

SOMMES DE CARRÉS DE FONCTIONS DÉRIVABLES

PAR JEAN-MICHEL BONY

RÉSUMÉ. — On montre que toute fonction positive de classe C^{2m} définie sur un intervalle de \mathbb{R} est somme de deux carrés de fonctions de classe C^m . En dimension 2, toute fonction positive f de classe C^4 est somme d'un nombre fini de carrés de fonctions de classe C^2 , pourvu que ses dérivées d'ordre 4 s'annulent aux points où f et $\nabla^2 f$ s'annulent.

ABSTRACT (*Sum of squares of derivable functions*). — We prove that any nonnegative function of class C^{2m} defined in an interval is the sum of two squares of functions of class C^m . In dimension 2, any nonnegative function f of class C^4 is a finite sum of squares of functions of class C^2 , provided that $\nabla^4 f$ vanishes at points x satisfying $f(x) = \nabla^2 f(x) = 0$.

1. Introduction

Le résultat principal de cet article est le théorème suivant.

THÉORÈME 1. — *Soit f une fonction positive et de classe C^{2m} définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$. Il existe alors g et h appartenant à $C^m(I)$ telles que $f = g^2 + h^2$.*

Texte reçu le 19 février 2004, accepté le 1er octobre 2004.

JEAN-MICHEL BONY, École polytechnique, Centre de Mathématiques, 91128 Palaiseau Cedex (France) • *E-mail* : bony@math.polytechnique.fr

Classification mathématique par sujets (2000). — 26A24, 26B05.

Mots clés. — Fonctions positives, fonctions différentiables, sommes de carrés.

La régularité de g et h ne peut pas en général être améliorée : si f est la primitive d'ordre $2m$, plate à l'origine, de $(-\log|x|)^{-1}$, elle ne peut pas être somme de carrés de fonctions de classe C^{m+1} , ni même $C^{m+\alpha}$, ce qui exigerait $f(x) = O(|x|^{2m+2\alpha})$.

Dans le cas où f est positive et de classe C^∞ , notre résultat permet pour chaque m d'écrire $f = g_m^2 + h_m^2$ avec g_m et $h_m \in C^m$, mais ces fonctions dépendent de m et il ne s'ensuit pas que f puisse s'écrire comme somme de carrés de fonctions C^∞ . Les ouvrages [1] et [4] font état de contre-exemples de P. Cohen et D. Epstein. À notre connaissance, ces contre-exemples n'ont pas été publiés.

En notant $C^{k,1}$ (resp. $C^{k+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$) l'espace des fonctions de classe C^k dont les dérivées d'ordre k sont lipschitziennes (resp. höldériennes d'exposant α), on peut démontrer la variante suivante du théorème 1 (voir le n° 5.1) : sous l'hypothèse $f \in C^{2m+2\alpha}$ [resp. $C^{2m,1}$, $C^{2m+1,1}$], il existe g et h appartenant à $C^{m+\alpha}$ [resp. $C^{m+1/2}$, $C^{m,1}$] avec $f = g^2 + h^2$.

Il est bien connu [6] qu'une fonction f positive n'est pas en général le carré d'une fonction de classe C^2 , même si f est de classe C^∞ , ne s'annule qu'en un point, et est infiniment plate en ce point.

Le cas $m = 2$ du théorème 1 est très directement relié à l'inégalité de Fefferman-Phong et amène à examiner le même problème en dimension quelconque. Cette inégalité assure qu'un opérateur pseudo-différentiel A est semi-borné inférieurement (i.e. $\operatorname{Re} \int u(x) Au(x) dx \geq -C^{\text{te}} \|u\|_{L^2}^2$) lorsque son symbole $a(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est positif et vérifie l'une des deux estimations suivantes

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{2-|\alpha|} \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n,$$

ou

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C_{\alpha,\beta} \quad \text{pour } \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, |\alpha| + |\beta| \geq 4.$$

Ces résultats, démontrés respectivement dans [5] et [2], s'étendent (voir [8, Section 18.6], [2]) aux autres classes de symboles pseudo-différentiels.

L'idée essentielle de C. Fefferman et D.H. Phong est d'écrire localement le symbole sous la forme $a = b^2 + a_1$, en faisant apparaître la somme d'un carré et d'une fonction positive dépendant d'une variable de moins, les dérivées d'ordre 2 de b et celles d'ordre 4 de a_1 s'estimant à l'aide des dérivées d'ordre 4 de a . Cette même idée a conduit au résultat suivant (voir [7], [10]) : si f est une fonction positive de classe $C^{3,1}$ dans un ouvert de \mathbb{R}^n , on peut l'écrire comme somme d'un nombre fini (bornable en fonction de n) de carrés de fonctions de classe $C^{1,1}$.

Il n'est pas vrai en toute dimension qu'une fonction positive de classe C^4 , ou même C^∞ , soit somme de carrés de fonctions de classe C^2 . Des contre-exemples (voir [3]) existent à partir de la dimension 4 et proviennent d'obstructions

algébriques à la décomposition en somme de carrés des polynômes positifs. En dimension 2, nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — *Soit f une fonction positive et de classe C^4 définie dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^2 et vérifiant*

$$(1) \quad \{f(x) = \nabla^2 f(x) = 0\} \implies \nabla^4 f(x) = 0.$$

Il existe alors un nombre fini ($N = 78$ convient) de fonctions $g_j \in C^2(\Omega)$ telles que $f = \sum_1^N g_j^2$.

La section 2 ramène la démonstration du théorème 1 au cas où, dans un intervalle, la fonction f et ses dérivées jusqu'à l'ordre $2m$ ne s'annulent pas simultanément. C'est dans la section 4 qu'apparaissent les idées essentielles de la démonstration. Il faut distinguer, au voisinage de chaque point x_0 , les cas où une des dérivées paires $f^{2p}(x_0)$ est strictement positive et domine les autres, et celui où $f(x_0)$ n'est « pas trop petit ». Dans ce dernier cas, f pourra s'écrire directement comme un carré. Dans les autres, on construira un polynôme P de degré $p-1$ tel que la fonction $f-P^2$ soit positive et possède p zéros doubles ξ_j au voisinage de x_0 . On pourra alors écrire $f-P^2 = \prod (x-\xi_j)^2 \theta(x)$ et c'est cette fois-ci la décomposition $f = P^2 + h^2$, avec $h = \prod (x-\xi_j) \sqrt{\theta}$ qui conviendra localement.

On pourra remarquer que, pour p grand, les fonctions P et h changent de signe plusieurs fois au voisinage de x_0 . Dans le cas $p = 1$, le polynôme se réduit à une constante dont le carré est la valeur de f en son minimum local, et notre décomposition est exactement celle de Fefferman et Phong.

À elle seule, la décomposition locale ci-dessus permettrait d'obtenir facilement une expression de f en somme de quatre carrés. Pour descendre à deux carrés, il nous faut dans la section 5 montrer l'existence d'une suite d'intervalles nettement séparés dans lesquels on doit écrire f comme somme de deux carrés, et telle qu'entre deux intervalles consécutifs, f soit un carré.

La section 6 reprend la première étape de la récurrence classique de [5] (mais avec une perte d'information qui ne permet pas de poursuivre en dimension supérieure) pour déduire le théorème 2 du théorème 1.

2. Premières réductions

Toutes les fonctions considérées seront à valeurs réelles. On notera $D = d/dx$ et, pour $a \in \mathbb{R}$, $[a]^+ = \max(a, 0)$ et $[a]^- = \max(-a, 0)$.

Tous les intervalles ouverts non vides de \mathbb{R} étant difféomorphes, on peut supposer que f est définie sur $]0, 1[$. Nous allons d'abord nous ramener au cas d'une fonction appartenant à $C^{2m}(\mathbb{R})$ et à support dans $[0, 1]$ à l'aide du lemme élémentaire suivant.

LEMME 2.1. — Soit p une fonction continue > 0 définie sur un ouvert borné U de \mathbb{R}^d . Il existe alors une fonction $\tilde{p} \in C^\infty(U)$, strictement positive et telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, la fonction $(D^\alpha \tilde{p})/p$ tende vers 0 à la frontière de U .

En notant $\delta(x)$ la distance de x au complémentaire de U , il suffit de poser, pour $x \in U$,

$$p_1(x) = \inf_{|x-y| \leq \frac{1}{2}\delta(x)} p(y), \quad \tilde{p}(x) = \int p_1(z) \chi\left(\frac{x-z}{\delta(z)}\right) e^{-1/\delta(z)} dz,$$

où χ est de classe C^∞ , positive et à support dans la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{3}$. Le domaine d'intégration étant contenu dans la boule de centre x et de rayon $\frac{1}{2}\delta(x)$, l'expression des dérivées de \tilde{p} ne fait apparaître que des valeurs de $p_1(z)$ en des points où $p_1(z) \leq p(x)$ et l'estimation résulte facilement du fait que $\delta(z)^{-k} e^{-1/\delta(z)}$ tend vers 0 à la frontière.

En revenant à la fonction $f \in C^{2m}]0, 1[$ et en définissant p par

$$\frac{1}{p(x)} = 1 + \sum_{0 \leq k \leq 2m} |D^k f(x)|,$$

on voit que la fonction $\tilde{f} = \tilde{p}^2 f$ se prolonge par 0 en une fonction de $C^{2m}(\mathbb{R})$. Une décomposition $\tilde{f} = \tilde{g}^2 + \tilde{h}^2$ permettra d'écrire $f = (\tilde{g}/\tilde{p})^2 + (\tilde{h}/\tilde{p})^2$.

Réduction au cas d'un intervalle où f n'est jamais plate. — On suppose donc f à support compact dans $[0, 1]$; on pose

$$F = \{x \mid f(x) = f'(x) = \dots = D^{2m} f(x) = 0\}, \quad U = \complement F = \bigcup_{\nu}]a_\nu, b_\nu[$$

en écrivant U comme réunion dénombrable d'intervalles disjoints dont les extrémités appartiennent à F .

Soit ω un module de continuité uniforme de $D^{2m} f$. Il est bien connu que l'on peut supposer la fonction ω croissante, concave et de classe C^∞ sur $]0, \infty[$, avec

$$|D^k \omega(t)| \leq C_k t^{-k} \omega(t).$$

On peut également régulariser la fonction $d(x)$ égale à la distance de x à F : il existe une fonction \bar{d} de classe C^∞ dans U vérifiant

$$(d(x)/\bar{d}(x))^{\pm 1} \leq 2 \quad \text{et} \quad |D^k \bar{d}(x)| \leq C'_k \bar{d}(x)^{1-k}.$$

En posant $\Omega(x) = \omega(\bar{d}(x))$ pour $x \in U$, on en déduit que l'on a, avec des constantes convenables,

$$(2) \quad |D^k (\Omega(x)^{-1})| \leq C''_k \Omega(x)^{-1} d(x)^{-k}, \quad |D^k (\Omega(x)^{\frac{1}{2}})| \leq C''_k \Omega(x)^{\frac{1}{2}} d(x)^{-k}.$$

Posons $\bar{f}(x) = f(x)\Omega(x)^{-1}$ pour $x \in U$. Cette fonction de classe C^{2m} vérifie

$$(3) \quad |D^k \bar{f}(x)| \leq M d(x)^{2m-k}, \quad x \in U, \quad 0 \leq k \leq 2m,$$

pour une certaine constante M . Si nous parvenons à écrire $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)^2 + \bar{h}(x)^2$ dans U , avec \bar{g} et $\bar{h} \in C^m(U)$ et

$$|D^k \bar{g}(x)| + |D^k \bar{h}(x)| \leq M' d(x)^{m-k},$$

le théorème 1 en résulte immédiatement : la fonction g égale à $\bar{g} \Omega^{\frac{1}{2}}$ dans U et à 0 dans F est de classe C^m et, en définissant h de façon analogue, on a $f = g^2 + h^2$.

La construction de \bar{g} et \bar{h} peut se faire indépendamment, à condition que les constantes soient uniformes, dans chacun des intervalles constituant U . En divisant \bar{f} par M , nous sommes donc ramenés au théorème suivant dont la démonstration est l'objet de la section 5.

THÉORÈME 2.2. — *Soit f une fonction positive de classe C^{2m} , définie dans un intervalle $]a, b[\subset [0, 1]$, vérifiant*

$$\sum_{j=0}^{2m} |D^j f(x)| > 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{0, \dots, 2m\}, \quad |D^k f(x)| \leq d(x)^{2m-k},$$

en posant $d(x) = \min(x-a, b-x)$. Il existe une constante $C(m)$ ne dépendant que de m , et deux fonctions g et $h \in C^m(]a, b[)$ vérifiant

$$|D^k g(x)| + |D^k h(x)| \leq C(m) d(x)^{m-k}, \quad 0 \leq k \leq m,$$

telles que $f = g^2 + h^2$.

REMARQUE 2.3. — En dépit du caractère uniforme des estimations du théorème ci-dessus, notre méthode ne permet pas d'affirmer que, pour f parcourant un ensemble borné de $C^{2m}(I)$, on puisse choisir les fonctions g et h du théorème 1 dans un ensemble borné de $C^m(I)$. Nous avons seulement le résultat suivant

COROLLAIRE 2.4. — *Soit (f_j) une famille bornée dans $C^{2m}(I)$ de fonctions positives, telle que la famille des fonctions $D^{2m} f_j$ soit équicontinue en tout point de I . Il existe alors un ensemble borné $\mathcal{B} \subset C^m(I)$ et, pour tout j , des fonctions g_j et $h_j \in \mathcal{B}$ telles que $f_j = g_j^2 + h_j^2$.*

On reprend les diverses étapes ci-dessus. On se ramène d'abord au cas $I =]0, 1[$, les hypothèses étant invariantes par difféomorphisme. Dire que la famille (f_j) est bornée équivaut à l'existence d'une fonction $H > 0$ définie sur $]0, 1[$ telle que

$$(4) \quad \forall j, \quad 1 + \sum_{0 \leq k \leq 2m} |D^k f_j(x)| \leq H(x).$$

On pose alors $p = 1/H$, on lui associe \tilde{p} comme ci-dessus et on pose $\tilde{f}_j = \tilde{p}^2 f_j$. Ces fonctions sont à support dans $]0, 1[$ et forment un ensemble borné de $C^{2m}(]0, 1[)$. En outre, les $D^{2m} \tilde{f}_j$ forment une famille équicontinue en

chaque point et donc uniformément équicontinue. On peut ainsi choisir un module de continuité uniforme commun ω .

Les fonctions Ω_j dépendent de l'ensemble des points où \tilde{f}_j est plate, mais les constantes C_k'' de (2) sont uniformes. Les fonctions $\bar{f}_j(x) = \tilde{f}_j(x)\Omega_j(x)^{-1}$ vérifient les estimations (3) avec une constante M uniforme, ce qui entraîne le résultat au vu du théorème 2.2.

3. Préliminaires

LEMME 3.1. — *Soit n un entier et Φ une fonction continue et strictement positive sur l'intervalle $[-1, 1]$. On peut alors trouver un polynôme P de degré n et $2n + 1$ points*

$$-1 \leq \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots < x_n < \xi_n \leq 1$$

vérifiant

$$(5) \quad |P(x)| \leq \Phi(x) \text{ pour } x \in [-1, 1],$$

$$(6) \quad P(x_j) = 0 \text{ pour } j = 1, \dots, n,$$

$$(7) \quad |P(\xi_j)| = \Phi(\xi_j) \text{ pour } j = 0, \dots, n.$$

Soit \mathcal{P} l'ensemble des polynômes de degré n , vérifiant (5) et possédant n racines réelles distinctes dans l'intervalle $] -1, 1[$. Pour $P \in \mathcal{P}$, on notera $X_1(P) < \dots < X_n(P)$ ces racines et on posera

$$I_0(P) =] -1, X_1(P)[, \quad I_k(P) =] X_k(P), X_{k+1}(P)[, \quad I_n(P) =] X_n(P), 1[,$$

$$\lambda_k(P) = \sup_{x \in I_k(P)} \frac{|P(x)|}{\Phi(x)}, \quad \mu(P) = \inf_{k=0, \dots, n} \lambda_k(P).$$

Soit (P_ν) une suite d'éléments de \mathcal{P} telle que la suite $\mu(P_\nu)$ converge vers $\sup_{P \in \mathcal{P}} \mu(P)$. Les éléments de \mathcal{P} sont uniformément bornés, ainsi que leurs dérivées, sur $[-1, 1]$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que P_ν converge vers un certain polynôme P de degré $\leq n$. Il est impossible que la longueur de $I_k(\nu)$ tende vers 0, ce qui impliquerait $\mu(P_\nu) \rightarrow 0$, et P a donc n racines réelles distinctes. Le polynôme P appartient ainsi à \mathcal{P} et réalise le maximum de μ sur cet ensemble. Il reste à montrer que $\mu(P) = 1$ ce qui entraîne l'existence de points $\xi_k \in I_k(P)$ vérifiant (7).

Supposons $\mu(P) < 1$ et soit \mathcal{K} l'ensemble des indices $k \in \{0, \dots, n\}$ tels que $\lambda_k(P) = 1$. Il est non vide car, dans le cas contraire, le polynôme θP avec $\theta > 1$ proche de 1 appartiendrait encore à \mathcal{P} et on aurait $\mu(\theta P) > \mu(P)$. Regroupons ceux des intervalles I_k , $k \in \mathcal{K}$ qui sont contigus pour former un ou plusieurs intervalles dont les distances mutuelles sont > 0 et qui peuvent être du type suivant :

$$- \text{zéro ou un intervalle }] -1, X_i(P)[,$$

- zéro, un ou plusieurs intervalles du type $]X_{j_r}(P), X_{\ell_r}(P)[$,
- zéro ou un intervalle $]X_m(P), 1[$.

Posons $P(x) = Q(x)R(x)$ avec

$$R(x) = (x - X_i(P))(X_m(P) - x) \prod_r (x - X_{j_r}(P))(x - X_{\ell_r}(P)),$$

en convenant que les facteurs correspondant aux intervalles inexistantes sont omis.

On a $R(x) < 0$ si $x \in I_k$ avec $k \in \mathcal{K}$ et on a $R(x) \geq 0$ sinon. Le polynôme $P_\varepsilon(x) = Q(x)(R(x) + \varepsilon)$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, contredit alors la maximalité de $\mu(P)$: les $\lambda_k(P_\varepsilon)$ sont aussi voisins de 1 que l'on veut pour $k \in \mathcal{K}$ et sont strictement supérieurs à $\lambda_k(P)$ pour $k \notin \mathcal{K}$.

REMARQUE 3.2. — Il y a annulation de $\Phi - |P|$ et de sa dérivée (si elle existe) aux points ξ_j , à l'exception peut-être de ξ_0 et ξ_n s'ils coïncident avec ± 1 . On peut donner une condition suffisante simple pour que cela ne se produise pas, à partir de la majoration classique

$$(8) \quad |P(x)| \leq \gamma_n \left| \frac{x}{h} \right|^n \sup_{|z| \leq h} |P(z)| \quad \text{pour } 0 < h < |x|,$$

valable pour tout polynôme de degré $\leq n$. S'il existe $h \in]0, 1[$ tel que $\Phi(\pm 1) > \gamma_n h^{-n} \sup_{|z| \leq h} \Phi(z)$, on a alors $|\xi_j| < 1$ pour $j = 0, \dots, n$.

Lorsque la fonction Φ est seulement ≥ 0 , on peut trouver pour $\varepsilon > 0$ un polynôme P_ε comme ci-dessus associé à la fonction $\Phi + \varepsilon$. Ces polynômes sont uniformément bornés et admettent donc comme valeur d'adhérence un polynôme P de degré $\leq n$ vérifiant $|P(x)| \leq \Phi(x)$. Les racines de P peuvent devenir multiples et ne peuvent être dites racines multiples de $\Phi - |P|$ que si Φ est dérivable. Nous donnons ci-dessous l'énoncé qui nous sera utile.

COROLLAIRE 3.3. — Soit F une fonction positive et de classe C^{2m} sur $[-r, r]$ vérifiant

$$F(x) \leq \alpha |x|^{2p} + \beta \quad \text{avec } 0 < \beta < r^{1/2p} \alpha,$$

pour un entier $p \in \{1, \dots, m\}$.

(a) Si P est un polynôme de degré $\leq p-1$ vérifiant $P(x)^2 \leq F(x)$ dans $[-r, r]$, on a

$$\sup_{|x| \leq r} |P(x)| \leq \tilde{C}_r \beta^{1/2p} \alpha^{(p-1)/2p},$$

où \tilde{C}_r ne dépend que de r et (d'une borne) de p .

(b) Soit $r_0 \leq r$ et supposons que l'on ait

$$\inf_{r_0 \leq |y| \leq r} F(y) > \tilde{C}_r^2 \beta^{1/p} \alpha^{(p-1)/p}.$$

Il existe alors un polynôme P de degré $\leq p-1$, vérifiant $P(x)^2 \leq F(x)$ pour $|x| \leq r$ et tel que l'équation $F(x) - P(x)^2 = 0$ ait p racines doubles, distinctes ou confondues, dans $]-r_0, r_0[$.

On applique l'estimation (8) en choisissant $h = (\beta/\alpha)^{1/2p}$. On a alors $|P(z)| \leq \sqrt{2\beta}$ pour $|z| \leq h$, et donc

$$\sup_{|x| \leq r} |P(x)| \leq \gamma_{p-1} (r/h)^{p-1} \sqrt{2\beta} = \sqrt{2} \gamma_{p-1} r^{p-1} \alpha^{(p-1)/2p} \beta^{1/2p}.$$

Si la fonction F a au moins p zéros doubles dans $]-r, r[$ (et donc dans $]-r_0, r_0[$), le polynôme 0 convient. Supposons donc que F ait exactement q zéros doubles a_1, \dots, a_q , distincts ou confondus, dans cet intervalle, avec $q < p$. La fonction Φ définie par $\Phi(x) = F(x)^{\frac{1}{2}} / |(x - a_1) \cdots (x - a_q)|$ est alors continue et strictement positive dans $[-r, r]$.

D'après le lemme 3.1, il existe un polynôme Q , de degré $p-q-1$ vérifiant $|Q(x)| \leq \Phi(x)$ et tel que l'on ait $|Q(\xi_j)| = \Phi(\xi_j)$ en $(p-q)$ points distincts ξ_1, \dots, ξ_{p-q} appartenant à $[-r, r]$. Le polynôme $P(x) = \prod (x - a_j) Q(x)$ vérifie $P(x)^2 \leq F(x)$, la minoration de $F(x)$ pour $|x| \geq r_0$ garantit que les ξ_j , et bien sûr les a_j , appartiennent à $]-r_0, r_0[$. La fonction $F - P^2$ y admet donc p racines doubles $a_1, \dots, a_q, \xi_1, \dots, \xi_{p-q}$, où certains des a_j peuvent être confondus.

LEMME 3.4. — Soit f de classe C^{n+p} , $p \geq 0$, sur un intervalle $[a, b]$ s'annulant en n points ξ_1, \dots, ξ_n distincts ou confondus. Alors

$$(9) \quad f(x) = \prod_1^n (x - \xi_j) \int_{[0,1]^n} t_1^{n-1} t_2^{n-2} \cdots t_{n-1} D^n f(\Theta_{x,t_1,\dots,t_n}) dt_1 \cdots dt_n,$$

en notant Θ_{x,t_1,\dots,t_n} le barycentre de x, ξ_1, \dots, ξ_n défini par

$$(1-t_1)\xi_1 + t_1(1-t_2)\xi_2 + \cdots + t_1 \cdots t_{n-1}(1-t_n)\xi_n + t_1 \cdots t_n x.$$

On écrit

$$f(x) = (x - \xi_1) f_1(x) \text{ avec } f_1(x) = \int_0^1 Df((1-t_1)\xi_1 + t_1 x) dt_1, \text{ puis}$$

$$f_1(x) = (x - \xi_2) f_2(x) \text{ avec } f_2(x) = \int_0^1 Df_1((1-t_2)\xi_2 + t_2 x) dt_2$$

et on poursuit par récurrence.

COROLLAIRE 3.5. — Sous ces hypothèses,

$$f(x) = \prod_1^n (x - \xi_j) g(x),$$

avec

- g est de classe C^p ;
- pour $0 \leq k \leq p$, $\inf_{x \in I} D^{n+k} f(x) \leq \frac{(n+k)!}{k!} D^k g(x) \leq \sup_{x \in I} D^{n+k} f(x)$.

• Soit J un sous-ensemble de $\{1, \dots, n\}$ dont on note $|J|$ le nombre d'éléments. Pour $k + |J| \leq n + p$, la fonction $\prod_{j \in J} (x - \xi_j) D^k g(x)$, bien définie en dehors des ξ_j , se prolonge en une fonction de classe $C^{n+p-k-|J|}$ et on a

$$\sup_{\substack{k+|J| \leq n+p \\ x \in [a,b]}} \left| \prod_{j \in J} (x - \xi_j) D^k g(x) \right| \leq C(n, p) \sup_{\substack{\ell \leq n+p \\ x \in [a,b]}} |D^\ell f(x)|.$$

On obtient une expression exacte des $D^k g(x)$ en dérivant sous le signe somme l'intégrale figurant dans (9). L'estimation en résulte directement.

La fonction $g_j(x) = \prod_{j \in J} (x - \xi_j) g(x)$ n'est rien d'autre que la fonction g ci-dessus lorsque $\{1, \dots, n\}$ est remplacé par le complémentaire de J . Elle est donc de classe $C^{n+p-|J|}$ et on peut estimer ses dérivées par celles de f . On écrit ensuite

$$\prod_{j \in J} (x - \xi_j) D^k g(x) = D^k g_j(x) - \sum_{\substack{\ell < k, J' \subset J \\ |J'| = |J| - k + \ell}} c_{k,\ell} \prod_{j \in J'} (x - \xi_j) D^\ell g(x)$$

pour obtenir, par récurrence sur k , une borne du membre de gauche.

COROLLAIRE 3.6. — Soit f une fonction de classe C^{2m} sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $p \in \{1, \dots, m\}$ et une constante $\gamma > 0$ telle que $D^{2p} f(x) \geq \gamma$ dans $[a, b]$. On suppose en outre que la fonction f possède p zéros doubles, distincts ou non, dans cet intervalle. Il existe alors une fonction h de classe C^{2m-p} dans $[a, b]$ telle que $f = h^2$ et que

$$|D^k h(x)| \leq C \text{ pour } k \leq 2m - p \text{ et } x \in [a, b],$$

la constante C ne dépendant que de γ et de $M = \sup |D^k f(x)|$ pour $k \leq 2m$.

D'après le corollaire précédent, on peut écrire $f = \prod_1^p (x - \xi_j)^2 \varphi(x)$, en notant ξ_j les zéros de f , et la fonction φ est de classe C^{2m-2p} , une borne uniforme de ses dérivées ne dépendant que de M . En outre, on a $\varphi(x) \geq \gamma / (2p)!$. On pose

$$h(x) = \prod_1^p (x - \xi_j) \sqrt{\varphi(x)}.$$

Les fonctions h et φ sont de classe C^{2m} en dehors des ξ_j et il faut montrer que, pour $k \leq 2m - p$ les fonctions $D^k h$ se prolongent continûment et sont uniformément bornées. Ces fonctions peuvent s'écrire comme combinaison linéaire explicite de termes du type suivant

$$T(x) = \prod_{j \in J} (x - \xi_j) \frac{D^{q_1} \varphi(x) \cdots D^{q_r} \varphi(x)}{\varphi(x)^{r - \frac{1}{2}}} \text{ avec } p - |J| + \sum q_s = k.$$

Le dénominateur est continu et se minore à l'aide d'une puissance de γ .

Nous allons extraire de J des sous-ensembles J'_s , $s = 1, \dots, r$, disjoints (éventuellement vides) de cardinal $[q_s - 2m + 2p]^+$. À chacun de ceux-ci est associé

le polynôme $\prod_{j \in J'} (x - \xi_j)$ dont le produit par $D^{q_s} \varphi$ admet un prolongement continu à l'intervalle. Les bornes de ces produits données dans le corollaire précédent entraînent immédiatement la majoration des $D^k h$ en termes de M .

Il reste à prouver que l'on peut effectivement extraire tous ces sous-ensembles, c'est-à-dire que l'on a

$$\sum_{\{s \mid q_s > 2m - 2p\}} (q_s - 2m + 2p) \leq |J|.$$

Si le membre de gauche n'est pas nul, il est majoré par

$$-2m + 2p + \sum q_s = -2m + 2p + k - p + |J|,$$

qui est bien majoré par $|J|$ pour $k \leq 2m - p$. La preuve est complète.

4. Décomposition locale

Dans cette section, m est un entier fixé et les constantes dépendront implicitement de m . On s'intéresse à des fonctions positives f vérifiant

$$(10) \quad f \in C^{2m}([-1, 1]), \quad |D^{2m} f(x)| \leq 1, \quad \sup_{0 \leq p \leq m-1} D^{2p} f(0) = 1.$$

LEMME 4.1. — *Soit f positive dans $[-1, 1]$ vérifiant (10).*

(a) *Il existe une constante $\bar{C} > 1$ telle que*

$$(11) \quad |D^k f(x)| \leq \bar{C} \text{ pour } |x| \leq 1 \text{ et } 0 \leq k \leq 2m,$$

$$(12) \quad \frac{1}{2} \leq \sup_{0 \leq p \leq m-1} D^{2p} f(x) \leq \frac{3}{2} \text{ pour } |x| \leq \frac{3}{\bar{C}}.$$

(b) *Soit $\alpha \in [0, 1]$ et supposons que $D^{2q} f(0) \leq \alpha$ pour $0 \leq q < p$. On a alors*

$$|D^k f(0)| \leq \bar{C} \alpha^{1/2p} \text{ pour } 0 \leq k < 2p.$$

En posant $s_k(x) = D^k f(0)x^k/k!$ et $s_k^\pm(x) = [D^k f(0)]^\pm x^k/k!$, la positivité de f et la formule de Taylor entraînent

$$\sum_0^{m-1} s_{2p}^-(x) - \sum_0^{m-1} s_{2p-1}(x) \leq \sum_0^{m-1} s_{2p}^+(x) + \frac{1}{2m!} x^{2m},$$

pour $|x| \leq 1$. L'inégalité étant aussi valide au point $-x$, on en déduit

$$\left| \sum_0^{m-1} s_{2p}^-(x) + \sum_0^{m-1} s_{2p-1}(x) \right| \leq \sum_0^{m-1} s_{2p}^+(x) + \frac{1}{2m!} x^{2m}.$$

Soit $h = 1/2m$. La majoration ci-dessus écrite aux points $kh, k = 1, \dots, 2m$, fournit le système de $2m$ équations

$$\sum_0^{m-1} k^{2p} s_{2p}^-(h) + \sum_0^{m-1} k^{2p-1} s_{2p-1}(h) = B_k,$$

avec $|B_k| \leq \sum_0^{m-1} k^{2p} s_{2p}^+(h) + 1/(2m!)k^{2m}h^{2m}$.

L'inversion de la matrice de Vandermonde d'ordre $2m$ permet d'exprimer les $s_{2p}^-(h)$ et les $s_{2p+1}(h)$ comme combinaison linéaire explicite des B_k qui sont eux-même uniformément bornés. On obtient donc la majoration des $|D^k f(0)|, k = 0, \dots, 2m-1$ par une constante universelle C_1 .

Il est maintenant facile de majorer $D^k f(x)$ qui est somme de son polynôme de Taylor de degré $2m - k - 1$ et d'un reste majoré en module par $1/(2m - k)!$ pour $|x| \leq 1$, et d'en déduire (11). On remarquera que cette partie de la démonstration reste valable en supposant seulement $\sup_{0 \leq p \leq m-1} D^{2p} f(0) \leq 1$.

Si maintenant cette borne supérieure est égale à 1, en choisissant \bar{C} assez grand, (12) résulte du fait que les fonctions $D^{2p} f$ sont lipschitziennes de rapport borné.

Sous les hypothèses (b), posons $\rho = \alpha^{1/2p} \leq 1$ et $g(x) = \rho^{-2p} f(\rho x)$. Cette fonction est définie sur $[-1, 1]$, vérifie $D^{2\ell} g(0) \leq 1$ pour $0 \leq \ell < m$ et $|D^{2m} g(x)| \leq 1$. D'après ce qui précède, on a $|D^k g(0)| \leq \bar{C}$ pour tout k et donc $|D^k f(0)| \leq \bar{C} \rho$ pour $k < 2p$.

LEMME 4.2 (décomposition locale). — *Il existe trois applications*

$$\Delta :]0, 1[\longrightarrow]0, 1[, \quad R :]0, 1[\longrightarrow \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}; n \geq 3\bar{C} \right\}, \quad C :]0, 1[\longrightarrow [1, \infty[,$$

où Δ et R sont croissantes et où C est décroissante, telles que, pour toute fonction positive f vérifiant (10) et

$$\begin{aligned} \exists p \in \{1, \dots, m-1\}, \quad D^{2p} f(0) = a > 0 \text{ et} \\ \forall q \in \{0, \dots, p-1\}, \quad D^{2q} f(0) \leq \Delta(a), \end{aligned}$$

il existe g et $h \in C^{2m-p}([-3R(a), 3R(a)])$ vérifiant

$$\left. \begin{aligned} f(x) = g^2(x) + h^2(x) \\ |D^k g(x)| + |D^k h(x)| \leq C(a) \end{aligned} \right\} \text{ pour } |x| \leq 3R(a); 0 \leq k \leq 2m-p,$$

$$\text{Supp}(g) \subset [-R(a), R(a)],$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{a}{2(2p)!} |x|^{2p} \leq f(x) \leq \frac{3a}{2(2p)!} |x|^{2p} \\ \text{sgn}(x) f'(x) > 0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } \frac{1}{3}R(a) \leq |x| \leq 3R(a).$$

On notera $T(x)$ le polynôme de Taylor de degré $2p-1$ de f à l'origine et on posera

$$\alpha = \sup_{q=0}^{p-1} D^{2q}(0), \quad \pi(x) = \sum_0^{2p-1} \frac{x^k}{k!}.$$

Les constantes \tilde{C}_r et \bar{C} sont celles du corollaire 3.3 et du lemme 4.1.

D'après le lemme précédent, on a

$$f(x) = T(x) + \frac{ax^{2p}}{(2p)!} + \varepsilon(x) \quad \text{avec } |\varepsilon(x)| \leq \bar{C} \frac{|x^{2p+1}|}{(2p+1)!},$$

$$|T(x)| \leq \bar{C} \alpha^{1/2p} \pi(|x|).$$

Choix de R . — On définit $R(a)$ comme le plus grand nombre $r = 1/n$ avec $n \geq 3\bar{C}$ qui vérifie $3\bar{C}r \leq \frac{1}{4}a$. On a ainsi

$$\left. \begin{array}{l} |\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{4} \frac{ax^{2p}}{(2p)!} \\ \left| f'(x) - T'(x) - a \frac{x^{2p-1}}{(2p-1)!} \right| \leq \frac{1}{4} a \frac{|x|^{2p-1}}{(2p-1)!} \\ \frac{3}{4}a \leq D^{2p}f(x) \leq \frac{5}{4}a \end{array} \right\} \text{ pour } |x| \leq 3R(a).$$

Il faut maintenant demander que α soit assez petit pour quatre raisons, ce qui va nous conduire à introduire des fonctions $\Delta_j(a)$, pour $j = 1, 2, 3, 4$ (elles dépendent aussi de p ce qui n'apparaît pas dans la notation). On en prendra ensuite le minimum (en j et p).

Majorations pour $|x| \geq \frac{1}{3}R(a)$. — On définit $\Delta_1(a)$ comme le plus grand α tel que l'on ait

$$\left. \begin{array}{l} \bar{C} \alpha^{1/2p} \pi(|x|) \leq \frac{a}{4} \frac{|x|^{2p}}{(2p)!} \\ \bar{C} \alpha^{1/2p} \pi'(|x|) \leq \frac{a}{4} \frac{|x|^{2p-1}}{(2p-1)!} \end{array} \right\} \text{ pour } \frac{1}{3}R(a) \leq |x| \leq 3R(a).$$

Les estimations (13) sont ainsi vérifiées pour $\alpha \leq \Delta_1(a)$.

Choix d'un polynôme. — Nous allons utiliser le corollaire 3.3 pour trouver un polynôme P de degré $p-1$ tel que la fonction $f - P^2$ soit positive pour $|x| \leq 3R(a)$ et ait p racines doubles dans l'intervalle $]-\frac{1}{3}R(a), \frac{1}{3}R(a)[$. Pour $|x| \leq 3R(a)$, on a

$$f(x) \leq \frac{5a}{4(2p)!} x^{2p} + \bar{C} \alpha^{1/2p} \pi(3R(a)),$$

et un tel polynôme P existe si

$$\inf_{\frac{1}{3}R(a) \leq |y| \leq 3R(a)} f(y), \quad \text{qui est supérieur à } A = \frac{a}{2(2p)!} \left(\frac{1}{3}R(a)\right)^{2p},$$

est strictement plus grand que

$$B = \tilde{C}_{R(a)/3}^2 (\bar{C} \alpha^{1/2p} \pi(3R(a)))^{1/p} \left(\frac{5a}{4(2p)!}\right)^{(p-1)/p}.$$

On définit $\Delta_2(a)$ comme le plus grand α tel que $A \geq 2B$.

Troncature et choix de g . — La quantité B ci-dessus est en fait une borne de $P(x)^2$ pour $|x| \leq 3R(a)$. Sur l'espace des polynômes de degré $\leq p-1$ la norme uniforme et la norme C^{p-1} sont équivalentes, la constante décroissant avec la longueur de l'intervalle. On obtient donc

$$\sup_{\substack{k < p \\ |x| \leq 3R(a)}} |D^k P(x)| \leq C_1(a) \alpha^{1/4p^2},$$

où la fonction C_1 est décroissante.

On fixe une fonction $\chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ positive, à support dans $[-1, 1]$ et égale à 1 pour $|x| \leq \frac{1}{3}$. On pose

$$g(x) = \chi\left(\frac{x}{R(a)}\right) P(x).$$

Il est facile d'écrire une borne supérieure de $|D^k \chi(x/R(a))|$ pour $0 \leq k \leq 2m$ ne dépendant que de $R(a)$ et décroissant avec $R(a)$. En développant la formule de Leibniz, on obtient donc

$$\sup_{\substack{0 \leq k \leq 2m \\ x \in \mathbb{R}}} |D^k g(x)| \leq C_2(a) \alpha^{1/4p^2}.$$

On définit Δ_3 par $C_2(a) \Delta_3(a)^{1/4p^2} = 1$.

Estimations de h . — On a $|D^{2p} g^2| \leq 2^{2p} C_2(a)^2 \alpha^{1/8p^2}$. On définit $\Delta_4(a)$ comme le plus grand α tel que le membre de droite soit égal à $\frac{1}{4}a$ et enfin $\Delta(a)$ comme le plus petit des $\Delta_j(a)$. Pour $\alpha \leq \Delta(a)$, on pose $f_1(x) = f(x) - g(x)^2$. Toutes les dérivées d'ordre $\leq 2m$ de g^2 se majorent par 2^{2m} et, en posant $C_3 = \bar{C} + 2^{2m}$, on a

$$\left. \begin{array}{l} \forall k \leq 2m, \quad |D^k f_1(x)| \leq C_3 \\ D^{2p} f_1(x) \geq \frac{1}{2}a \end{array} \right\} \quad \text{pour } x \in [-3R(a), R(a)].$$

D'autre part, la fonction f_1 a p zéros doubles dans cet intervalle. Il ne reste plus qu'à utiliser le corollaire 3.6 qui nous assure qu'il existe une fonction h et une constante $C_4(a)$ telle que $|D^k h(x)| \leq C_4(a)$ pour $k \leq 2m-p$ et que $f_1 = h^2$. Cela achève la démonstration.

COROLLAIRE 4.3. — Il existe un nombre fini de constantes strictement positives a_0 , A_0 et $r_N < r_{N-1} < \dots < r_1 < 1/3\bar{C}$ telles que, pour toute fonction f définie et positive dans $[-1, 1]$ et y vérifiant (10), on ait

— ou bien $f(0) \geq a_0$

— ou bien il existe $j \in \{1, \dots, N\}$ et une décomposition

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= g(x)^2 + h(x)^2 \\ \forall k \leq m+1, \quad |D^k g(x)| + |D^k h(x)| &\leq A_0 \end{aligned} \right\} \text{ pour } x \in [-3r_j, 3r_j],$$

la fonction g étant à support dans $[-r_j, r_j]$. De plus

$$f(x) \geq a_0 \text{ et } \operatorname{sgn}(x)f'(x) > 0 \text{ pour } r_j \leq \frac{1}{3}|x| \leq 3r_j.$$

Par hypothèse, il existe p_1 tel que $D^{2p_1} f(0) = 1$. Si on a $D^{2q} f(0) < \Delta(1)$ pour tout $q < p_1$, le lemme précédent fournit une décomposition en somme de carrés dans $[-3R(1), 3R(1)]$. Sinon, il existe $p_2 < p_1$ tel que $D^{2p_2} f(0) \geq \Delta(1)$. Si on a $D^{2q} f(0) < \Delta \circ \Delta(1)$ pour tout $q < p_2$, on a encore une décomposition en carrés dans l'intervalle de rayon $3R \circ \Delta(1)$, sinon... On poursuit par récurrence pour arriver à l'une des situations suivantes : ou bien il existe $p \in \{1, \dots, m-1\}$ et $k < m$ tel que $D^{2p} f(0) \geq \Delta^{(k)}(1)$ et $D^{2q} f(0) \leq \Delta^{(k+1)}(1)$ pour $0 \leq q < p$, ou bien $f(0) \geq \Delta^{(m)}(1)$. Dans le premier cas, le lemme précédent où a est borné inférieurement fournit une décomposition $f = g^2 + h^2$ dans des intervalles dont le rayon $3r$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs $3r_1, \dots, 3r_N$, et les estimations des dérivées de g et h sont uniformes. La minoration (13) montre que $f(x)$ est minoré par $a_1 = \Delta^{(m-1)}(1)/(2(2p)!)r_N^{2p}$ pour $\frac{1}{3}r \leq |x| \leq 3r$. Il ne reste plus qu'à choisir $a_0 > 0$ inférieur à a_1 et à $\Delta^{(m)}(1)$ et la preuve est complète.

5. Démonstration du théorème 2.2

La fonction positive f est donc de classe C^{2m} dans un intervalle $]a, b[\subset]0, 1[$, et elle vérifie

$$\sum_{0 \leq k \leq 2m} |D^k f(x)| > 0, \quad |D^k f(x)| \leq d(x)^{2m-k} \text{ pour } 0 \leq k \leq 2m,$$

en posant $d(x) = \min(x-a, b-x)$.

Il serait naturel d'introduire comme nous le ferons en dimension 2 la « métrique propre de f » au sens de [9], définie par $g = dx^2/\tilde{\rho}(x)^2$ avec $\tilde{\rho}(x) = \sup_0^{2m-1} |D^k f(x)|^{1/(2m-k)}$. Grâce au lemme 4.1, la fonction $\tilde{\rho}$ est équivalente à la fonction ρ ci-dessous. Les propriétés générales des métriques propres assurent que g vérifie la condition de lenteur de Hörmander (c'est la relation (14) ci-dessous) garantissant l'existence de bonnes partitions de l'unité, et que f est un symbole de poids $\tilde{\rho}^{2m}$. Toutefois, l'utilisation de partitions de l'unité ne

donnerait qu'une décomposition de f en somme de quatre carrés et il nous faudrait procéder à un découpage plus délicat.

Posons

$$\rho(x) = \sup_{p=0}^{m-1} ([D^{2p}f(x)]^+)^{\frac{1}{2(m-p)}}.$$

On a $\rho(x) \leq 1$ et même $\rho(x) \leq d(x)$. Cette fonction peut s'annuler, mais uniquement en des points x tels que $f(x) = \dots = D^{2m-1}f(x) = 0$ et donc $D^{2m}f(x) > 0$. L'ensemble de ces points est fermé et discret.

En chaque point z où $\rho(z) > 0$, on peut considérer la fonction

$$\varphi(t) = \rho(z)^{-2m} f(z + \rho(z)t).$$

Cette fonction est définie sur $[-1, 1]$ et vérifie les hypothèses du lemme 4.1 et du corollaire 4.3; il ne reste plus qu'à transformer leurs conclusions par le même changement d'échelle.

$$(13) \quad |D^k f(y)| \leq \bar{C} \rho(z)^{2m-k} \text{ pour } |y-z| \leq \rho(z) \text{ et } 0 \leq k \leq 2m,$$

$$(14) \quad (\rho(y)/\rho(z))^{\pm 1} \leq 2 \text{ pour } |y-z| \leq 3\rho(z)/\bar{C}.$$

À tout point z vérifiant $f(z) < a_0 \rho(z)^{2m}$ sont associés : un intervalle I_z ⁽¹⁾ centré en z et dont le rayon est l'un des $r_j \rho(z)$, une fonction g_z à support dans I_z et une fonction h_z définie dans $3I_z$ telles que $f = g^2 + h^2$ dans $3I_z$ avec

$$(15) \quad \forall k \leq m+1, |D^k g_z(x)| + |D^k h_z(x)| \leq A_0 \rho(z)^{m-k} \text{ dans } 3I_z.$$

En outre

$$(16) \quad f(x) \geq a_0 \rho(z)^{2m} \text{ et } \operatorname{sgn}(f'(x))(x-z) > 0 \text{ dans } 3I_z \setminus \frac{1}{3}I_z.$$

On déduit de ce dernier point que, si $\frac{1}{3}I_z$ et $\frac{1}{3}I_w$ sont disjoints, alors $3I_z$ et $3I_w$ sont disjoints : dans le cas contraire, il existerait un point de l'intersection où f' devrait être à la fois > 0 et < 0 .

Construction d'une suite d'intervalles disjoints. — On considère une famille \mathcal{I}_1 de tels intervalles I_z , de rayon relatif r_1 (i.e. de rayon $r_1 \rho(z)$), formée d'intervalles disjoints et maximale pour cette propriété. On y adjoint une famille \mathcal{I}_2 d'intervalles de rayon relatif r_2 , telle que les éléments de $\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$ soient disjoints, et qui est maximale pour cette propriété. On poursuit par récurrence et on obtient une famille $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \dots \cup \mathcal{I}_N$ vérifiant

— pour $I \neq J \in \mathcal{I}$, on a $3I \cap 3J = \emptyset$,

— pour z tel que $f(z) < a_0 \rho(z)^{2m}$, en notant r le rayon relatif de I_z , il existe un intervalle $I \in \mathcal{I}$, de rayon relatif $r_I \geq r$, tel que $\frac{1}{3}I_z \cap \frac{1}{3}I \neq \emptyset$. Notons z_I

⁽¹⁾Si I est un intervalle de longueur L , on note λI l'intervalle de même centre et de longueur λL .

le centre de I et y un point de $\frac{1}{3}I_z \cap \frac{1}{3}I$. Les rapports $\rho(y)/\rho(z_I)$ et $\rho(y)/\rho(z)$ sont majorés, ainsi que leurs inverses par 2. On a $\rho(z) \leq 4\rho(z_I)$ et donc

$$\frac{|z-z_I|}{r_I\rho(z_I)} \leq \frac{|y-z_I|}{r_I\rho(z_I)} + \frac{|y-z|}{r_I\rho(z_I)} \leq \frac{1}{3} + \frac{4|y-z|}{r_I\rho(z)} \leq \frac{1}{3} + \frac{4|y-z|}{r\rho(z)} \leq \frac{5}{3}.$$

On a donc $f(x) \geq a_0\rho(x)^{2m}$ hors de $\bigcup_{I \in \mathcal{I}} \frac{5}{3}I$. On sait de plus, grâce à (16), que $f(x) \geq a_0\rho(z_I)^{2m} \geq 2^{-2m}a_0\rho(x)^{2m}$ pour $x \in 3I \setminus \frac{1}{3}I$ et on a donc

$$f(x) \geq 2^{-2m}a_0\rho(x)^{2m} \quad \text{hors de} \quad \bigcup_{I \in \mathcal{I}} \frac{1}{3}I.$$

Les intervalles $I \in \mathcal{I}$ ne peuvent pas s'accumuler en un point $x_0 \in]a, b[$. On devrait en effet avoir $\rho(x_0) = 0$, c'est-à-dire que l'on aurait

$$f(x) \sim \gamma(x-x_0)^{2m}/(2m)!$$

près de x_0 , avec $0 < \gamma \leq 1$. On aurait alors $\rho(x) \sim \sup_p (\gamma/(2p)!)^{1/2p} (x-x_0) \leq \gamma^{1/2m} (x-x_0)$ et donc $\lim f(x)/\rho(x)^{2m} \geq 1/(2m)!$. Si l'on a eu la précaution de choisir $a_0 < 1/(2m)!$, ce que nous supposons désormais, il existe un voisinage de x_0 ne contenant le centre d'aucun $I \in \mathcal{I}$.

Il est donc possible de ranger les $I \in \mathcal{I}$ par ordre croissant en une suite I_ν indexée par un intervalle de \mathbb{Z} . On notera z_ν le centre de I_ν et J_ν l'intervalle séparant I_ν de $I_{\nu+1}$. S'il existe un indice minimum (resp. maximum) ν , on notera $J_{\nu-1}$ (resp. J_ν) l'intervalle séparant I_ν de a [resp. b].

Choix de g et h . — Dans J_ν , on sait que $f(x) \geq 2^{-2m}a_0\rho(x)^{2m}$, mais ρ peut s'annuler en des points isolés. D'après le corollaire 3.6 appliqué au cas où f a m racines doubles confondues en un point y , on sait qu'il existe alors au voisinage de y une fonction u de classe C^m vérifiant $u^2 = f$, et que u est le produit de $(x-y)^m$ par une fonction continue strictement positive. On peut donc choisir u_ν globalement dans J_ν , de valeur absolue égale à \sqrt{f} et gardant un signe constant si m est pair, ou au contraire changeant de signe en chaque point où ρ s'annule si m est impair. On sait que u_ν est de classe C^m et il suffit d'estimer ses dérivées aux points x tels que $\rho(x) > 0$.

$$|D^k u_\nu(x)| \leq C_1 \sum \frac{|D^{q_1} f(x) \dots D^{q_r} f(x)|}{f^{r-1/2}},$$

la somme étant étendue aux indices tels que $\sum q_s = k$. Dans chaque terme de la somme, le numérateur se majore par $\bar{C}^r \prod \rho(x)^{2m-q_s} = \bar{C}^r \rho(x)^{2mr-k}$, tandis que le dénominateur se minore par $2^{-2mr} a_0^r \rho(x)^{2mr-m}$. On a donc, avec des constantes uniformes, $|D^k u(x)| \leq C_2 \rho(x)^{m-k}$ pour $k \leq m$.

On peut maintenant définir la fonction g : elle vaut 0 dans chaque J_ν et, dans chaque I_ν , elle coïncide avec la fonction à support compact g_{z_ν} dont (15) nous fournit les majorations. On a ainsi $g \in C^m(]a, b[)$ et en tout point

$$|D^k g(z)| \leq A_0 \rho(z_\nu)^{m-k} \leq 2^m A_0 \rho(z)^{m-k}.$$

La fonction h est connue au signe près : on la prendra égale à $\pm u_\nu$ dans J_ν et à $\pm h_{z_\nu}$ dans I_ν . Il suffit de recoller les signes puisque l'on a $h_{z_\nu} = \pm\sqrt{f}$ dans $3I_\nu \cap J_{\nu-1}$ ainsi que dans $3I_\nu \cap J_\nu$. Ayant choisi (arbitrairement) h dans I_0 , le choix de h est imposé dans J_{-1} et J_0 , puis dans I_{-1} et I_1 et ainsi de suite. On a $h \in C^m([a, b])$ et les majorations des u_ν et h_{z_ν} montrent que

$$|D^k h(z)| \leq C_3 \rho(z)^{m-k}.$$

Comme $\rho(z)$ est inférieur à $d(z)$, distance au bord de $[a, b]$, cela achève la démonstration du théorème 2.2.

5.1. Quelques indications sur le cas höldérien. — Nous ne ferons qu'essayer la démonstration du résultat suivant :

Si la fonction f est positive et de classe $C^{2m-2+2\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$ (resp. $C^{2m-2,1}$, $C^{2m-1,1}$), alors $f = g^2 + h^2$ avec g et h de classe $C^{m-1+\alpha}$ (resp. $C^{m-1/2}$, $C^{m-1,1}$).

Comme dans la section 2, on se ramène au cas où f est à support compact dans $[0, 1]$. On pose $F = \{x \mid f(x) = \dots = D^{2m-2}f(x)\} = 0$ mais il n'est plus besoin de modifier f hors de F . On écrit $U = \mathbb{C}F$ comme réunion d'intervalles disjoints et suffit de montrer que dans l'un quelconque de ceux-ci (noté $]a, b[$) on peut écrire $f = g^2 + h^2$ avec

$$|D^k g(x)| + |D^k h(x)| \leq C d(x)^{m-1-k+\alpha}, \quad [D^{m-1}g]_{\alpha,x} + [D^{m-1}h]_{\alpha,x} \leq C,$$

en posant $[\varphi]_{\alpha,x} = \limsup_{y,z \rightarrow x} |\varphi(y) - \varphi(z)| / |y-z|^\alpha$, y compris dans les cas limites. La collection des fonctions g prolongée par 0 dans F appartiendra alors à l'espace voulu.

On pose $\rho(x) = \sup([D^{2p}f(x)]^+)^{1/(2m-2-2p+2\alpha)}$. Cette fonction ne s'annule pas dans $]a, b[$ et, quitte à diviser f par une constante, on a $\rho(x) \leq d(x)$. Une modification du lemme 4.1 montre que l'on a toujours $|D^k f(x)| \leq \bar{C} \rho(x)^{2m-2-k+2\alpha}$.

Le lecteur nous pardonnera de ne pas lui infliger une réécriture du lemme 4.2, où seules les constantes doivent être modifiées, mais le principe est le même : si la dérivée d'ordre $2p$ est dominante ($p = 1, \dots, m-1$), on peut trouver P de degré $\leq p-1$ tel que $f - P^2$ soit le produit de $\prod_1^p (x-x_j)^2$ par une fonction strictement positive de classe $C^{2m-2-2p+2\alpha}$, dont la racine carrée aura la même régularité.

La construction finale des intervalles I_ν et J_ν est essentiellement inchangée. La preuve est même légèrement simplifiée puisque l'on peut prendre h de signe constant ($f^{\frac{1}{2}}$ ou $-f^{\frac{1}{2}}$) dans les intervalles J_ν .

6. Démonstration du théorème 2

Pour $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$, on pose $D^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} (\partial/\partial x_2)^{\alpha_2}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$.

Il s'agit d'une adaptation de l'argument de [5], qui a déjà été rédigé de manière détaillée dans plusieurs ouvrages ou articles [8], [2], [10]. Nous renvoyons à ceux-ci pour les estimations et le calcul des constantes, qui ne sont pas modifiés, en nous bornant à décrire la méthode et à insister sur les points qui nécessitent des arguments nouveaux.

Le début de la démonstration reprend les arguments de la section 2. On se ramène d'abord au cas où la fonction f est de classe C^4 et à support dans le disque unité de \mathbb{R}^2 . On définit ensuite $F = \{x \mid f(x) = \nabla^2 f(x) = 0\}$ et, grâce à l'hypothèse (1), toutes les dérivées de f jusqu'à l'ordre 4 s'annulent sur F . On note encore $\tilde{\omega}$ un module de continuité régularisé des dérivées d'ordre 4 de f , et \tilde{d} une régularisée de la distance d à F . On pose enfin

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} \circ \tilde{d}; \quad \tilde{f} = f \tilde{\Omega}^{-\frac{1}{2}}.$$

La fonction \tilde{f} est définie dans l'ouvert borné $U = \mathbb{C}F$, et on a $|D^\alpha \tilde{f}| \leq Md(x)^{4-|\alpha|}$ pour $0 \leq |\alpha| \leq 4$. De plus, ses dérivées d'ordre 4, qui se laissent prolonger continûment par 0 hors de U , sont uniformément continues.

Il suffit donc d'établir l'énoncé suivant qui permettra d'écrire $\tilde{f} = \sum_1^N \tilde{g}_j^2$ dans U . Les fonctions $\tilde{g}_j(x)\Omega(x)^{\frac{1}{4}}$ prolongées par 0 dans F seront de classe C^2 et le théorème 2 sera démontré.

PROPOSITION 6.1. — *Soit f une fonction positive de classe C^4 dans U , dont les dérivées d'ordre 4 sont uniformément continues, vérifiant*

$$f(x) + |\nabla^2 f(x)| > 0 \quad \text{et} \quad |D^\alpha f(x)| \leq d(x)^{4-|\alpha|} \quad \text{pour } 0 \leq |\alpha| \leq 4.$$

Il existe alors N fonctions $g_j \in C^2(U)$, vérifiant

$$(17) \quad |D^\alpha g_j(x)| \leq Cd(x)^{2-|\alpha|} \quad \text{pour } 0 \leq |\alpha| \leq 2,$$

telles que $f = \sum_1^N g_j^2$. Les constantes C et N sont universelles.

On définit la fonction ρ par

$$\rho(x) = \sup_{|S|=1} \{f(x)^{1/4}, ([\partial_S^2 f(x)]^+)^{\frac{1}{2}}\},$$

en notant $\partial_S f(x) = \langle S, df(x) \rangle$ la dérivée directionnelle. On a $0 < \rho(x) \leq d(x)$ dans U et on montre que $|D^\alpha f(x)| \leq C\rho(x)^{4-|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq 4$.

La métrique riemannienne $g = dx^2/\rho(x)^2$ vérifie la condition de lenteur de Hörmander ($|y-x| \leq C^{-1}\rho(x)$ implique $(\rho(y)/\rho(x))^{\pm 1} \leq C$) et il existe donc pour tout $r > 0$ assez petit (voir [8, Theorem 1.4.10]) :

— un recouvrement de U par une famille de boules B_ν de centre x^ν et de rayon euclidien $r\rho_\nu = r\rho(x^\nu)$, tel que chaque boule rencontre au plus N_1 autres boules (une estimation grossière assure que $N_1 = 25$ convient);

— une partition de l'unité

$$\sum_{\nu \in \mathbb{N}} \Phi_\nu(x)^2 = 1; \quad \text{Supp}(\Phi_\nu) \subset B_\nu, \quad \forall \alpha, \quad |D^\alpha \Phi_\nu| \leq C_\alpha(r) \rho_\nu^{-|\alpha|}.$$

Un premier objectif est de montrer que chaque fonction $\Phi_\nu^2 f$ est somme de trois carrés de fonctions de classe C^2 :

$$(18) \quad \Phi_\nu^2 f = g_{\nu,1}^2 + g_{\nu,2}^2 + g_{\nu,3}^2; \quad |D^\alpha g_{j,\nu}| \leq C'(r) \rho_\nu^{2-|\alpha|} \text{ pour } |\alpha| \leq 2.$$

En choisissant d'abord δ assez petit, puis pour r assez petit devant δ (voir [8], [2], [10]), on a l'alternative suivante.

Premier cas : $f(x^\nu) \geq \delta \rho_\nu^4$. — Un seul carré suffit alors, la fonction $g_{1,\nu} = f^{\frac{1}{2}} \Phi_\nu$ est de classe C^2 et (18) est vérifié.

Second cas : $f(x^\nu) < \delta \rho_\nu^4$. *Les deux premiers carrés*. — Quitte à faire un changement de coordonnées, on a alors $\partial^2 f / \partial x_1^2(x^\nu) = \rho_\nu^2$. Pour $|x_2 - x_2^\nu| \leq 2r\rho_\nu$, la fonction $x_1 \mapsto f(x_1, x_2)$ admet un unique minimum dans l'intervalle de centre x_1^ν et de longueur $C\delta^{\frac{1}{2}}\rho_\nu$. On note $X(x_2)$ le point où ce minimum est atteint et $F(x_2) = f(X(x_2), x_2)$ la valeur de ce minimum.

La fonction X , définie implicitement par $\partial f / \partial x_1(X(x_2), x_2) = 0$ n'est que de classe C^3 , mais la fonction F est de classe C^4 (phénomène de composition rugueuse : $F'(x_2) = \partial f / \partial x_2(X(x_2), x_2)$). Elle est bien sûr positive et le théorème 1 permet de l'écrire $h_1^2 + h_2^2$ mais, pour montrer que les estimations (18) sont satisfaites, il faut contrôler les h_j uniformément en ν , et donc recourir au corollaire 2.4.

En ramenant les fonctions à un voisinage fixe de l'origine :

$$(19) \quad \begin{aligned} f_\nu(x) &= \rho_\nu^{-4} f(x_\nu + \rho_\nu x), \\ X_\nu(x_2) &\text{ défini par } \frac{\partial f_\nu}{\partial x_1}(X_\nu(x_2), x_2) = 0, \end{aligned}$$

$$(20) \quad F_\nu(x_2) = f_\nu(X_\nu(x_2), x_2), \quad \frac{dF_\nu}{dx_2}(x_2) = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_2}(X_\nu(x_2), x_2),$$

tout le problème est de montrer que les $d^4 F_\nu / dx_2^4$ sont équicontinues.

On sait que les f_ν et leurs dérivées premières sont majorées respectivement par δ et $C\delta^{\frac{1}{2}}$, celles d'ordre 2, 3 et 4 sont uniformément bornées. En outre, pour $|\alpha| = 4$, on a

$$D^\alpha f_\nu(y) - D^\alpha f_\nu(x) = D^\alpha f(x_\nu + \rho_\nu x) - D^\alpha f(x_\nu + \rho_\nu y).$$

La fonction ρ étant bornée et $D^\alpha f$ étant uniformément continue, les $D^\alpha f_\nu$ ont un module de continuité commun.

En dérivant trois fois (19), on peut écrire

$$\frac{\partial^2 f_\nu}{\partial x_1^2}(X_\nu(x_2), x_2) \frac{d^3 X_\nu}{dx_2^3}(x_2) = \dots$$

où le membre de droite ne contient que des termes dont le module de continuité est contrôlé. Comme $\partial^2 f_\nu / \partial x_1^2$ reste proche de 1, les dérivées troisièmes des X_ν sont équicontinues. En dérivant trois fois l'égalité de droite dans (20), on obtient l'équicontinuité des $d^4 F_\nu / dx_2^4$.

En revenant à la boule B_ν , on peut donc écrire $F = h_1^2 + h_2^2$ et poser $g_{\nu,j} = \Phi_\nu h_j$ pour $j = 1, 2$. Ces fonctions sont de classe C^2 et vérifient les estimations (18).

Second cas ; le troisième carré. — Il reste à écrire $f(x_1, x_2) - F(x_2) = (x_1 - X(x_2))^2 H(x_1, x_2)$ avec

$$H(x_1, x_2) = \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} ((1-t)F(x_2) + tx_1) dt.$$

La fonction $g_{\nu,3} = \Phi_\nu(x)(x_1 - X(x_2))H(x)^{\frac{1}{2}}$ est de classe C^2 et vérifie (18).

Sommation lacunaire. — On utilise maintenant l'argument de [7]. Il existe une partition de \mathbb{N} en N_1+1 ensembles J_0, \dots, J_{N_1} tels que, si $\mu \neq \nu$ appartiennent au même J_ℓ , on ait $B_\mu \cap B_\nu = \emptyset$. En posant $G_{j,\ell} = \sum_{\nu \in J_\ell} g_{\nu,j}$, ces fonctions vérifient (17) et on a

$$f = \sum_{0 \leq \ell \leq N_1; 1 \leq j \leq 3} G_{j,\ell}^2,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 6.1.

REMARQUE 6.2. — La démonstration précédente montrerait tout aussi bien l'implication suivante : si, en dimension n , toute fonction positive C^4 est somme (contrôlée) de carrés de fonctions C^2 , alors, en dimension $n+1$, toute fonction positive C^4 vérifiant (1) est somme de carrés de fonctions C^2 .

Pour $n = 2$ et 3 , la validité des prémisses, ainsi que celle des conclusions, reste une question ouverte. C'est le passage de f à F qui ne permet pas de poursuivre par récurrence. En un point où $F = F'' = 0$, les dérivées d'ordre 4 n'ont aucune raison d'être nulles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOCHNAK (J.), COSTE (M.) & ROY (M.-F.) – *Géométrie algébrique réelle*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [2] BONY (J.-M.) – *Sur l'inégalité de Fefferman-Phong*, in *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles*, École Polytechnique, Palaiseau, 1998–1999, exp. n° III.
- [3] BONY (J.-M.), BROGLIA (F.), COLOMBINI (F.) & PERNAZZA (L.) – *Nonnegative functions as squares or sums of squares*, à paraître.

- [4] BRUMFIEL (G.) – *Partially ordered rings and semi-algebraic geometry*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 37, Cambridge University Press, Cambridge-New York, 1979.
- [5] FEFFERMAN (C.) & PHONG (D. H.) – *On positivity of pseudo-differential operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, t. **75** (1978), pp. 4673–4674.
- [6] GLAESER (G.) – *Racine carrée d'une fonction différentiable*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. **13** (1963), pp. 203–210.
- [7] GUAN (P.) – *C^2 a priori estimates for degenerate Monge-Ampère equations*, Duke Math. J., t. **86** (1997), pp. 323–346.
- [8] HÖRMANDER (L.) – *The analysis of linear partial differential operators*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [9] LERNER (N.) & NOURRIGAT (J.) – *Lower bounds for pseudo-differential operators*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), t. **40** (1990), pp. 657–682.
- [10] TATARU (D.) – *On the Fefferman-Phong inequality and related problems*, Comm. Partial Differential Equations, t. **27** (2002), pp. 2101–2138.