prouver cette propriété, remarquons deux faits :

— D’abord l’évènement défini par l’équation (7) est croissant. En effet, l’ajout d’une arête à  $\omega$ , ne fait pas diminuer  $|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A|$ . Et si  $n(A)$  diminue de 1, cela signifie qu’il y avait une composante connexe de  $A$  qui n’intersectait pas  $\mathcal{L}_n$  et qui maintenant intersecte  $\mathcal{L}_n$ , donc le bord  $|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A|$  a augmenté de 1. Finalement, la somme  $n(A) + |\partial_{\mathcal{L}_n^g} A|$  ne décroît pas.

C’est cette raison qui motive l’introduction d’une telle inégalité, afin de permettre l’utilisation des techniques de renormalisation.

— Par ailleurs, pour  $n$  assez grand,  $\mathcal{C}_n = \mathcal{L}_n$  (voir la première partie de la preuve de 3.3), si l’on prend alors  $A \subset \mathcal{C}_n$  connexe,  $n(A) = 0$  et on retrouve l’inégalité 1.4 pour  $p$  proche de 1, comme conséquence de la proposition 3.3.

*Démonstration.* — Commençons par prouver que  $\mathcal{L}_n = \mathcal{C}_n$  pour  $n$  assez grand, ce qui nous sera utile dans la suite de la preuve.

Supposons  $\mathcal{L}_n \neq \mathcal{C}_n$ . On a immédiatement par la propriété 3.2 que

(8)  $|\mathcal{L}_n| \geq |\mathcal{C}_n| \geq \rho n^d.$

Soient  $C_i$  les composantes connexes de  $\mathcal{B}_n - \mathcal{L}_n$  dans le graphe  $\mathcal{B}_n^g$ . Pour tout  $i$ , on a  $\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i$  est  $(*)$ -connexe<sup>(1)</sup> (car  $C_i$  et  $\mathcal{B}_n - C_i$  sont connexes) et

$$\frac{\sum_{e \in \partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i} 1_{\{w(e)=1\}}}{|\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i|} = 0.$$

Pour  $\beta > 0$ , posons

(9)  $\mathcal{A}'_n = \left\{ \exists F \subset E(\mathcal{B}_n^g); (\sum_{e \in F} 1_{\{w(e)=1\}}) / |F| \leq \beta, \right.$   
 $\left. |F| \geq (\log n)^2, F \text{ } (*)\text{-connexe} \right\}.$

On a

$$Q(\mathcal{A}'_n) \leq \sum_{|F| \geq (\log n)^2 \text{ et } F \text{ } (*)\text{-connexe}} Q\left(\frac{\sum_{e \in F} 1_{\{w(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta\right).$$

(1) Un ensemble  $M$  d’arêtes est dit  $(*)$ -connexe si pour tout  $e, e'$  de  $M$ , il existe une suite d’arêtes  $e_1, \dots, e_m$  de  $M$  telle que  $e_1 = e$  et  $e_m = e'$  et  $e_i \overset{(*)}{\sim} e_{i+1}$  où  $(x, y) \overset{(*)}{\sim} (x', y')$  si  $\max |x_i - x'_i| \leq 1$  et  $\max |y_i - y'_i| \leq 1$ .

Du fait que les variables aléatoires  $(\omega(e))_e$  suivent des lois de Bernouilli( $p$ ) et sont indépendantes, par l'inégalité de Bienaymée Tchebitchef, on a

$$(10) \quad \forall \lambda \geq 0, \quad Q\left(\frac{\sum_{e \in F} 1_{\{\omega(e)=1\}}}{|F|} \leq \beta\right) \leq e^{\lambda\beta|F|} (pe^{-\lambda} + 1 - p)^{|F|}.$$

D'où, pour tout  $\lambda \geq 0$  on déduit

$$(11) \quad Q(\mathcal{A}'_n) \leq \sum_{k \geq (\log n)^2} e^{\lambda\beta k} (pe^{-\lambda} + 1 - p)^k \times |\{F \subset E(\mathcal{B}_n^g); F \text{ (*)-connexe, } |F| = k\}|.$$

Mais  $|\{F \subset E(\mathcal{B}_n^g); F \text{ (*)-connexe, } |F| = k\}| \leq (2n + 1)^d e^{ak}$ , où  $a$  est une constante qui dépend seulement de  $d$  (voir [18]). Ainsi, le terme général de la série du membre de droite de l'équation (11) est majoré par

$$(2n + 1)^d e^{k[a + \lambda\beta + \log(pe^{-\lambda} + 1 - p)]}.$$

Si  $p$  est proche de 1, et si on choisit  $\beta$  assez petit (avec  $\beta < 1$ ), il existe  $\lambda > 0$  tel que  $a + \lambda\beta + \log(pe^{-\lambda} + 1 - p) = -\xi < 0$ . Donc pour  $n$  assez grand,

$$Q(\mathcal{A}'_n) \leq C (2n + 1)^d e^{-\xi(\log n)^2} \leq e^{-\frac{1}{2}\xi(\log n)^2}.$$

Cette dernière expression est sommable en  $n$ , donc par le lemme de Borel Cantelli, on déduit

$$\forall \omega, \exists n_\omega, \forall n \geq n_\omega, \quad \omega \in \mathcal{A}_n^c.$$

Ainsi,  $Q$  p.s. pour  $n$  assez grand  $\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i \in \mathcal{A}_n^c$ , i.e.

$$(12) \quad |\partial_{\mathcal{B}_n^g} C_i| \leq (\log n)^2.$$

Or  $|C_i| \leq |B_n| - |\mathcal{L}_n|$ . Puis de (8), on déduit

$$|C_i| \leq c'n^d \quad \text{avec} \quad c' < 1.$$

Puisque  $C_i$  a un volume plus petit qu'une fraction du volume de  $\mathcal{B}_n$ , on peut donc lui appliquer l'inégalité isopérimétrique restreinte à une boîte  $\mathbb{Z}^d$ , pour en déduire

$$(13) \quad |C_i| \leq C_d \log(n)^{2d/(d-1)}.$$

Or, si  $\mathcal{L}_n \neq \mathcal{C}_n$ , il existe  $i$  tel que  $\mathcal{C}_n \subset C_i$ . Ce qui est impossible compte tenu de (13) et de la propriété 3.2. Donc pour  $n$  assez grand,  $\mathcal{L}_n = \mathcal{C}_n$ .

Fixons-nous à présent un  $c > 0$ .

Si  $|A| < cn^\gamma$ , (7) est satisfaite puisque  $n(A) + |\partial_{\mathcal{L}_n^g} A| \geq 1$ . Supposons donc maintenant  $|A| \geq cn^\gamma$ . Par la majoration (13) vérifiée par les volume des  $C_i$ , nécessairement  $A$  intersecte  $\mathcal{L}_n$ . De ce fait, on a  $n(A) = 0$ . Nous voulons donc prouver que

$$(14) \quad \frac{|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A|}{|A|^{1-1/d}} \geq \beta.$$

Procédons en cinq étapes.

1) L'isopérimétrie classique dans  $\mathbb{Z}^d$  fournit

$$(15) \quad \frac{|\partial_{\mathcal{L}^d} A|}{|A|^{1-1/d}} \geq C_d.$$

2) On voudrait remplacer  $\partial_{\mathcal{L}^d} A$  par  $\partial_{\overline{\mathcal{L}}_n^g} A$ . Mais si on applique un argument de contour à  $A$ , il peut exister des arêtes de  $\partial_{\mathcal{L}^d} A$  qui appartiennent à  $\omega - \overline{\mathcal{L}}_n^g$ . Nous allons donc appliquer un argument de contour à l'ensemble  $A$  auquel nous avons rajouté les « morceaux » de  $\omega - \overline{\mathcal{L}}_n^g$  connexes à  $A$ . Du fait que p.s., il n'existe qu'une seule composante connexe infini dans  $\omega$  (qui est  $\mathcal{C}_n = \mathcal{L}_n$  pour  $n$  assez grand), on peut trouver un  $k = k_{n,\omega}$  tel que tous les chemins de  $\omega - \overline{\mathcal{C}}_n^g$  commençant dans  $\mathcal{B}_n$ , se terminent avant d'atteindre une arête de  $\partial_{\mathcal{L}^d} \mathcal{B}_{n+k}$ .

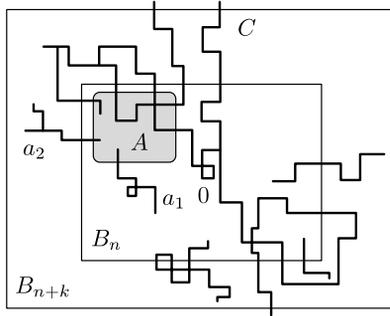


FIGURE c

Soient  $(a_i)_{i=1\dots m}$  les chemins de  $\omega - \overline{\mathcal{L}}_n^g$  qui débutent dans  $A$  (voir figure c). Tous ces chemins sont contenus dans  $\mathcal{B}_{n+k}$ . Ajoutons ces chemins à  $A$  et posons

$$A'' = A \cup a_1 \cup \dots \cup a_m.$$

3)  $A''$  vérifie les propriétés suivantes : il est connexe et on peut supposer que  $\mathbb{Z}^d - A''$  est connexe. En effet, si ce n'est pas le cas, on remplit les trous, en prenant  $B$  le complémentaire dans  $\mathbb{Z}^d$  de la composante connexe de  $\mathbb{Z}^d - A''$  (dans le graphe  $\mathcal{L}^d$ ) qui contient les points à l'infini, et une inégalité isopérimétrique pour l'ensemble  $B$  se transmet à  $A''$ , puisque  $|B| \geq |A''|$  et  $|\partial_{\mathcal{L}^d} B| \leq |\partial_{\mathcal{L}^d} A''|$ . Ainsi  $\partial_{\mathcal{L}^d} A''$  est (\*)-connexe. On a par ailleurs

$$(16) \quad |\partial_{\omega} A''| = |\partial_{\overline{\mathcal{L}}_n^g} A|,$$

( $\omega$  désigne dans l'égalité précédente le graphe issu du processus de percolation) et l'inégalité isopérimétrique classique dans  $\mathbb{Z}^d$  donne

$$|\partial_{\mathcal{L}^d} A''| \geq C_d |A''|^{1-1/d} \geq C_d (cn^\gamma)^{1-1/d}.$$

4) Appliquons un argument de contour à  $A''$ . Pour  $\beta' > 0$ , on pose

$$\mathcal{A}_n'' = \left\{ \omega ; \exists F \subset E^d, |F| \geq C_d(cn^\gamma)^{1-1/d}, \sum_{e \in F} 1_{\{\omega(e)=1\}}/|F| \leq \beta', \right. \\ \left. F \text{ (*)-connexe, } F \cap E(\mathcal{B}_n^g) \neq \emptyset \right\}.$$

Comme précédemment, à l'aide de (10) on a

$$Q(\mathcal{A}_n'') \leq \sum_{j \geq C_d(cn^\gamma)^{1-1/d}} e^{\lambda\beta'j} (pe^{-\lambda} + 1 - p)^j \times h(n, j),$$

où

$$h(n, j) = \sup_{k \geq 0} |\{H \subset E^d, H \text{ (*)-connexe } |H| = j \text{ et } H \cap E(\mathcal{B}_n^g) \neq \emptyset\}|.$$

Mais  $|\{H \subset E(\mathcal{B}_{n+k_n, \omega}^g), H \text{ (*)-connexe, } |H| = j, H \cap E(\mathcal{B}_n) \neq \emptyset\}|$  est inférieur à  $(2n + 1)^d e^{aj}$  pour tout  $k \geq 0$  (avec  $a$  indépendant de  $k$ ). Donc, on obtient finalement que si  $p$  est proche de 1, il existe une valeur  $\beta' > 0$  et un  $\delta > 0$  tels que pour  $n$  assez grand

$$Q(\mathcal{A}_n'') \leq e^{-\delta n^{\gamma(1-1/d)}}.$$

Puis par le lemme de Borel-Cantelli, on déduit que  $Q$  p.s. pour  $n$  assez grand,  $\partial_{\mathcal{L}^d} A'' \notin \mathcal{A}_n''$ , i.e.

$$|\partial_\omega A''| \geq \beta' |\partial_{\mathcal{L}^d} A''|.$$

5) On peut alors terminer la preuve : par (16), on a

$$|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A| \geq \beta' |\partial_{\mathcal{L}^d} A''|.$$

En appliquant alors l'inégalité isopérimétrique dans  $\mathbb{Z}^d$  à  $A''$ , et par le fait que  $A \subset A''$ , on déduit qu'il existe  $\beta > 0$  tel que  $Q$  p.s., pour  $n$  assez grand,

$$|\partial_{\mathcal{L}_n^g} A| \geq \beta |A|^{1-1/d}. \quad \square$$

**3.3. Renormalisation.** — Nous sommes maintenant en mesure de montrer la propriété 1.4 pour tout  $p > p_c$ . Reprenons les notations et résultats de [1]. Soit  $p > p_c$  et  $N \in \mathbb{N}$ . On recouvre  $\mathbb{Z}^d$  par une union disjointe de boîtes de taille  $N$  telles que  $\mathbb{Z}^d = \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^d} B_i$  où  $B_i$  est la boîte centrée en  $(2N + 1)i$ . Soit  $B'_i$  la boîte de même centre que  $B_i$  mais de taille  $\frac{5}{4}N$ .

Introduisons (voir [1]),

$$\mathcal{E}(N) = \{(ke_1, (k + 1)e_1) ; k = 0, \dots, [\sqrt{N}]\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_i = \tau_{i(2N+1)} \mathcal{E}(N),$$

où  $\tau_b$  représente le décalage dans  $\mathbb{Z}^d$  avec  $b \in \mathbb{Z}^d$ . On dit qu'un amas  $K$  contenu dans  $B'$  est *traversant* pour  $B \subset B'$  si dans les  $d$  directions, il existe un chemin ouvert contenu dans  $K \cap B$  reliant la face droite de  $B$  à la face gauche de  $B$ .

Considérons les deux évènements :

$$R_i^N := \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe un amas traversant } K \text{ dans } B'_i \text{ pour } B'_i, \text{ chemin} \\ \text{ouvert contenu dans } B'_i \text{ de longueur plus grande que} \\ \frac{1}{10}N \text{ est connecté à } K \text{ dans } B'_i \text{ et } K \text{ est traversant pour} \\ \text{toute sous-boîte } B \subset B'_i \text{ de taille supérieure à } \frac{1}{10}N \end{array} \right\},$$

$$S_i^N := \left\{ \text{il y a au moins une arête ouverte dans } \mathcal{E}_i \right\}.$$

Nous écrivons  $K(B'_i)$  quand cela est nécessaire pour indiquer que nous considérons l'amas traversant  $K$  de la boîte  $B'_i$ .

On définit alors  $\phi_N : \omega \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  telle que  $(\phi_N \omega)(x) = 1_{R_x^N \cap S_x^N}(\omega)$  et on dit qu'une boîte  $B_x$  est *bonne* si  $(\phi_N \omega)(x) = 1$  (i.e. si les deux évènements sont réalisés), sinon on dit que la boîte est *mauvaise*. Cela définit un processus (dépendant) de percolation sur les sites du réseau renormalisé, voir [1] pour plus de détails.

**Preuve de la proposition 1.4.** — On a prouvé la propriété 3.3 pour un paramètre de percolation sur les arêtes assez grand. Puisque l'ensemble des amas qui vérifie l'inégalité (7) est un évènement croissant, cette inégalité est donc aussi vérifiée pour un paramètre de percolation sur les sites assez grand (voir [1]).

Soit  $A \subset \mathcal{C}_n$  connexe, notons

$$\tilde{A} = \{i \in \mathbb{Z}^d ; A \cap B_i \neq \emptyset\}.$$

Alors  $\tilde{A}$  est connexe et remarquons que l'on a

$$|\tilde{A}| \geq \frac{|A|}{(2N + 1)^d}.$$

On utilise la notation  $\overset{\sim}{\sim}$  pour les quantités définies dans le processus renormalisé.

Pour un bon choix de  $N$ , par [1, proposition 2.1], on peut appliquer la proposition 3.3 pour  $\tilde{A}$  dans le processus renormalisé, donc (7) est vérifiée pour  $\tilde{A}$  : il existe  $\beta > 0$  tel que pour tout  $c > 0$ ,  $Q$  p.s. pour  $n$  assez grand, on ait,

$$(17) \quad (n(\tilde{A}) + |\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}|) / f_c(|\tilde{A}|) \geq \beta.$$

On distingue alors deux cas.

1) Si  $\tilde{n}(\tilde{A}) = 1$ , alors  $\tilde{A}$  est contenu dans une des composantes connexes de  $\tilde{\mathcal{B}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_n$ . Ainsi,  $\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A} = \emptyset$  et donc (17) donne  $1 \geq \beta f_c(|\tilde{A}|)$ . Du fait que  $\partial_{\mathcal{C}^g} A \neq \emptyset$ , on déduit

$$|\partial_{\mathcal{C}^g} A| \geq \beta f_c(|\tilde{A}|) \geq \beta f_c\left(\frac{|A|}{(2N + 1)^d}\right) \geq \frac{\beta}{(2N + 1)^{d-1}} f_{c(2N+1)^d}(|A|).$$

qui est l'inégalité de la proposition 1.4 (pour tout  $c > 0$  et avec une constante  $\beta$  plus petite).

2) Si  $\tilde{n}(\tilde{A}) = 0$ , alors par (17), on a

$$|\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}|/f(|\tilde{A}|) \geq \beta.$$

Soit  $(i, i') \in \partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}$ ; alors  $B_i$  et  $B_{i'}$  sont des bonnes boîtes et  $A$  intersecte  $B_i$  mais pas  $B_{i'}$ . Nous allons montrer que chaque couple ainsi choisi donne au moins une arête de  $\partial_{\mathcal{C}^g} A$ . En effet, du fait que les deux boîtes  $B_i$  et  $B_{i'}$  sont bonnes, on peut trouver  $x \in B_i \cap A$  et  $y \in B_{i'} \cap (C - A)$  reliés par un chemin ouvert dans  $B_i \cup B_{i'}$ , et sur ce chemin se trouve une arête de  $\partial_{\mathcal{C}^g} A$ .

Expliquons rapidement comment trouver  $x$  et  $y$ . On prend  $x$  dans  $A$ ; donc  $x \in B_i \cap C$ . Comme  $C$  est infini, il existe un chemin dans  $C$  reliant  $x$  à l'extérieur de  $B_{i'}$ . Ce chemin ayant une longueur supérieure à  $\frac{1}{4}N$ , il est connecté à l'amas  $K(B_{i'})$  dans  $B_{i'}$  (donc par connexité  $K(B_{i'}) \subset C$ ). Prenons maintenant un chemin ouvert contenu dans  $K(B_{i'}) \cap B_{i'}$  joignant la face gauche à la face droite de la boîte  $B_{i'}$  dans la direction de  $B_i$  et soit  $y$  sur ce chemin et dans  $B_{i'}$ . Toujours par connexité, on en déduit finalement l'existence d'un chemin dans  $C$  reliant  $x$  à  $y$ .

Il y a au plus  $2^d$  arêtes  $(i, i')$  qui peuvent donner la même arêtes dans  $\partial_{\mathcal{C}^g} A$  (toutes les arêtes  $(i, i')$  avec  $i'$  voisin de  $i$  dans  $\mathbb{Z}^d$ ). Donc finalement, on a pour tout  $c > 0$

$$|\partial_{\mathcal{C}^g} A| \geq \frac{1}{2^d} |\partial_{\tilde{\mathcal{L}}_n^g} \tilde{A}| \geq \frac{\beta}{2^d} f_c(|\tilde{A}|) \geq \frac{\beta}{2^d (2N + 1)^{d-1}} f_{c(2N+1)^d}(|A|).$$

Ce qui termine la preuve de la propriété 1.4, pour tout  $p \geq p_c$ .

#### 4. Preuve de la borne supérieure

Par les résultats de la section 3 et 2.3, on prouve une minoration de la fonction de Følner sur  $C_n^g \setminus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , puis par des outils analytiques (type inégalité de Nash) on obtient une borne supérieure de la probabilité de retour de  $Z$  puis de la transformée de Laplace du nombre de points visités.

**4.1. Isopérimétrie sur  $C_n^g \setminus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .** — La propriété 1.4, donne la minoration suivante pour la fonction de Følner de  $C_n^g$  relative à  $C^g$ .

PROPOSITION 4.1. — Soit  $\gamma > 0$ , il existe  $\beta > 0$  tel que pour tout  $c > 0$ ,  $Q$  p.s. sur l'ensemble  $|\mathcal{C}| = +\infty$ , pour  $n$  assez grand, on ait

$$(18) \quad \text{Fol}_{C_n^g}^{C^g}(k) \geq \begin{cases} k & \text{si } k < cn^\gamma, \\ (\beta k)^d & \text{si } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

*Démonstration.* — On procède en deux étapes.

1) D’abord il est facile de voir que l’on peut restreindre le minimum définissant la fonction de Følner à des ensembles connexes :

$$\begin{aligned} \text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g}(k) &= \min \{ |A| ; A \subset \mathcal{C}_n \text{ et } |\partial_{\mathcal{C}_g} A|/|A| \leq \frac{1}{k} \} \\ &= \min \{ |A| ; A \subset \mathcal{C}_n \text{ } A \text{ connexe et } |\partial_{\mathcal{C}_g} A|/|A| \leq \frac{1}{k} \}. \end{aligned}$$

En effet, si  $A$  n’est pas connexe, notons  $(A_i)_{i=1,\dots,t}$  ses composantes connexes. Au moins une d’entre elles satisfait la condition  $|\partial_{\mathcal{C}_g} A_i|/|A_i| < 1/k$  et on a  $|A_i| \leq |A|$ .

2) Maintenant, par la proposition 1.4, il existe  $\beta > 0$  tel que pour tout  $c > 0$ ,  $Q$  p.s. sur  $|\mathcal{C}| = +\infty$  pour  $n$  assez grand, on a

$$\frac{|\partial_{\mathcal{C}_g} A|}{f_c(|A|)} \geq \beta \text{ pour tout ensemble } A \subset \mathcal{C}_n \text{ connexe.}$$

Donc, pour tout  $A$  connexe de  $\mathcal{C}_n$ , on a,

$$(19) \quad \frac{|\partial_{\mathcal{C}_g} A|}{|A|} \leq \frac{1}{k} \implies \frac{|A|}{f_c(|A|)} \geq \beta k.$$

Posons alors  $\mathcal{G}(x) = x/(f_c(x))$  et définissons  $\mathcal{G}^{-1}$  par

$$\mathcal{G}^{-1}(y) = \inf \{ x ; G(x) = y \} = \begin{cases} y & \text{si } x < cn^\gamma, \\ y^d & \text{si } x \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

On déduit de (19)  $|A| \geq \mathcal{G}^{-1}(\beta k)$ , i.e.

$$(20) \quad \text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g}(k) \geq \mathcal{G}^{-1}(\beta k). \quad \square$$

Grâce à la proposition (2.4) et à l’inégalité (20), on déduit immédiatement qu’il existe  $C > 0$ , tels que pour tout  $c > 0$ ,  $Q$  p.s. pour  $n$  assez grand,

$$(21) \quad \text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(k) \geq \begin{cases} e^{Ck} & \text{si } k < cn^\gamma, \\ e^{Ck^d} & \text{si } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

On ne peut déduire directement une majoration des noyaux de la marche  $Z$ , à partir de cette minoration car les arêtes du graphe  $\mathcal{C}_g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  ne sont pas adaptées aux sauts de  $Z$ . On construit donc les graphes suivants.

Soit  $G$  un graphe ; on note  $G \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  le graphe tel que,

$$\begin{cases} V(G \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = V(G \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}), \\ E(G \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \{ ((x, f)(y, f_{x,i}^{y,j})) ; (x, y) \in E(G), \\ (i, j) \in \{0, 1\} \text{ et } \text{supp}(f) \subset G \}. \end{cases}$$

Soit  $\delta$  un point imaginaire, on pose  $\bar{\mathcal{C}}_n = \mathcal{C}_n \cup \{\delta\}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_n^g$  le graphe ayant  $\bar{\mathcal{C}}_n$  comme ensemble de points et l'ensemble des arêtes est défini par

$$E(\bar{\mathcal{C}}_n^g) = \{(x, y) ; \omega(x, y) = 1, x, y \in \mathcal{C}_n\} \cup \{(x, \delta) ; x \in \mathcal{C}_n, \exists z \in V(\omega), (x, z) \in \partial_\omega \mathcal{C}_n\}.$$

Notons alors

$$W_n = \bar{\mathcal{C}}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{et} \quad W'_n = \bar{\mathcal{C}}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On prouve :

PROPOSITION 4.2. — *Il existe une constante  $C > 0$  telle que que pour tout  $c > 0$ ,  $Q$  p.s. sur  $|\mathcal{C}| = +\infty$  et pour  $n$  assez grand,*

$$(22) \quad \text{Fol}_{\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}^{c^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(k) \geq F(k) := F_{C,c}(k) = \begin{cases} e^{Ck} & \text{si } k < cn^\gamma, \\ e^{Ck^d} & \text{si } k \geq cn^\gamma. \end{cases}$$

*Démonstration.* — On procède en quatre étapes.

1) Soient  $\epsilon$  et  $\epsilon'$  les formes de Dirichlet respectives de  $W_n$  et  $W'_n$  définies pour tout  $f, g : V(\bar{\mathcal{C}}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} \epsilon(f, g) &= \sum_{(x,y) \in E(W_n)} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)), \\ \epsilon'(f, g) &= \sum_{(x,y) \in E(W'_n)} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)). \end{aligned}$$

2) Les graphes  $W_n$  et  $W'_n$  sont quasi isométriques par l'application identité sur  $V(W_n) = V(W'_n)$ . En effet, soient  $d$  et  $d'$  les distances respectives sur ces graphes, pour tout  $u, v$  de  $V(W_n)$  on a :

$$\frac{1}{3}d'(u, v) \leq d(u, v) \leq 3d'(u, v).$$

Ainsi (voir [19, I.3]), il existe  $C_1, C_2 > 0$  (indépendants de  $n$ ) tels que, pour tout  $f : V(\bar{\mathcal{C}}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(23) \quad C_1\epsilon(f, f) \leq \epsilon'(f, f) \leq C_2\epsilon(f, f).$$

3) Soit  $U \subset V(\bar{\mathcal{C}}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ ; prenant  $f = 1_{\{U\}}$  dans (23), on obtient

$$(24) \quad C_1|\partial_{W_n} U| \leq |\partial'_{W'_n} U| \leq C_2|\partial_{W_n} U|.$$

4) Or on a  $|\partial_{W_n} U| = |\partial_{\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U|$  et  $|\partial'_{W'_n} U| = |\partial_{\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U|$ . Finalement, on déduit de (21) et (24), que l'on peut remplacer  $\partial_{\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$  par  $\partial_{\mathcal{C}_n \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$  dans (21) car cela n'affecte que les constantes  $c$  et  $C$ . □

**4.2. Borne supérieure de  $\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o)$ .** — On suppose pour cette section que  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Grâce à (22), nous obtenons une majoration de la probabilité de retour de la marche aléatoire  $Z$ .

PROPOSITION 4.3. — *Supposons  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Il existe une constante  $c > 0$  tel que  $Q$  p.s. sur  $|\mathcal{C}| = +\infty$  et pour  $n$  assez grand,*

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = o) \leq e^{-cn^{d/(d+2)}}.$$

*Démonstration.* — Posons  $\tau_n = \inf\{s \geq 0 ; Z_s \notin \mathcal{C}_n \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\}$ . Ainsi, on peut écrire

$$(25) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) &= \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \tau_n \leq 2n) \\ &\quad + \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o \text{ et } \tau_n > 2n). \end{aligned}$$

— Le premier terme du membre de droite est nul, puisque la marche ne peut revenir à l'origine au temps  $2n$  en sortant de la « boîte »  $V(\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$  avant le temps  $2n$ .

— Le deuxième terme est égal à  $\mathbb{P}_o(\bar{Z}_{2n}^n = o)$ , où  $(\bar{Z}_i^n)_i$  désigne la marche aléatoire sur  $W'_n$ , coïncidant avec  $Z$  mais tuée quand elle sort de  $W'_n$ . La marche  $(\bar{Z}_i^n)_i$  est réversible pour la mesure  $m$  restreinte à  $V(\mathcal{C}_n^g \wr \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}})$  ( $m$  est définie à la sous-section 2.2).

Par les méthodes développées dans [4]), pour obtenir une borne supérieure de  $\mathbb{P}_o(\bar{Z}_{2n}^n = o)$ , posons pour  $U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

$$|\partial_{\mathcal{C}^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U|_m = \sum_{u_1, u_2} m(u_1) \tilde{p}(u_1, u_2) 1_{\{(u_1, u_2) \in \partial_{\mathcal{C}^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U\}} \quad |U|_m = \sum_{u \in U} m(u).$$

Comme on suppose  $\alpha = \frac{1}{2}$ , la mesure  $m$  se réduit à  $m(a, f) = \nu(a)$  (qui est bornée car la valence du graphe  $\mathcal{C}^g$  est comprise entre 1 et  $2d$ ) et on déduit donc à l'aide de l'inégalité (22) que dans ce cas, il existe une constantes  $C > 0$  telle que pour tout  $c > 0$ ,  $Q$  p.s. sur  $|\mathcal{C}| = +\infty$ , pour  $n$  assez grand,

$$(26) \quad \min \left\{ |U|_m ; U \subset V(\mathcal{C}_n^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \text{ et } |\partial_{\mathcal{C}^g \wr \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U|_m / |U|_m \leq \frac{1}{k} \right\} \geq F_{C,c}(k).$$

Prenons  $c = 1$ .  $F := F_{C,1}$  est positive et croissante, et son inverse est :

$$(27) \quad \begin{aligned} F^{-1}(y) &= \inf \{x \geq 0 ; F(x) \geq y\} \\ &= \begin{cases} C^{-1} \log(y) & \text{si } y < e^{Cn^\gamma}, \\ cn^\gamma & \text{si } e^{Cn^\gamma} \leq y \leq e^{Cn^{d\gamma}}, \\ (C^{-1} \log(y))^{1/d} & \text{si } e^{Cn^{d\gamma}} < y. \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $F^{-1}$  est croissante, (26) implique une inégalité de Nash (voir par exemple [19, 14.1]) pour la forme de Dirichlet associée à  $\bar{Z}^n$ , puis une majoration du noyau :

$$\forall i \geq 0, \mathbb{P}_0(\bar{Z}_{2i}^n = 0) \leq 2a(i),$$

où  $a$  est la solution de l'équation différentielle

$$a' = -\frac{a}{8(F^{-1}(4/a))^2}, \quad a(0) = 1.$$

À l'aide de l'expression de  $F^{-1}$  par (27) et en résolvant l'équation différentielle dans chaque cas, on obtient qu'il existe des constantes  $c_i$  (avec  $c_3, c_9$  et  $c_{13} > 0$ ) telles que :

- pour  $0 \leq t \leq c_1 n^{3\gamma} + c_2$ ,  $a(t) = e^{-(c_3 t + c_4)^{1/3}}$  ;
- pour  $c_1 n^{3\gamma} + c_2 \leq t \leq c_5 n^{(d+2)\gamma} + c_6 n^{3\gamma} + c_7 n^{2\gamma} + c_8$ ,

$$a(t) = e^{-c_9 t/n^{2\gamma} + c_{10} n^\gamma + c_{11}/n^{2\gamma} + c_{12}};$$

- pour  $c_5 n^{(d+2)\gamma} + c_6 n^{3\gamma} + c_7 n^{2\gamma} + c_8 \leq t$ ,

$$a(t) = e^{-(c_{13} t + c_{14} n^{(d+2)\gamma} + c_{15} n^{3\gamma} + c_{16} n^{2\gamma} + c_{17})^{d/(d+2)}}.$$

On choisit  $\gamma < 1/(d+2)$ ; ainsi on déduit qu'il existe une constante  $c > 0$  telle que pour  $t = 2n$  assez grand,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(\bar{Z}_{2n}^n = o) \leq e^{-cn^{d/(d+2)}}.$$

Finalement par (25) et comme  $n \mapsto \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = o)$  est une fonction décroissante, on obtient l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que  $Q$  p.s. sur  $|\mathcal{C}| = +\infty$  pour  $n$  assez grand,

$$\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = o) \leq e^{-cn^{d/(d+2)}}. \quad \square$$

**4.3. Conclusion : borne supérieure pour la transformée de Laplace.**— Nous pouvons alors démontrer la borne supérieure de la propriété 1.1.

PROPOSITION 4.4. — *Pour tout  $\alpha > 0$ , il existe une constante  $c(d, \alpha, p) > 0$  telle que  $Q$  p.s. sur l'ensemble  $|\mathcal{C}| = +\infty$ ,*

$$\exists n_\omega, \forall n \geq n_\omega, \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq e^{-c(d, \alpha)n^{d/(d+2)}}.$$

*Démonstration.* — La résultat découle des trois faits suivants.

1) D'abord, il suffit de prouver le résultat pour une valeur  $0 < \alpha_0 < 1$  de  $\alpha$ . En effet, supposons que  $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha_0^{N_n}) \leq e^{-c(d, \alpha_0)n^{d/(d+2)}}$ , alors

- si  $\alpha \leq \alpha_0$ , il est clair que  $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \leq \mathbb{E}_0^\omega(\alpha_0^{N_n}) \leq e^{-c(d, \alpha_0)n^{d/(d+2)}}$ ,

— si  $\alpha_0 < \alpha < 1$ , nous pouvons trouver  $\lambda > 0$  tel que  $\alpha = \alpha_0^\lambda$ , avec  $0 < \lambda < 1$ . Puis, on écrit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) &= \mathbb{E}_0^\omega([\alpha_0^{N_n}]^\lambda) \leq [\mathbb{E}_0^\omega(\alpha_0^{N_n})]^\lambda \quad (\text{inégalité de Jensen}) \\ &\leq e^{-\lambda c(d, \alpha_0) n^{d/(d+2)}}. \end{aligned}$$

Ce qui donne le résultat pour  $\alpha$  en prenant

$$c(d, \alpha) = \lambda c(d, \alpha_0) = \left( \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha_0)} \right) c(d, \alpha_0).$$

2) La deuxième étape est résumée dans le lemme suivant (voir [15]).

LEMME 4.5. — *Il existe une valeur  $\alpha_1 > 0$  et une constante  $c'_0 > 0$  telles que,*

$$\mathbb{E}_0^\omega\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}\right) \geq c'_0 \mathbb{E}_0^\omega(\alpha_1^{N_n}).$$

*Démonstration.* — Pour « retirer » la condition  $\{X_{2n} = 0\}$ , l'idée est de couper les chemins à l'instant  $n$  et d'utiliser la réversibilité entre l'instant  $n$  et  $2n$ . On utilise en particulier le fait suivant :

$$(28) \quad [\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m)]^2 \leq 2d(2m + 1)^d \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq 2m; X_{2n} = 0).$$

Écrivons en effet

$$\begin{aligned} [\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m)]^2 &= \left( \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \right)^2 \\ &= \left( \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \sqrt{\nu(h)} \times \frac{1}{\sqrt{\nu(h)}} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \right)^2 \\ &\leq \nu(B_m(\mathcal{C})) \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \frac{1}{\nu(h)} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h)^2 \\ &\quad \text{(par l'inégalité de Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq 2d(2m + 1)^d \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \\ &\quad \quad \quad \times \mathbb{P}_h^\omega(N_n = m; X_n = 0) \frac{1}{\nu(0)} \\ &\quad \quad \quad \text{(par réversibilité)} \\ &\leq 2d(2m + 1)^d \sum_{h \in B_m(\mathcal{C})} \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m; X_n = h) \\ &\quad \quad \quad \times \mathbb{P}_0^\omega(N_n^{2n} = m; X_n = h; X_{2n} = 0) \\ &\quad \quad \quad \text{(où } N_n^{2n} = \#\{X_n, \dots, X_{2n}\}) \\ &\leq 2d(2m + 1)^d \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq 2m; X_{2n} = 0). \end{aligned}$$

Calculons maintenant,  $\mathbb{E}_0^\omega((\frac{1}{2})^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}})$ . On a successivement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega((\frac{1}{2})^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &= \sum_{m \geq 1} (\frac{1}{2})^m \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} = m; X_{2n} = 0) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} (\frac{1}{2})^m \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq m; X_{2n} = 0). \end{aligned}$$

Car  $\{N_{2n} = m\} = \{N_{2n} \leq m\} - \{N_{2n} \leq m - 1\}$ . Puis,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega((\frac{1}{2})^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &\geq \frac{1}{2} \sum_{m \geq 1} (\frac{1}{4})^m \mathbb{P}_0^\omega(N_{2n} \leq 2m; X_{2n} = 0) \\ &\hspace{15em} (\text{par le fait (28)}) \\ &\geq \sum_{m \geq 1} \frac{1}{4d(2m+1)^d} (\frac{1}{4})^m [\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m)]^2 \\ &\geq c_0 \sum_{m \geq 1} (\frac{1}{5})^m [\mathbb{P}_0^\omega(N_n = m)]^2 \\ &\geq c_0 \left( \sum_{m \geq 1} (\frac{1}{4})^m \right)^{-1} \left( \sum_{m \geq 1} (\frac{1}{2\sqrt{5}})^m \mathbb{P}_0^\omega(N_n = m) \right) \\ &\hspace{10em} (\text{par l'inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\ &\geq c'_0 \mathbb{E}_0^\omega \left[ \left( \frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^{N_n} \right], \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 4.5. □

3) On peut alors conclure. Pour  $\alpha = \frac{1}{2}$ , la propriété 4.3 donne

$$\mathbb{P}_o^\omega(Z_n = o) \leq e^{-cn^{d/(d+2)}}.$$

Par ailleurs, par la propriété 2.3 on a

$$\mathbb{E}_0^\omega \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}} \right) = \mathbb{P}_o^\omega(Z_n = o).$$

Donc le lemme 4.5 du point 2) nous donne une borne supérieure du bon ordre pour une valeur  $\alpha_1$  et le point 1) permet d'étendre cette borne à tout  $\alpha$  de  $]0, 1[$ . □

### 5. Borne inférieure de $\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n})$

On montre dans cette partie la

PROPOSITION 5.1. — *Il existe une constante  $c > 0$  telle que  $Q$  p.s. sur  $|\mathcal{C}| = +\infty$  et pour  $n$  assez grand, on ait*

$$\mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_n}) \geq e^{-cn^{d/(d+2)}}.$$

**5.1. Faits généraux pour les marches aléatoires.** — Ce qui suit peut s'appliquer à toute chaîne de Markov  $Z$  qui admet une mesure réversible  $m$ . Soit  $A$  un ensemble de points du graphe sur lequel  $Z$  évolue. On peut écrire

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) &= \sum_z \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = z) \tilde{\mathbb{P}}_z^\omega(Z_n = o) \\ &\geq \sum_{z \in A} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = z) \times \frac{m(0)}{m(z)} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = z) \\ &\geq \frac{m(0)}{m(A)} \left[ \sum_{z \in A} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n = z) \right]^2 \geq \frac{m(0)}{m(A)} [\tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n \in A)]^2. \end{aligned}$$

Dans notre cas, nous prenons

$$A = A_r = \{ (a, f) ; a \in B_r(\mathcal{C}) \text{ et } \text{supp}(f) \subset B_r(\mathcal{C}) \}.$$

Rappelons que  $m(a, f) = \nu(a) \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^{\#\{i; f(i)=\bar{1}\}}$ . Donc, on a

$$m(A_r) \leq 2dr^d \sum_{k=0, \dots, r^d} C_{r^d}^k \left( \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^k = 2d \frac{r^d}{\alpha^{r^d}}.$$

Par ailleurs, la structure des arêtes sur un produit en couronne, implique

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_n \in A_r) &\geq \mathbb{P}_0^\omega(\forall i \in [0, n] X_i \in B_r(\mathcal{C})) \\ &\geq \mathbb{P}_0^\omega\left(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r\right). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$(29) \quad \begin{aligned} \mathbb{E}_0^\omega(\alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}}) &= \tilde{\mathbb{P}}_o^\omega(Z_{2n} = o) \\ &\geq \frac{\alpha^{r^d}}{2dr^d} [\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r)]^2. \end{aligned}$$

On est ramené à trouver une borne inférieure de  $\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r)$ , ce qui est le but de la section suivante.

**5.2. Borne inférieure de  $\mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r)$ .** — Ce type d'estimée inférieure est connue dans le cas de  $\mathbb{Z}^d$ , mais la preuve utilise un principe de réflexion (voir [14]) qu'on ne peut utiliser dans  $\mathcal{C}$ . Notre démarche (inspirée de [15]) pour contourner cette difficulté, utilise des outils analytiques. On prouve :

PROPOSITION 5.2. — *Il existe une constante  $c$  telle que  $Q$  p.s., pour  $r$  assez grand et pour  $n \geq r$ , on ait*

$$\mathbb{P}_0^\omega\left(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r\right) \geq e^{-c(r+n/r^2)}.$$

(Pour  $n < r$  cette probabilité est égale à 1.)

*Démonstration.* — Divisons la preuve en cinq temps.

1) Notons  $\sigma_r = \min\{j \geq 0 ; X_j \notin B_r(\mathcal{C})\}$  et considérons les opérateurs  $P^{B_r(\mathcal{C})}$  définis sur les fonctions  $f : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$P^{B_r(\mathcal{C})}(f)(x) = 1_{B_r(\mathcal{C})}(x) \mathbb{E}_x^\omega(f(X_1); \sigma_r > 1).$$

L'opérateur  $P^{B_r(\mathcal{C})}$  est sous-markovien mais néanmoins symétrique par rapport à la restriction de  $\nu$  à  $B_r(\mathcal{C})$ . On note  $p^{B_r(\mathcal{C})}(\cdot, \cdot)$  les noyaux de  $P^{B_r(\mathcal{C})}$  et  $p_n^{B_r(\mathcal{C})}(\cdot, \cdot)$  les noyaux de  $(P^{B_r(\mathcal{C})})^n$ . Pour tout  $x, y \in B_r(\mathcal{C})$ , on a

$$p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y) = 1_{\{(x,y) \in B_r(\mathcal{C})^2\}} \mathbb{P}_x^\omega(X_1 = y),$$

$$p_n^{B_r(\mathcal{C})}(x, y) = \mathbb{P}_x^\omega(X_n = y; \sigma_r > n).$$

2) Pour  $n \geq r$ , on a successivement :

$$(30) \quad \mathbb{P}_0^\omega(\sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r) = \mathbb{P}_0^\omega(\sigma_r > n)$$

$$= \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p_n^{B_r(\mathcal{C})}(0, y)$$

$$\geq \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p_r^{B_r(\mathcal{C})}(0, y) p_{n-r}^{B_r(\mathcal{C})}(y, y)$$

$$\geq e^{-rc} \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p_{n-r}^{B_r(\mathcal{C})}(y, y)$$

(avec  $c = \log(2d)$ , puisque par connexité,  
il existe un chemin entre 0 et  $y$ )

$$\geq e^{-rc} Tr(P_{n-r}^{B_r(\mathcal{C})}) \geq e^{-rc} (1 - \lambda_1)^{n-r},$$

où  $\lambda_1 = \lambda_1(B_r(\mathcal{C}))$  est la plus petite valeur propre strictement positive de l'opérateur  $(\text{Id} - P^{B_r(\mathcal{C})})1_{B_r(\mathcal{C})}$ ,

$$(31) \quad \lambda_1(B_r(\mathcal{C})) = \inf_{\substack{\text{supp}(f) \subset B_r(\mathcal{C}) \\ f \neq 0}} \frac{\xi(f, f)}{\|f\|_{l^2(\nu)}^2},$$

avec  $\xi(f, f) = ((\text{Id} - P^{B_r(\mathcal{C})})1_{B_r(\mathcal{C})}f|f)_\nu$ . Notons que si  $\text{supp}(f) \subset B_{r-1}(\mathcal{C})$ , on peut simplifier l'expression de  $\xi$  :

$$\begin{aligned} \xi(f, f) &= \sum_{x \in B_r(\mathcal{C})} \nu(x)f(x) \left[ f(x) - \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y)f(y) \right] \\ &= \sum_{x \in B_r(\mathcal{C})} \nu(x)f(x) \left[ \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y)(f(x) - f(y)) \right] \\ &\quad (\text{car si } x \in B_{r-1}(\mathcal{C}), \sum_{y \in B_r(\mathcal{C})} p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y) = 1) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{x, y \in B_r(\mathcal{C})} \nu(x)p^{B_r(\mathcal{C})}(x, y)(f(x) - f(y))^2. \end{aligned}$$

3) Prenons maintenant  $h(x) = (r - |x|)1_{B_r(\mathcal{C})}$ . On a  $\text{supp}(h) \subset B_{r-1}(\mathcal{C})$ , donc on peut utiliser la formule précédente pour  $\xi(h, h)$ , et on a :

a)  $\xi(h, h) \leq |B_r(\mathcal{C})|$ ,

b)  $h \geq \frac{1}{2}r$  sur  $B_{r/2}(\mathcal{C})$ , donc  $\|h\|_{\ell^2(\nu)}^2 \geq (\frac{1}{2}r)^2 \nu(B_{r/2}(\mathcal{C})) \geq \frac{1}{2d}(\frac{1}{2}r)^2 |B_{r/2}(\mathcal{C})|$ .

Ainsi par (31), on déduit

$$(32) \quad \lambda_1 \leq 8d \frac{|B_r(\mathcal{C})|}{r^2 |B_{r/2}(\mathcal{C})|}.$$

4) L'étape suivante consiste à minorer  $|B_{r/2}(\mathcal{C})|$ . On a le lemme suivant :

LEMME 5.3. — *Pour  $p > p_c$ , il existe  $c > 0$  tel que  $Q$  p.s. sur  $|\mathcal{C}| = +\infty$ , pour  $r$  assez grand, on ait*

$$|B_r(\mathcal{C})''| \geq cr^d.$$

*Démonstration.* — Remarquons que

$$\text{si } m \geq \max_{x \in \mathcal{C}_r} D(0, x), \text{ alors } \mathcal{C}_r \subset B_m(\mathcal{C}).$$

Maintenant, par [1, corollaire 1.3], il existe une constante  $\rho' = \rho'(p, d) \geq 1$  telle que  $Q$  p.s.

$$\limsup_{N_1(y) \rightarrow +\infty} \frac{D(0, y)}{N_1(y)} \leq \rho'.$$

Donc,

$$(33) \quad \exists \rho' \geq 1, Q \text{ p.s.}, \exists A_\omega \geq 0, \forall y \in \mathcal{C}, \\ N_1(y) \geq A_\omega \implies D(0, y) \leq 2\rho N_1(y).$$

Soit  $r \geq r_\omega = \max_{N_1(z) < A_\omega, z \in \mathcal{C}} D(0, z)$  et prenons  $m = 2\rho'r$ . Soit maintenant  $x \in \mathcal{C}_r$ . On distingue deux cas :

— soit  $N_1(x) \geq A_\omega$ , alors par (33),  $D(0, x) \leq 2\rho'N_1(x) \leq 2\rho'r = m$  ;

— soit  $N_1(x) < A_\omega$ , mais alors par notre choix de  $r$ ,  $D(0, x) \leq r \leq 2\rho'r = m$ .

Dans tous les cas, on obtient que  $D(0, x) \leq m = 2\rho n$  pour tout  $r \geq r_\omega$  et pour tout  $x$  dans  $\mathcal{C}_r$ . On déduit donc

$$\exists \rho' \text{ tel que } Q \text{ p.s. pour } r \text{ assez grand, } \mathcal{C}_r \subset B_{2\rho'r}(\mathcal{C}).$$

Puis par la propriété 3.2 (voir [13, Appendice B]), on sait qu'il existe une constante  $\rho > 0$  telle que  $Q$  p.s., pour  $r$  assez grand,  $|\mathcal{C}_r| \geq \rho r^d$ . Finalement, on a bien l'existence d'une constante  $c > 0$  telle  $Q$  p.s. pour  $r$  assez grand,  $|B_r(\mathcal{C})| \geq cr^d$ .  $\square$

5) On déduit alors immédiatement de l'étape 4) et de (32) qu'il existe  $C > 0$  tel que  $Q$  p.s. sur  $|\mathcal{C}| = +\infty$ , pour  $r$  assez grand,

$$\lambda_1(B_r(\mathcal{C})) \leq \frac{C}{r^2}.$$

Donc pour  $r$  assez grand, on peut écrire :  $1 - \lambda_1 \geq e^{-2\lambda_1}$ . Et finalement, avec (30), on déduit :

$$\mathbb{P}_0^\omega \left( \sup_{0 \leq i \leq n} D(0, X_i) \leq r \right) \geq e^{-c(r+(n-r)/r^2)} \geq e^{-c(r+n/r^2)}. \quad \square$$

**5.3. Preuve de la proposition 5.1.** — Par l'inégalité (30) et par la propriété 5.2, on déduit, qu'il existe  $c > 0$  tel que  $Q$  p.s., pour  $r$  assez grand et  $n \geq r$ , on ait

$$\mathbb{E}_0^\omega \left( \alpha^{N_{2n}} 1_{\{X_{2n}=0\}} \right) \geq \frac{\alpha^{r^d}}{2dr^d} e^{-2c(r+n/r^2)} \geq e^{-c'(r^d+n/r^2)}.$$

Choisissons  $r$  proportionnel à  $n^{1/(d+2)}$  (qui est bien plus petit que  $n$  pour  $n$  assez grand) ; ainsi on obtient finalement l'existence d'une constante  $c > 0$  telle que  $Q$  p.s. sur  $|\mathcal{C}| = +\infty$ , pour  $n$  assez grand,

$$\mathbb{E}_0^\omega \left( \alpha^{N_{2n}} \right) \geq e^{-cn^{d/(d+2)}}.$$

Pour les temps impairs, on remarque simplement que  $\mathbb{E}_0^\omega \left( \alpha^{N_{2n}} \right) \leq \mathbb{E}_0 \left( \alpha^{N_{2n-1}} \right)$ . Ce qui achève la preuve de 5.1.  $\square$

## 6. Questions et extensions

**6.1. Questions ouvertes.** — La première question naturelle, est de savoir si  $1/(n^{d/d+2}) \log \mathbb{E}_0^\omega \left( \alpha^{N_n} \right)$  converge lorsque  $n$  tend vers l'infini ? Nous savons seulement que cette expression est bornée.

Une autre question intéressante est d'estimer  $Q(\mathbb{E}_0^\omega \left( \alpha^{N_n} \right))$ . Pour la borne supérieure, à  $n$  fixé on doit estimer la  $Q$  probabilité que l'inégalité isopérimétrique de la propriété 1.4 ne soit pas réalisée. Dans [2], des calculs assez précis donnent un contrôle de ce type d'évènement en  $e^{-cn^\beta}$  avec

$$\beta = \frac{d-1}{d+1} < \frac{d}{d+2}.$$

Or  $e^{-cn^{d/(d+2)}} \ll e^{-cn^\beta}$ , et ce terme d'erreur est déjà trop « gros » pour la borne espérée.

**6.2. Extensions.** — La même démarche donne des bornes supérieures pour des fonctionnelles plus générales, comme par exemple,

$$e^{-\sum_{z; L_{z,n} \neq 0} F(L_{z,n}, z)}$$

où  $F$  une fonction positive et  $L_{z,n}$  est le nombre de visite de  $z$  par la marche  $X$  sur l'amas avant le temps  $n$ . On peut par exemple traiter les cas  $F(x, y) = x^\alpha$  avec  $0 \leq \alpha < 1$  et  $F(x, y) = \alpha \ln(x)$  avec  $\frac{1}{2} \leq \alpha$  (voir [16] et [7]).

**Remerciements.** — Je remercie mon directeur de thèse Pierre Mathieu ainsi que Christophe Pittet, Enrique Andjel et Anna Erschler pour leurs remarques très utiles.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] P. ANTAL & A. PISZTORA — « On the chemical distance for supercritical Bernoulli percolation », *Ann. Probab.* **24** (1996), p. 1036–1048.
- [2] M. T. BARLOW — « Random walks on supercritical percolation clusters », *Ann. Probab.* **32** (2004), p. 3024–3084.
- [3] N. BERGER & M. BISKUP — « Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters », preprint, 2005.
- [4] T. COULHON — « Ultracontractivity and Nash type inequalities », *J. Funct. Anal.* **141** (1996), p. 510–539.
- [5] P.-G. DE GENNES — « La percolation : un concept unificateur », *La Recherche* **72** (1976), p. 919.
- [6] M. D. DONSKER & S. R. S. VARADHAN — « On the number of distinct sites visited by a random walk », *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979), p. 721–747.
- [7] A. ERSCHLER — « Isoperimetry for wreath products of Markov chains and multiplicity of selfintersections of random walk », *Probab. Theory and Related Fields* (2003).
- [8] A. ERSCHLER — « On isoperimetric profiles of finitely generated groups », *Geom. Dedicata* **100** (2003), p. 157–171.
- [9] G. R. GRIMMETT — « Percolation », in *Development of mathematics 1950–2000*, Springer, 1989.
- [10] H. KESTEN — *Percolation theory for mathematicians*, Progress in Probability and Statistics, vol. 2, Birkhäuser, 1982.

- [11] T. M. LIGGETT, R. H. SCHONMANN & A. M. STACEY – « Domination by product measures », *Ann. Probab.* **25** (1997), p. 71–95.
- [12] P. MATHIEU & A. PIANITSKI – « Quenched invariance principles for random walk on percolation clusters », preprint, 2005.
- [13] P. MATHIEU & E. RÉMY – « Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters », *Ann. Probab.* **32** (2004), p. 100–128.
- [14] C. PITTET & L. SALOFF-COSTE – « A survey on the relationships between volume growth, isoperimetry, and the behaviour of simple random walk on Cayley graphs, with examples », preprint, 2001.
- [15] ———, « On random walks on wreath products », *Ann. Probab.* **30** (2002), p. 948–977.
- [16] C. RAU – « Marches aléatoires sur un amas de percolation », Thèse, Université de Provence Aix-Marseille 1, 2006.
- [17] V. SIDORAVICIUS & A. S. SZNITMAN – « Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances », *Probab. Theory Related Fields* **129** (2004), p. 219–244.
- [18] Y. G. SINAI – « Theory of phase transition : Rigorous results », Int. Ser. Natural Philos., vol. 108, Pergamon Press, 1982.
- [19] W. WOESS – *Random walks on infinite graphs and groups*, Cambridge University Press, 2000.