Bull. Soc. math. France
132 (2), 2004, p. 233–261

SUR LA RIGIDITÉ DE POLYÈDRES HYPERBOLIQUES EN DIMENSION 3 : CAS DE VOLUME FINI, CAS HYPERIDÉAL, CAS FUCHSIEN

PAR MATHIAS ROUSSET

RÉSUMÉ. — Un polyèdre hyperbolique semi-idéal est un polyèdre dont les sommets sont dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ ou à l'infini. Un polyèdre hyperbolique hyperidéal est, dans le modèle projectif, l'intersection de $\mathbb{H}^3$ avec un polyèdre projectif dont les sommets sont tous en dehors de $\mathbb{H}^3$ et dont toutes les arêtes rencontrent $\mathbb{H}^3$. Nous classifions les polyèdres semi-idéaux en fonction de leur métrique duale, d'après les résultats de Rivin dans [8] (écrit avec C.D. Hodgson) et [7]. Nous utilisons ce résultat pour retrouver la classification des polyèdres hyperidéaux en terme de leur combinatoire et de leurs angles dièdres. Nous généralisons ces résultats au cas des polyèdres fuchsiens.

ABSTRACT (*About the Rigidity of Tridimensional Hyperbolic Polyhedra : Finite Volume Case, Hyperideal Case, Fuchsian Case*)

An hyperbolic semi-ideal polyhedron is a polyhedron whose vertices lie inside the hyperbolic space $\mathbb{H}^3$ or at infinity. An hyperideal polyhedron is, in the projective model, the intersection of $\mathbb{H}^3$ with a projective polyhedron whose vertices all lie outside of $\mathbb{H}^3$, and whose edges all meet $\mathbb{H}^3$. We classify semi-ideal polyhedra in terms of their dual metric, using the results of Rivin in [8] (written with C.D. Hodgson) et [7]. This result is used to obtain the classification of hyperideal polyhedra in terms of their combinatorial type and their dihedral angles. These two results are generalized to the case of fuchsian polyhedra.

Texte reçu le 24 février 2003, accepté le 8 août 2003

MATHIAS ROUSSET, Laboratoire de statistique et probabilité, Université Paul Sabatier, 31062 Toulouse cedex 4 (France) • *E-mail :* `rousset@cict.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 52A55, 53C45.

Mots clefs. — Géomètrie hyperbolique, polyèdres, polyèdres hyperidéaux, variété fuchsienne, rigidité.

1. Introduction

L'objet principal d'étude de cet article est la rigidité des polyèdres hyperboliques. Cauchy a montré la rigidité globale des polyèdres euclidiens, les faces étant fixées à isométrie près. D'une manière générale, un problème de rigidité de polyèdres peut se voir de la manière suivante :

• On considère un certain espace de polyèdres convexes ; on fixe en général le nombre de plans formant le polyèdre, ou bien (et c'est très différent) la combinatoire du polyèdre (*i.e.* la décomposition en arêtes, sommets et faces).

• On considère une application de ces polyèdres vers certaines de leurs caractéristiques, typiquement la longueur des arêtes, la valeur des angles dièdres ou la métrique induite sur le polyèdre.

• On se demande si l'application est localement injective (rigidité locale), ou globalement injective (rigidité globale).

Dans le cas de Cauchy, on fixe la combinatoire du polyèdre et on regarde la longueur des arêtes et la valeur des angles des faces.

On peut être plus ambitieux et essayer de caractériser un ensemble de polyèdres, c'est-à-dire le classifier par certaines de ses caractéristiques. On peut par exemple essayer de mettre en bijection les polyèdres de combinatoire fixée Γ avec certaines valeurs de leurs angles dièdres. Ou bien encore, on peut essayer de mettre en bijection les polyèdres avec n sommets avec un certain ensemble de métriques sur la sphère avec n singularités représentant leur géométrie intrinsèque.

1.1. Résultats principaux.

— Commençons par rappeler les résultats importants sur la rigidité des polyèdres. Le premier est du à Cauchy :

THÉORÈME 1.1 (Cauchy). — *Soit $\mathcal{P}_{\mathrm{euc},\Gamma}$ l'ensemble des polyèdres euclidiens convexes de combinatoire Γ. L'application qui à un polyèdre de $\mathcal{P}_{\mathrm{euc},\Gamma}$ associe la longueur de ses arêtes et la valeur des angles de ses faces est globalement injective.*

Andreev a montré la rigidité des polyèdres hyperboliques de volume fini dans [2] pour le cas compact, puis le cas du volume fini dans [3] :

THÉORÈME 1.2 (Andreev). — *Soit $\mathcal{P}_{\mathrm{and},\Gamma}$ l'ensemble des polyèdres hyperboliques de volume fini de combinatoire Γ et ayant des angles dièdres inférieurs à $\frac{1}{2}\pi$. L'application qui à un polyèdre de $\mathcal{P}_{\mathrm{and},\Gamma}$ associe la valeur de ses angles dièdres est globalement injective.*

Andreev donne un ensemble de conditions caractérisant les valeurs d'angles dièdres atteints.

On a ensuite une caractérisation très générale des polyèdres hyperboliques de volume fini dont *le nombre de faces est fixé mais pas la combinatoire* ; cette caractérisation dépend de la métrique duale (la métrique du « polyèdre dual » plongée dans l'espace de Sitter ou de manière équivalente, la troisième forme fondamentale du polyèdre). On notera $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polyèdres hyperboliques compacts ayant n faces, et $\mathcal{P}_n^{\mathrm{si}}$ l'ensemble des polyèdres hyperboliques de volume fini (on dira aussi semi-idéal) ayant n faces. On définit maintenant les espaces métriques qui vont caractériser ces polyèdres :

DÉFINITION 1.3. — On notera $\mathcal{S}_n$ l'espace des espaces métriques h, tel que h soit homéomorphe à la sphère $\mathbb{S}^2$, de courbure constante 1, partout à l'exception d'un nombre fini de points où il présente une singularité conique. Les singularités sont numérotées et les espaces métriques sont définis aux isométries préservant les singularités près.

DÉFINITION 1.4. — On notera $\mathcal{M}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ des métriques telles que :

- toutes les singularités ont une courbure strictement négative ;
- toute géodésique fermée a une longueur strictement supérieure à 2π.

On notera $\mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ des métriques telles que :

- toutes les singularités ont une courbure strictement négative ;
- toute géodésique fermée a une longueur supérieure ou égale à 2π ;
- le nombre de géodésiques fermées de longueur 2π est fini et chacune d'entre elles sépare l'espace en deux composantes connexes dont l'une au moins est isométrique à un hémisphère.

À tout polyèdre compact P de $\mathcal{P}_n$ on associe son dual P^* muni de sa métrique induite (*cf.* section 3). En tant qu'objet intrinsèque, c'est un élément de $\mathcal{S}_n$. On note Φ l'application ainsi définie. On est en mesure de citer des résultats de Rivin [8] et [7], respectivement :

THÉORÈME 1.5 (Rivin). — *L'application Φ est un homéomorphisme de $\mathcal{P}_n$ sur $\mathcal{M}_n$. Autrement dit : les polyèdres compacts sont en bijection avec les métriques duales admissibles* (*existence et unicité*).

THÉORÈME 1.6 (Rivin). — *Le prolongement par continuité $\widetilde{\Phi} : \mathcal{P}_n^{\mathrm{si}} \to \mathcal{S}_n$ de Φ a exactement pour image $\mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$. Autrement dit : les polyèdres semi-idéaux ont exactement pour métriques duales les métriques admissibles de volume fini* (*existence*).

Alexandrov [1] a donné antérieurement une caractérisation similaire pour les polyèdres compacts ayant n sommet, simplement en fonction de leur métrique induite ; la condition de borne inférieure pour les longueurs des géodésiques fermées n'apparaît alors pas.

Citons enfin le résultat de Bonahon et Bao [4], qui permet de caractériser les polyèdres hyperboliques hyperidéaux (avec leurs sommets à l'infini et « au-delà » de l'infini, *cf.* section 4) de combinatoire donnée Γ (dont l'ensemble est noté $\mathcal{P}_\Gamma$) par la donnée de leurs angles dièdres :

THÉORÈME 1.7 (Bonahon et Bao). — *On a existence et unicité des polyèdres hyperidéaux* (*on autorise des sommets idéaux*) *de combinatoire donnée* Γ *dont les angles dièdres extérieurs* θ_{e_i} (π *moins l'angle dièdre*) *vérifient :*

(C1) *on a* $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} \geq 2\pi$ *pour toute courbe fermée* γ *plongée dans le graphe dual* Γ^* *et passant par les arêtes* $e_1, \ldots, e_n$ *; l'égalité ayant lieu très exactement quand* γ *est le bord d'une face du graphe dual* Γ^* *correspondant à un sommet idéal du polyèdre initial ;*

(C2) *on a* $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} > \pi$ *pour tout chemin* γ *plongé dans* Γ^* *et joignant deux sommets de* Γ^* *ayant une même face adjacente, mais tel que* γ *ne soit pas tout entier contenu dans le bord de cette face.*

Cet article contient les deux résultats principaux suivants :

• La caractérisation des polyèdres convexes hyperboliques à n faces semi-idéaux (avec des sommets à l'infini) en fonction de leur métrique duale. Cette caractérisation comporte comme cas particulier celle des polyèdres compacts et des polyèdres idéaux.

• Une nouvelle démonstration de la caractérisation des polyèdres convexes hyperboliques de combinatoire Γ hyperidéaux (les sommets sont à l'infini ou au-delà) par leurs angles dièdres.

L'idée est de déduire le premier résultat des idées de Rivin dans [8] et [7] ; l'apport nouveau de l'article est l'obtention de la rigidité dans le cas général semi-idéal (section 3) qui manquait dans ces deux articles, en utilisant la transformation de Pogorelov (section 2).

En « tronquant » les sommets hyperidéaux, on en déduit le second énoncé (section 4). Cette partie constitue une preuve indirecte simple, du résultat démontré en détail dans la prépublication de Bonahon et Bao [4].

On montrera que ces caractérisations se généralisent très exactement au cas des polyèdres hyperboliques fuchsiens de genre $g \geq 2$ (*cf.* section 5). En particulier, on obtient ainsi le résultat nouveau suivant de caractérisation des polyèdres hyperidéaux fuchsiens :

THÉORÈME 1.8. — *On a existence et unicité des polyèdres hyperidéaux fuchsiens de genre* $g \geq 2$ (*on autorise des sommets idéaux*) *de combinatoire donnée* Γ *dont les angles dièdres extérieurs* θ_{e_i} (π *moins l'angle dièdre*) *vérifient les conditions :*

(CF1) *on a* $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} \geq 2\pi$ *pour toute courbe fermée* contractile γ *plongée dans le graphe dual* Γ^* *et passant par les arêtes* $e_1, \ldots, e_n$ *; l'égalité ayant lieu* *très exactement quand γ est le bord d'une face du graphe dual Γ^* correspondant à un sommet idéal du polyèdre initial ;*

(CF2) *on a $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} > \pi$ pour tout chemin γ plongé dans Γ^* et joignant deux sommets A et B de Γ^* ayant une même face F adjacente, mais tel que γ ne soit pas tout entier contenu dans le bord de cette face. On demande que γ soit homotope au chemin bordant F et joignant A à B.*

L'analogue des résultats de Rivin [8] et [7] dans le cas fuchsien ont été établis par Schlenker dans [9].

2. La transformation de Pogorelov

Cette section est consacrée à l'étude de la transformation de Pogorelov. On note $\mathbb{R}_p^{n+1}$ l'espace de Minkowski de dimension $n+1$ et de signature $(n+1-p, p)$, et Ω_0 l'intersection d'un demi-espace de vecteur normal de type strictement espace ou strictement temps avec une des deux sphères unités ($p \neq 0$).

La transformation de Pogorelov prend deux objets de Ω_0 ayant la même géomètrie intrinsèque induite et les plongent dans $\mathbb{R}_p^n$ ou $\mathbb{R}_{p-1}^n$, les images ayant alors la même géométrie intrinsèque induite. De plus, les images sont identifiables à isométrie près si et seulement si les objets initiaux le sont. Elle va nous permettre de ramener des questions de rigidité de polyèdres dans l'espace de Sitter au problème correspondant dans l'espace euclidien.

2.1. Espaces à courbure constante.

— On se propose dans cette sous-section de rappeler succinctement quelques propriétés des espaces homogènes riemanniens et lorentziens à courbure constante. L'espace ambiant est l'espace de Minkowski $\mathbb{R}_p^{n+1}$ muni de sa métrique canonique :

$$\|x\|^2 = -x_1^2 - \cdots - x_p^2 + x_{p+1}^2 + \cdots + x_{n+1}^2.$$

On note :

- $\mathbb{S}_p^n = \{x \in \mathbb{R}_p^{n+1};\ \|x\| = 1\}$ la sphère unité « à courbure positive »,
- $\mathbb{H}_{p-1}^n = \{x \in \mathbb{R}_p^{n+1};\ \|x\| = -1\}$ la sphère unité « à courbure négative ».

Ces sphères sont toutes deux munies de leur métrique induite. On énonce sans démonstration :

THÉORÈME 2.1. — *La sphère $\mathbb{S}_p^n$ est une variété pseudo-riemannienne complète de dimension n et de signature $(n-p, p)$. Elle est homogène et a pour courbure constante 1. Son groupe d'isométrie est le groupe des isométries linéaires $\mathrm{O}(n+1-p, p)$ de $\mathbb{R}_p^{n+1}$ et son groupe d'isotropie est $\mathrm{O}(n+1-p, p-1)$.*

La sphère $\mathbb{H}_{p-1}^n$ est une variété pseudo-riemannienne complète de dimension n et de signature $(n+1-p, p-1)$. Elle est homogène et a pour courbure constante -1. Son groupe d'isométrie est $\mathrm{O}(n+1-p, p)$ et son groupe d'isotropie est $\mathrm{O}(n-p, p)$

2.2. La transformation projective. — On se donne un demi-espace de $\mathbb{R}_p^{n+1}$ de normale x_0 avec $\|x_0\|^2 = \epsilon = \pm 1$. On note Ω_0 l'ensemble des points de norme carrée $\mu = \pm 1$ de ce demi-espace. Donc

$$\Omega_0 = \begin{cases} \big\{x \in \mathbb{S}_p^n;\ \operatorname{sgn}(\langle x, x_0\rangle) = \epsilon\big\} & \text{si } \mu \text{ est positif,} \\ \big\{x \in \mathbb{H}_{p-1}^n;\ \operatorname{sgn}(\langle x, x_0\rangle) = \epsilon\big\} & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

On considère l'hyperplan affine passant par le point x_0 et orthogonal au vecteur x_0. C'est un modèle affine pour l'espace projectif $\mathbb{RP}^n$ des droites vectorielles de $\mathbb{R}_p^{n+1}$. Chaque droite de cet ensemble intersecte Ω_0 en au plus un point. Cette construction fournit l'application projective ϕ de Ω_0 vers $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{RP}^n$. On énonce alors sans démonstration :

Proposition 2.2 (transformation projective). — *Avec les notations précédentes, la transformation projective $\phi : \Omega_0 \to \mathbb{R}^n$ est un difféomorphisme de Ω_0 sur son image. On appelle x_0 le* centre *de la projection. Quand on considère $\phi(x)$ comme vecteur de $\mathbb{R}_p^n$, on a l'expression explicite*

$$\phi(x) = \frac{\epsilon x - \langle x, x_0\rangle x_0}{\langle x, x_0\rangle}\cdot$$

Enfin, si ρ est une isométrie de Ω_0 laissant le centre invariant, $\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}$ est une isométrie de $\mathbb{R}_p^n$ laissant le centre invariant.

Remarque. — On a la formule suivante :

$$\phi^{-1}(y) = (y + x_0)\big(\mu \|y + x_0\|^2\big)^{\frac{1}{2}}.$$

2.3. La transformation de Pogorelov globale. — On conserve les notations précédentes.

Théorème 2.3 (application de Pogorelov globale). — *Il existe une application $\Phi : \Omega_0 \times \Omega_0 \to \mathbb{R}_p^n \times \mathbb{R}_p^n$ dont la formule explicite est*

$$\Phi(x, x') = 2\Big(\frac{\epsilon x - \langle x, x_0\rangle x_0}{\langle x + x', x_0\rangle}, \frac{\epsilon x' - \langle x', x_0\rangle x_0}{\langle x + x', x_0\rangle}\Big)$$

et qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1) *Soit $V \in T_{(x,x')}(\Omega_0 \times \Omega_0)$; on a $\|\pi_1 V\|^2 = \|\pi_2 V\|^2$ si et seulement si*

$$\big\|\pi_1\big(T_{(x,x')}\Phi(V)\big)\big\|^2 = \big\|\pi_2\big(T_{(x,x')}\Phi(V)\big)\big\|^2,$$

π_1 et π_2 étant respectivement la première et seconde projection du produit cartésien.

2) *L'application Φ commute aux isométries laissant le centre x_0 invariant, au sens où si ρ appartient au groupe d'isotropie de x_0, on a*

$$\Phi \circ (\rho \times \rho) = \big((\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}) \times (\phi \circ \rho \circ \phi^{-1})\big) \circ \Phi,$$

$\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}$ étant une isométrie.

REMARQUE. — On a $\Phi_{|\Delta} = (\phi \times \phi)_{|\Delta}$, où Δ est la diagonale de $\Omega_0 \times \Omega_0$.

Démonstration. — 1) On se donne $(X, X') \in T_{(x,x')}(\Omega_0 \times \Omega_0)$ et on calcule la différentielle de Φ directement :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\langle x + x', x_0\rangle^2 \pi_1\big(T_{(x,x')}\Phi(X, X')\big) = \\ \epsilon\langle x + x', x_0\rangle X - \epsilon\langle X + X', x_0\rangle x \\ +\big(\langle x, x_0\rangle\langle X', x_0\rangle - \langle x', x_0\rangle\langle X, x_0\rangle\big)x_0.\end{aligned}$$

En élevant la norme au carré et en utilisant la relation $\langle X, x\rangle = 0$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\langle x + x', x_0\rangle^4 \big\|\pi_1\big(T_{(x,x')}\Phi(X, X')\big)\big\|^2 = \\ \langle x + x', x_0\rangle^2\|X\|^2 + \mu\langle X + X', x_0\rangle^2 \\ -\epsilon\big(\langle x, x_0\rangle\langle X', x_0\rangle - \langle x', x_0\rangle\langle X, x_0\rangle\big)^2.\end{aligned}$$

En faisant la différence des normes des deux projections :

$$\frac{1}{4}\langle x + x', x_0\rangle^2\big\{\|\pi_1\big(T\Phi(X, X')\big)\|^2 - \|\pi_2\big(T\Phi(X, X')\big)\|^2\big\} = \|X\|^2 - \|X'\|^2.$$

Ce qui suffit à compléter la preuve car $\langle x + x', x_0\rangle$ n'est jamais nul.

2) L'égalité s'obtient en effectuant un calcul explicite et en exploitant la linéarité de ρ, le fait qu'il laisse x_0 invariant et le fait qu'il conserve le produit scalaire. La démonstration est ainsi achevée. $\square$

Voici une interprétation géométrique de la transformation de Pogorelov :

COROLLAIRE 2.4. — *Soient F, F' deux sous-variétés difféomorphes de Ω_0, plongements d'une variété S par ϕ, ϕ' respectivement, munies de la métrique induite, et $\widetilde{F}, \widetilde{F}'$ le couple de sous-variétés image du couple (F, F') par la transformation de Pogorelov, munis de la métrique induite par $\mathbb{R}^n_p$. On a les propriétés suivantes :*

1) *F et F' ont la même géométrie intrinsèque si et seulement si $\widetilde{F}$ et $\widetilde{F}'$ ont la même géométrie intrinsèque ;*

2) *F et F' sont identiques à isométrie globale préservant le centre de Ω_0 près, si et seulement si $\widetilde{F}$ et $\widetilde{F}'$ vérifient la même propriété.*

Démonstration. — 1) Soit S tel que F et F' soient deux plongements de S dans Ω_0 par ϕ et ϕ' respectivement ; alors $\widetilde{F}$ et $\widetilde{F}'$ sont deux plongements de S dans $\mathbb{R}^n_p$ par $\pi_1\Phi \circ (\phi, \phi')$ et $\pi_2\Phi \circ (\phi, \phi')$ respectivement. La première propriété de la transformation dit exactement que les premiers plongements sont isométriques si et seulement si les seconds le sont.

2) D'après la seconde propriété, si F' est l'image de F par l'isométrie ρ, $\widetilde{F}'$ est l'image de $\widetilde{F}$ par $\phi \circ \rho \circ \phi^{-1}$. On obtient la réciproque en conjuguant par ϕ^{-1} l'isométrie de $\mathbb{R}^n_p$ préservant le centre. $\square$

2.4. La transformation de Pogorelov infinitésimale

THÉORÈME 2.5 (application de Pogorelov infinitésimale)

Il existe un morphisme de fibrés $\widetilde{\phi} : T\Omega_0 \to T\mathbb{R}^n_p$ *de base* ϕ*, s'écrivant explicitement avec les notations précédentes*

$$\widetilde{\phi}(x,v) = \Big(\frac{\epsilon x - \langle x, x_0\rangle x_0}{\langle x, x_0\rangle}, \frac{\epsilon v - \langle v, x_0\rangle x_0}{\langle x, x_0\rangle}\Big)$$

et vérifiant les propriétés suivantes :

1) *Si* F *est une sous-variété de* Ω_0 *muni d'un champ de vecteur* V*, alors* V *est une déformation isométrique* (*i.e. de dérivée de Lie nulle sur* F)*, si et seulement si* $\widetilde{\phi}(V)$ *est une déformation isométrique de* $\phi(F)$.

2) *Le champ* V *est la restriction sur* F *d'une isométrie infinitésimale* (*i.e. un champ de Killing*) ξ*, si et seulement si* $\widetilde{\phi}(V)$ *est la restriction à* $\phi(F)$ *de l'isométrie infinitésimale* $\widetilde{\phi}(\xi)$.

Démonstration. — On peut donner deux démonstrations du théorème. La première s'obtient en dérivant la formule de Pogorelov globale, la seconde par le calcul direct. On rappelle que la dérivée de Lie est la 2-forme symétrique $\mathcal{L}(Y,Z) = \langle D_Y V, Z\rangle + \langle D_Z V, Y\rangle$.

Première démonstration. — On se donne $f_t : S \hookrightarrow \Omega_0$ une famille différentiable de plongements pour $t \in]-\epsilon, \epsilon[$, isométriques entre eux (la 2-forme $\langle Tf_t, Tf_t\rangle$ ne dépend pas de t), et telle que $F \equiv f_0$ et $V(f_0(p)) = \mathrm{d}f_t(p)/\mathrm{d}t_{|t=0}$, p étant un point courant de S. La composition $\Phi(f_0, f_t)$, donne d'après le théorème de Pogorelov, une famille de couples isométriques de plongements de S dans $\mathbb{R}^n_p$. Soient Y et Z deux vecteurs de l'espace tangent en p à S et (Y^1_t, Y^2_t) et (Z^1_t, Z^2_t) leurs images par $T_p\Phi(f_0, f_t)$. On note $Y_0 = Y^1_0 = Y^2_0$ et $Z_0 = Z^1_0 = Z^2_0$. Le théorème de Pogorelov nous dit très exactement que l'on a $\langle Y^1_t, Z^1_t\rangle = \langle Y^2_t, Z^2_t\rangle$ pour tout t. Dérivons cette égalité ; il vient

$$\langle T_pV_1(Y_0), Z_0\rangle + \langle T_pV_1(Z_0), Y_0\rangle = \langle T_pV_2(Y_0), Z_0\rangle + \langle T_pV_2(Z_0), Y_0\rangle$$

où on a posé $V_i = \pi_i T_p\Phi(O, V)$. Cette formule exprime que $V_1 - V_2$ a une dérivée de Lie nulle sur $\phi(F)$. On pose donc $\widetilde{\phi}(V) = V_1 - V_2$ et un calcul explicite donne la formule.

Deuxième démonstration. — On se donne un point p de F et y_t un chemin de F tel que $y_0 = p$. On note $Y = (\mathrm{d}y_t/\mathrm{d}t)_{|t=0}$. On cherche à calculer la dérivée de Lie (une 2-forme symétrique) de $\widetilde{\phi}(V)$ sur deux fois $T\phi(Y) = \mathrm{d}\phi(y_t)/\mathrm{d}t$ en fonction de la dérivée de Lie de V sur deux fois Y. Un calcul explicite donne en $t = 0$ la formule

$$\Big\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\phi}\big(V(y_t)\big), \frac{\mathrm{d}\phi(y_t)}{\mathrm{d}t}\Big\rangle = \Big\langle \widetilde{\phi}\Big(\frac{\mathrm{d}V(y_t)}{\mathrm{d}t}\Big) - \widetilde{\phi}(V)\frac{\langle Y, x_0\rangle}{\langle p, x_0\rangle}, \widetilde{\phi}(Y) - \phi(p)\frac{\langle Y, x_0\rangle}{\langle p, x_0\rangle}\Big\rangle.$$

En développant et en utilisant les identités $\langle V, p\rangle = 0$, $\langle Y, p\rangle = 0$ et $\langle \mathrm{d}V(y_t)/\mathrm{d}t, p\rangle + \langle V, Y\rangle = 0$, il vient

$$\Big\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{\phi}(V(y_t)), \frac{\mathrm{d}\phi(y_t)}{\mathrm{d}t}\Big\rangle = \frac{1}{\langle p, x_0\rangle^2}\Big\langle \frac{\mathrm{d}V(y_t)}{\mathrm{d}t}, Y\Big\rangle,$$

ce qui constitue la relation souhaitée et prouve que $\widetilde{\phi}(V)$ est isométrique si et seulement si V l'est.

La deuxième propriété découle immédiatement de la seconde en faisant $F = \Omega_0$. □

3. Une caractérisation des polyèdres hyperboliques convexes de volume fini

Le but de cette section est de résumer les résultats d'Igor Rivin contenus dans [8] et [7], puis d'ajouter un argument d'unicité grâce à la transformation de Pogorelov.

3.1. Polyèdres. — On se place dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$ de dimension 3.

Définition 3.1 (Polyèdres convexes). — On appelle *polyèdre hyperbolique convexe compact* l'intersection compacte d'une collection de n demi-espaces de $\mathbb{H}^3$. Tous ses sommets sont situés dans $\mathbb{H}^3$.

On appelle *polyèdre hyperbolique convexe de volume fini ou semi-idéal* l'intersection de volume fini d'une collection de n demi-espaces de $\mathbb{H}^3$. Ses sommets sont situés dans $\mathbb{H}^3$ où à l'infini.

On appelle *polyèdre hyperbolique convexe idéal*, un polyèdre convexe de volume fini dont tous les sommets sont situés à l'infini.

Définition 3.2. — On appelle *combinatoire* du polyèdre P la décomposition cellulaire du polyèdre selon ses arêtes, ses sommets et ses faces.

On appelle *combinatoire duale* de Γ, la combinatoire dont les faces correspondent aux sommets de Γ, les arêtes aux arêtes, et les sommets aux faces. (Par exemple, la combinatoire duale du cube est celle de l'octaèdre).

Remarque. — On définit de même les *polyèdres convexes sphériques.*

On a aussi une notion de polyèdres convexes dans l'espace de de Sitter $\mathbb{S}^3_1$:

Définition 3.3. — On appelle *polyèdre convexe compact* dans l'espace de Sitter l'intersection compacte d'une collection de n demi-espaces définis par des plans orientés de type-espace. La métrique induite sur ces polyèdres est donc riemannienne.

Une manière simple de visualiser topologiquement ces polyèdres est la suivante, en notant $\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ la métrique naturelle sur $\mathbb{S}^2$:

PROPOSITION 3.4. — *On considère l'espace de Sitter comme la variété différentielle* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ *muni de* $-\mathrm{d}t^2 + \mathrm{ch}^2 t \,\mathrm{can}_{\mathbb{S}^2}$ *et on note* p *la projection sur la sphère. Soit* P *un polyèdre compact ; alors* p *constitue un homéomorphisme* (*aux singularités près*) *de* P *sur* S^2.

3.2. Dualité. — On va définir une application notée $*$ qui est un difféomorphisme involutif entre, au choix :

- les polyèdres compacts hyperboliques et les polyèdres compacts de Sitter ;
- les polyèdres compacts sphériques sur eux-mêmes.

On va se contenter de définir l'application dans le premier cas : on se place dans l'espace de Minkowski de dimension 4 ; on considère $\mathbb{H}^3$ comme la composante connexe supérieure de la sphère unité de type temps et $\mathbb{S}^3_1$ comme la sphère unité de type espace (*cf.* 2.1). Dans ce modèle :

- tout point de $\mathbb{H}^3$ s'interprète comme droite de type temps ;
- toute droite hyperbolique s'interprète comme plan de $\mathbb{R}^3_1$ de signature $(+,-)$;
- tout plan hyperbolique s'interprète comme hyperplan de $\mathbb{R}^3_1$ orthogonal à une droite de type espace.

Réciproquement :

- tout point de $\mathbb{S}^3_1$ s'interprète comme droite de $\mathbb{R}^3_1$ de type temps ;
- tout plan de Sitter de type espace (c'est-à-dire de métrique induite riemannienne) s'interprète comme hyperplan de $\mathbb{R}^3_1$ orthogonal à une droite de type temps ;
- toute droite de Sitter de type espace s'interprète comme plan de $\mathbb{R}^3_1$ de signature (+,+).

L'orthogonalité définit ainsi une correspondance duale entre respectivement les points, les plans et les droites de $\mathbb{H}^3$ d'une part et les plans de type espace, les points et les droites de type espace de l'espace de Sitter.

PROPOSITION-DÉFINITION 3.5. — *Soit* P *un polyèdre compact hyperbolique. Par la correspondance ci-dessus, on définit le polyèdre* P^* *dans l'espace de Sitter vérifiant :*

- *les sommets de* P^* *sont* orthogonaux *aux faces de* P *;*
- *les arêtes de* P^* *sont* orthogonales *aux arêtes de* P *;*
- *les faces de* P^* *sont* orthogonales *aux sommets de* P.

Le polyèdre P^* *est un polyèdre compact de l'espace de Sitter, vérifiant les propriétés suivantes :*

- *la combinatoire de* P^* *est duale de celle de* P *;*
- *la longueur des arêtes est égale aux angles dièdres duaux ;*

• *réciproquement, les angles dièdres sont égaux aux longueurs des arêtes duales ;*

• *les angles entre arêtes adjacentes sont complémentaires aux angles des arêtes adjacentes duales.*

Enfin, la transformation $*$ commute aux isométries, ce qui signifie que si P est défini à isométrie près, P^* l'est aussi.

REMARQUES. — On peut construire la métrique induite sur P^* en identifiant les arêtes communes des polygônes sphériques duaux des sommets de P.

La somme des angles aux sommets de P^* est supérieure à 2π, formant une singularité conique à courbure singulière négative.

En effet, en appliquant la formule de Gauss, on remarque que la courbure négative contenue dans les faces de P se réalise comme singularité conique négative dans les sommets de P^* ; réciproquement, la courbure positive contenue dans les singularités coniques des sommets de P se réalise comme faces de courbure constante positive.

3.3. Le résultat de Rivin. — Voici quelques rappels sur la topologie utilisée sur les espaces de polyèdres. Quand on considère un espace de polyèdres, on peut définir une topologie dessus de plusieures manières équivalentes :

• on considère la topologie Hausdorff définie sur les sous-ensembles de $\mathbb{H}^3$;

• on regarde les polyèdres dans l'espace projectif (qui ont même topologie que $\mathbb{H}^3$ par continuité de la transformation projective) et on paramètre les polyèdres par les sommets ou les faces. L'espace de polyèdres est alors un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{3n}$ muni de la topologie induite, où n est le nombre de sommets ou de faces.

On définit les espaces dans lesquels on va travailler :

DÉFINITION 3.6. — On appelle $\mathcal{P}_n^{\mathrm{c}}$ l'ensemble des polyèdres compacts avec n faces numérotées, définis à une isométrie hyperbolique près. On note $\mathcal{P}_n^{\mathrm{si}}$ l'ensemble des polyèdres semi-idéaux et $\mathcal{P}_n^{\mathrm{i}}$ l'ensemble des polyèdres idéaux.

On énonce alors :

PROPOSITION 3.7. — *$\mathcal{P}_n^{\mathrm{c}}$ est une variété différentielle de dimension $3n-6$. Les espaces $\mathcal{P}_n^{\mathrm{si}}$ et $\mathcal{P}_n^{\mathrm{i}}$ sont inclus dans l'adhérence de $\mathcal{P}_n^{\mathrm{c}}$.*

Démonstration. — La condition de compacité et la condition d'existence de n faces sur l'intersection des n demi-espaces est une condition ouverte sur l'espace des n plans orientés numérotés formant les faces du polyèdre : l'espace des polyèdres compacts à n faces numérotées est donc un ouvert de $\mathbb{R}^{3n}$. Les isométries hyperboliques forment un groupe de Lie de dimension 6 qui agit librement et proprement sur cet ouvert. Le quotient est donc bien une variété différentielle ayant la dimension souhaitée.

On peut considérer les polyèdres semi-idéaux comme limite, dans le modèle projectif, de polyèdres compacts de même combinatoire et dont les sommet tendent vers la frontière de $\mathbb{H}^3$. □

On définit maintenant les espaces métriques qui vont caractériser les polyèdres compacts et semi-idéaux.

Définition 3.8. — On note $\mathcal{S}_n$ l'espace des espaces métriques h qui sont homéomorphes à la sphère $\mathbb{S}^2$ de courbure constante 1, partout à l'exception d'un nombre fini de points où ils présentent une singularité conique. Les singularités sont numérotées et les espaces métriques sont définis aux isométries préservant les singularités près.

Remarque. — Si P est un polyèdre hyperbolique compact, P^* vu comme un espace muni de la métrique induite est un élément de $\mathcal{S}_n$.

Définition 3.9. — On note $\mathcal{M}_n$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ des métriques telles que :

• la courbure aux points singuliers est strictement négative ;

• toute géodésique fermée a une longueur strictement supérieure à 2π. Ces métriques seront dites *admissibles*.

On note $\mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$ des métriques telles que :

• la courbure aux points singuliers est strictement négative ;

• toute géodésique fermée a une longueur supérieure ou égale à 2π ;

• le nombre de géodésiques fermées de longueur 2π est fini et chacune d'elles sépare l'espace en deux composantes connexes dont l'une au moins est isométrique à un hémisphère.

Ces métriques seront dites *admissibles de volume fini*.

Si h_1 et h_2 sont deux éléments de $\mathcal{M}_n$, on considère les homéomorphismes $h_1 \leftrightarrow h_2$ envoyant la i-ème singularité de h_1 sur la i-ème singularité de h_2. Il existe une isométrie parmi ces homéomorphismes si et seulement si $h_1 = h_2$. Sinon, on peut considérer la borne inférieure des taux d'écart à une isométrie de ces homéomorphismes. Ceci définit une métrique dite de Lipschitz sur $\mathcal{S}_n$ (*cf.* [8, section 6]).

Nous énonçons sans démonstration (*cf.* [8] et [7]) :

Proposition 3.10. — *$\mathcal{M}_n$ est une variété topologique de dimension $3n-6$ et $\mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$ est contenu dans l'adhérence de $\mathcal{M}_n$.*

On associe à tout polyèdre compact de $\mathcal{P}_n$ son dual P^* muni de sa métrique induite. En tant qu'objet intrinsèque, c'est un élément de $\mathcal{S}_n$. On note Φ l'application ainsi définie. On est en mesure de citer le résultat de [8] et [7] :

THÉORÈME 3.11 (Rivin)

1) *L'application* Φ *est un homéomorphisme de* $\mathcal{P}_n$ *sur* $\mathcal{M}_n$.

2) *Le prolongement par continuité* $\widetilde{\Phi} : \mathcal{P}_n^{\mathrm{si}} \to \mathcal{S}_n$ *de* Φ *a exactement pour image* $\mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$.

Autrement dit :

1) *Les polyèdres compacts sont en bijection avec les métriques duales admissibles* (*existence et unicité*).

2) *les polyèdres semi-idéaux ont exactement pour métriques duales les métriques admissibles de volume fini* (*existence*).

On démontre dans la section 3.4 l'unicité du second énoncé du théorème de Rivin. Ce résultat manquait dans [7]. On en déduit dans la section 4 une caractérisation des polyèdres hyperidéaux par leurs angles dièdres.

3.4. Unicité des polyèdres semi-idéaux de métrique duale donnée

On rappelle la version infinitésimale de la rigidité des polyèdres euclidiens due à Aleksandrov [1] :

THÉORÈME 3.12 (rigidité des polyèdres euclidiens). — *Toute déformation isométrique d'un polyèdre euclidien a pour origine une isométrie infinitésimale.*

REMARQUE. — Contrairement à la version du théorème de rigidité citée dans l'introduction, la combinatoire n'est pas fixée. La démonstration utilise un argument *abstrait* pour montrer que la combinatoire est rigidifiée quand la métrique induite est fixe. Ce point est important, car c'est le point clef qui empêche de déduire la rigidité en fonction des angles dièdres.

Afin de démontrer la rigidité des polyèdres semi-idéaux, on va montrer que $\widetilde{\phi}$ est localement injective, puis que c'est un homéomorphisme local, et enfin un homéomorphisme global. On est en mesure désormais d'énoncer le résultat :

PROPOSITION 3.13. — *L'application* $\widetilde{\phi} : \mathcal{P}_n^{\mathrm{si}} \to \mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$ *est localement injective. Autrement dit, on a la rigidité locale des polyèdres semi-idéaux pour leur métriques duale.*

On a besoin du lemme suivant :

LEMME 3.14. — *Soit* P *un polyèdre semi-idéal convexe. Dans le modèle de Minkowski* (*cf.* 2.1), *il existe un vecteur normal de type espace, définissant un demi-espace ouvert de* $\mathbb{R}^4_1$ *qui contient* P^*.

Démonstration. — Soit p un point d'une face F ouverte de P ; on lui associe sa droite D de $\mathbb{R}^4_1$, que l'on peut orienter par convexité. Je dis que le demi-espace ouvert défini par $\perp D$ contient tout entier P^* sauf le sommet F^* qui appartient à sa frontière. En effet par convexité, P^* est contenu dans le demi-espace fermé.

Ensuite, le point p étant dans l'intérieur de F, $\perp D$ ne peut couper les arêtes et les faces adjacentes à F^* qu'au niveau du sommet F^*.

Enfin, comme F^* est distinct de l'origine de $\mathbb{R}^4_1$, on peut perturber l'hyperplan $\perp D$ pour obtenir le résultat souhaité. □

Démonstration de 3.13. — On va montrer que toute suite de polyèdres de $\mathcal{P}_n^{\mathrm{si}}$ convergeant vers P et de même métrique duale h est stationnaire, ce qui implique l'injectivité locale. Pour cela, on raisonne par l'absurde en supposant l'existence d'une suite (P_k) de polyèdres de $\mathcal{P}_n^{\mathrm{si}}$ convergeant vers P, tous les éléments étant distincts de P. La dualité commutant aux isométries, on obtient une suite P_k^* de polyèdres (toujours définis à isométrie près) convergeant vers P^*, tous les éléments étant distincts de P^*. On peut voir cette suite d'éléments comme une suite de la variété différentielle de dimension $3n-6$ constituée de l'ensemble de n plans hyperboliques quotientés par le groupe des isométries de $\mathbb{H}^3$. Un voisinage de P dans cet espace est difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^{3n-6}$. Par compacité de la sphère unité de $\mathbb{R}^{3n-6}$, on peut extraire une sous-suite $P^*_{s(k)}$ différentiable de polyèdres, c'est-à-dire convergeant dans une direction donnée (les polyèdres étant vus dans une carte comme vecteurs de $\mathbb{R}^{3n-6}$, la suite $(P_{s(k)} - P)/\|P_{s(k)} - P\|$ converge vers un champ de vecteur X non nul sur P). La suite des P_k^* ayant engendré la déformation étant isométriques, le champ X est continu sur P^* et est dérivable au sens de Lie de dérivée de Lie nulle. On peut donc obtenir une « déformation infinitésimale isométrique X de P^* non nulle au premier ordre ».

Maintenant, d'après 3.14, on peut prendre un représentant P'^* de P^* est dans Ω_0, le demi-espace de Sitter situé au dessus d'un certain hyperplan H de type espace. On choisit un champ de déformation isométrique (de dérivée de Lie nulle) Y de P'^*, qui se réalise à isométrie près comme la déformation infinitésimale X de P^*. Mais X est non nul, ce qui empêche Y d'être la restriction d'une isométrie infinitésimale. On applique à P'^* l'application de Pogorelov infinitésimale centrée sur la normale à l'hyperplan H. Le caractère polyédral et convexe étant un invariant projectif, on obtient d'après le théorème 2.5 un polyèdre euclidien convexe muni d'une déformation infinitésimale isométrique non nulle qui n'est pas la restriction d'une isométrie infinitésimale. Ceci contredit le théorème de Cauchy, ce qui est absurde. □

Nous obtenons maintenant :

PROPOSITION 3.15. — *$\widetilde{\phi} : \mathcal{P}_n^{\mathrm{si}} \to \mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$ est un homéomorphisme local.*

Démonstration. — L'espace topologique $\mathcal{P}_n^{\mathrm{si}}$ est localement compact car c'est un sous-ensemble d'une variété topologique défini par un nombre fini de conditions ouvertes et fermées. Or toute application localement injective continue définie sur un espace localement compact est un homéomorphisme local. □

Théorème 3.16. — *$\widetilde{\phi} : \mathcal{P}_n^{\mathrm{si}} \to \mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$ est un homéomorphisme global. On a donc une relation bi-univoque entre les polyèdres semi-idéaux et les métriques duales admissibles de volume fini.*

Démonstration. — Il ne reste plus qu'à montrer l'injectivité de $\widetilde{\phi}$ dans le cas où il y a au moins un sommet idéal. Un simple argument topologique va nous permettre de conclure.

Raisonnons par l'absurde et supposons que $h \in \mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$ (strictement semi-idéal) possède deux antécédents distincts P_1 et P_2. Par séparation, il existe deux voisinages V_1 de P_1 et V_2 de P_2 dans $\mathcal{P}_n^{\mathrm{si}}$ disjoints. Puisque $\widetilde{\phi}$ est un homéomorphisme local, il existe un voisinage V de h dans $\mathcal{M}_n^{\mathrm{si}}$ et deux voisinages $W_1 \subset V_1$ de P_1 et $W_2 \subset V_2$ de P_2 dans $\mathcal{P}_n^{\mathrm{si}}$ tels que $\widetilde{\phi}$ est un homéomorphisme entre W_1 et V et entre W_2 et V. Comme P_1 et P_2 appartiennent à l'adhérence de $\mathcal{P}_n^{\mathrm{c}}$ et que V est ouvert, $\widetilde{\phi}$ ne peut pas être injective sur $\mathcal{P}_n^{\mathrm{c}}$, ce qui est absurde. □

4. Une caractérisation des polyèdres hyperboliques hyperidéaux

Cette section est consacrée à la démonstration du résultat de [4] comme corollaire de la caractérisation des polyèdres semi-idéaux.

4.1. Énoncé et définitions. — Pour définir les polyèdres hyperidéaux, on va considérer le modèle projectif de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^3$. Dans ce modèle, $\mathbb{H}^3$ est représenté par le sous-ensemble $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{RP}^3$ constitué des droites vectorielles de $\mathbb{R}_1^4$ de type temps.

On définit les polyèdres de $\mathbb{RP}^3$:

Définition 4.1 (polyèdres projectifs). — On dit que P est un *polyèdre projectif* s'il existe une représentation affine $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{RP}^3$ de l'espace projectif où P est un polyèdre compact.

Remarque. — Il existe des représentations affines de l'espace projectif où P est partiellement à l'infini.

Définition 4.2. — On appelle *polyèdre hyperidéal* de $\mathbb{H}^3$ la donnée de n plans hyperboliques orientés formant un polyèdre projectif comme plans de $\mathbb{RP}^3$ et dont les arêtes intersectent $\mathbb{H}^3 \subset \mathbb{RP}^3$ mais pas les sommets. Si aucun des sommets n'appartient à la sphère à l'infini de $\mathbb{H}^3$, le polyèdre est dit *hyperidéal strict*; si au contraire tous ses sommets s'y trouvent, il est dit *idéal*.

On note $\widetilde{\Theta}$ l'application différentiable qui à n plans orientés hyperboliques associe leurs angles dièdres. Elle est invariante par isométrie hyperbolique.

Définition 4.3. — On note $\Theta : \mathcal{P}_\Gamma \to]0, \pi[^E$ l'application qui à tout polyèdre hyperidéal de combinatoire Γ associe la donnée de ses E angles dièdres.

Nous sommes en mesure maintenant d'énoncer le résultat à démontrer. C'est le résultat principal de la prépublication de Bao et Bonahon [4], où une preuve directe est proposée.

Définition 4.4. — On note K_Γ le sous-ensemble de $]0,\pi[^E$ défini de la manière suivante : à chaque arête e_i de Γ^* on associe un poids θ_{e_i} (représentant l'angle dièdre extérieur, *i.e.* si l'angle dièdre vaut $\alpha_e \in\ ]0,\pi[$, l'angle dièdre extérieur vaut $\theta_e = \pi - \alpha_e \in\ ]0,\pi[$) et vérifiant les conditions suivantes :

• $\theta_{e_i} \in\ ]0,\pi[$;

• (C1) on a $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} \geq 2\pi$ pour toute courbe fermée γ plongée dans le graphe Γ^* et passant par $e_1,\dots,e_n$; l'égalité ayant lieu très exactement quand γ est le bord d'une face du graphe dual Γ^* correspondant à un sommet idéal ;

• (C2) on a $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} > \pi$ pour tout chemin γ plongé dans Γ^* et joignant deux sommets de Γ^* ayant une même face adjacente, mais tel que γ ne soit pas tout entier contenu dans le bord de cette face.

Théorème 4.5 (caractérisation des polyèdres hyperidéaux)
L'application Θ est un homéomorphisme de $\mathcal{P}_\Gamma$ vers K_Γ.

4.2. L'application troncature. — On va définir un plongement différentiable de $\mathcal{P}_\Gamma$ vers les polyèdres semi-idéaux, qui va nous permettre de déduire le théorème 4.5 du théorème 3.16.

On reprend le modèle habituel où $\mathbb{RP}^3$ est l'ensemble des droites vectorielles de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^4_1$. À tout point de $\mathbb{RP}^3$ hors de $\mathbb{H}^3$, *i.e.* à toute droite vectorielle de type espace, on associe l'hyperplan orthogonal qui s'identifie à un plan hyperbolique noté $\perp x$. Dans une représentation affine de l'espace projectif, on obtient $\perp x$ en considérant les droites affines passant par x et tangentes à la sphère à l'infini de $\mathbb{H}^3$; elles dessinent le bord à l'infini de $\perp x$.

On peut caractériser $\perp x$ comme étant l'unique plan hyperbolique perpendiculaire à toutes les droites hyperboliques passant par x. En effet, si d est une droite hyperbolique passant par x dans l'espace projectif, cela signifie très exactement qu'en tant que plan vectoriel, elle contient la droite vectorielle x. Or x est l'orthogonal de $\perp x$. Le plan vectoriel d et l'hyperplan $\perp x$ sont donc perpendiculaires dans l'espace de Minkowski, ce qui est équivalent à leur perpendicularité comme objets hyperboliques. En effet, $\mathbb{H}^3$ étant une surface de niveau du produit scalaire dans l'espace de Minkowski, deux droites hyperboliques s'intersectant en un point sont orthogonales si et seulement si les plans correspondant dans $\mathbb{R}^3_1$ sont perpendiculaires.

On peut maintenant considérer un polyèdre hyperidéal P. On associe à chacun de ses sommets hyperidéaux x le demi-espace hyperbolique H_x de frontière $\perp x$ et orienté de sorte que x ne soit pas dans le demi-espace affine associé. On énonce la propriété :

PROPOSITION-DÉFINITION 4.6. — *Soit P un polyèdre hyperidéal ayant n faces et $\{x_i\}_{i\in[1,k]}$ pour sommets hyperidéaux. On tronque P en prenant l'intersection avec les H_{x_i}. Ce geste fournit un plongement*

$$\mathrm{trun} : \mathcal{P}^h_n \longrightarrow \mathcal{P}^{\mathrm{si}}_{n+k}$$

dans l'espace des polyèdres compacts ayant $n+k$ faces. Tous les plans hyperboliques $\perp x_i$ sont deux à deux disjoints, ce qui détermine la combinatoire de $\mathrm{trun}(P)$. *Enfin, chaque $\perp x_i$ est caractérisé comme étant l'unique plan hyperbolique perpendiculaire à toutes les arêtes adjacentes à x_i.*

On a besoin du lemme suivant :

LEMME 4.7. — *Soient x et x' deux sommets hyperidéaux du polyèdre P. La droite projective passant par ces deux points coupe $\mathbb{H}^3$.*

Démonstration. — On considère une représentation affine du modèle projectif où P est compacte et la projection radiale $\phi : \mathbb{R}^3 - \{v\} \to \mathbb{S}^2$ sur une sphère de centre x. L'image par ϕ de l'espace hyperbolique est un disque sphérique ouvert. Par convexité l'image par ϕ du polyèdre est contenu dans ce disque. La droite (xx') coupe donc ce disque et par conséquent $\mathbb{H}^3$. ☐

Démonstration de 4.6. — Montrons tout d'abord que les $\perp x_i$ sont deux à deux disjoints. Soient x et x' deux sommets hyperidéaux. L'intersection des plans hyperboliques $\perp x$ et $\perp x'$ est un plan vectoriel, noté Π, de l'espace de Minkowski. L'orthogonal de Π est très exactement dans le modèle projectif, la droite passant par x et x'. D'après le lemme 4.7, c'est un plan vectoriel de l'espace de Minkowski de signature $(+,-)$. Donc Π est de type espace et ne coupe pas l'espace hyperbolique. CQFD.

$\perp x$ est l'unique perpendiculaire commune aux arêtes adjacentes : l'unicité découle du fait qu'il y a au moins deux arêtes.

Il reste à montrer que trun est un plongement. Pour cela, on peut maintenant facilement caractériser l'image : n étant fixé, c'est l'ensemble des polyèdres compacts à $n+k$ faces vérifiant la condition : « Il existe k faces non adjacentes contenant tous les sommets non idéaux, et auxquelles les arêtes adjacentes sont perpendiculaires. » On reconstitue alors de manière différentiable le polyèdre initial en prolongeant les arêtes de chaque face qui se coupent dans l'espace projectif au point orthogonal de la face. ☐

4.3. Caractérisation des polyèdres hyperidéaux en terme de leur « métrique duale ». — Dans toute la suite, on se donne une combinatoire de polyèdre Γ avec F faces numérotées, A arêtes numérotées et S sommets numérotés. Les sommets hyperidéaux h seront distingués des sommets idéaux par respectivement les index h et i ; ainsi S_h et S_i sont respectivement le nombre de sommets hyperidéaux et idéaux. On considère l'ensemble des polyèdres hyperidéaux $\mathcal{P}^h_\Gamma$ de combinatoire Γ fixée. On a un homéomorphisme par composition des applications troncature et $\widetilde{\phi}$, qui à un polyèdre semi-idéal associe sa métrique duale :

$$\operatorname{trun}\circ\widetilde{\phi} : \mathcal{P}_\Gamma^h \longrightarrow \mathcal{M}_{S_h+F}^{\mathrm{si}}.$$

On note $\mathcal{M}_\Gamma^h = \operatorname{trun}\circ\widetilde{\phi}(\mathcal{P}_\Gamma^h)$ l'image de l'application. Le but de cette sous-section est de caractériser cet ensemble.

Définition 4.8 (néga et posi-hémisphère). — On appelle *néga-hémisphère* (resp. *posi-hémisphère*) la variété à bord, riemannienne de courbure constante $+1$, avec une singularité conique de courbure négative (resp. positive), homéomorphe à un disque fermé, et tel que le bord soit exactement l'ensemble des points situés à distance $\frac{1}{2}\pi$ de la singularité.

Voici quelques propriétés de ces variétés :

Proposition 4.9. — *Les néga et posi-hémisphère sont déterminés uniquement par la valeur de leur singularité, qui va de* 0 *à l'infini. On obtient le néga ou posi-hémisphère de singularité conique* α *de la manière suivante :*

- *On prend* n *triangles sphériques doublement rectangles d'angle au sommet* α_i*. Il a donc deux côtés de longueur* $\frac{1}{2}\pi$ *et un côté de longueur* α_i*. On demande que la somme des* α_i *vaille* α*.*
- *On identifie isométriquement les côtés de longueur* $\frac{1}{2}\pi$*des triangles* i *et* $i+1$ (*modulo* n)*.*

La longueur du bord vaut α*.*

Proposition 4.10. — *Toute géodésique complète d'un néga ou posi-hémisphère est un segment immergé de longueur* π *dont les extrémités sont dans le bord de la variété. Ces géodésiques ne se recoupent jamais si la variété est un néga-hémisphère.*

Démonstration. — Les étapes sont les suivantes.

Caractérisation par la valeur de la singularité. — L'« espace tangent » au niveau de la singularité est un cône circulaire d'angle α. On peut définir l'équivalent d'une application exponentielle bijective en prenant les vecteurs du cône de norme inférieure ou égale à $\frac{1}{2}\pi$. Ce geste permet de construire par composition une isométrie entre posi ou néga-hémisphères de même singularité.

La construction par des triangles vérifie bien la définition d'un posi ou néga-hémisphère.

Longueur des géodésiques. — Les géodésiques passant par une singularité sont toujours l'union de deux arcs de longueur $\frac{1}{2}\pi$ joignant la singularité et le bord. Dans le cas où la géodésique ne passe pas par la singularité, on va montrer que sa longueur est π d'abord pour les néga-hémisphères. Soit une telle géodésique. Découpons le néga-hémisphère en enlevant un triangle bi-rectangle de sommet principal le pôle et de côté opposé situé sur le bord, de telle sorte à obtenir un hémisphère simple. On s'arrange pour conserver un morceau de géodésique non inclus dans le bord. Ce dernier appartient sur l'hémisphère simple à un grand cercle qui n'est pas l'équateur. La géodésique initiale est donc le prolongement de ce morceau, *i.e.* un segment immergé de longueur π, dont les extrémité sont sur le bord. Pour le posi-hémisphère, on le découpe du bord à la singularité puis on le recolle isométriquement suffisamment de fois avec lui-même afin d'obtenir un néga-hémisphère. On applique alors le résultat précédent, et on en déduit que la géodésique est un segment immergé de longueur π qui « s'enroule » autour du posi-hémisphère. □

On va maintenant pouvoir caractériser $\mathcal{M}_\Gamma$. Pour cela on va définir un certain ensemble d'espaces métriques :

DÉFINITION 4.11. — On se donne la combinatoire Γ d'un polyèdre hyperidéal. On associe à chaque arête un poids θ_{e_i} correspondant à l'angle dièdre extérieur, de telle sorte que la somme autour d'un sommet hyperidéal soit supérieure à 2π et la somme autour d'un sommet idéal soit égale à 2π. On construit un espace métrique de la manière suivante :

• On prend autant de néga-hémisphères que de sommets hyperidéaux, la valeur de la singularité valant la somme des angles dièdres extérieurs autour du sommet. On prend autant d'hémisphères droits que de sommets idéaux.

• On place sur le bord de chaque (néga) hémisphère, dans l'ordre, autant de singularités qu'il y a de faces adjacentes au sommet en question dans Γ. La distance entre chaque singularité valant l'angle dièdre extérieur correspondant.

• On identifie isométriquement les segments ainsi construits ayant la même arête pour origine dans Γ.

On demande que toutes les géodésiques fermées de cet espace soient strictement supérieures à 2π, sauf uniquement s'il s'agit du bord d'une hémisphère simple.

Les singularités situées sur le bord des hémisphères sont des singularités de courbure strictement négative multiples de π.

L'ensemble des métriques avec S_h+F singularités numérotées ainsi obtenues est un sous-ensemble de $\mathcal{M}^{\mathrm{si}}_{S_h+F}$ qui est noté $\mathcal{Q}_\Gamma$. Les S_h premières singularités, pôles des néga-hémisphères, sont dites de *type h*, les F dernières sont dites de *type f*.

REMARQUE. — La notation (néga) hémisphère signifie qu'il peut éventuellement s'agir d'un hémisphère simple.

On énonce maintenant la caractérisation attendue :

THÉORÈME 4.12. — *On a l'égalité $\mathcal{Q}_\Gamma = \mathcal{M}_\Gamma$. Un espace métrique h de cet ensemble avec ses S_h+F singularités numérotées étant donné, on sait retrouver* *directement les géodésiques de h formant la combinatoire duale du polyèdre tronqué, image de h par $\widetilde{\phi}^{-1}$.*

Démonstration. — Montrons tout d'abord l'inclusion $\mathcal{M}_\Gamma \subset \mathcal{Q}_\Gamma$. Soit P un polyèdre hyperidéal tronqué. Les « faces » du polyèdre dual correspondant aux sommets idéaux sont isométriques à des hémisphères simples. Considérons maintenant les sommets d'une même face tronquée. Par perpendicularité de cette face par rapport aux faces adjacentes, les faces du polyèdre dual correspondant aux sommets sont des triangles sphériques bi-rectangles, collés les uns aux autres pour former un néga-hémisphère de singularité conique de valeur l'aire de la face tronquée plus 2π. On obtient ainsi toutes les faces du polyèdre dual agencées selon la combinatoire duale Γ^*. Il reste à montrer que les longueurs des géodésiques fermées sont strictement supérieures à 2π, sauf uniquement si elles s'identifient au bord d'un hémisphère simple. C'est une conséquence directe du théorème 3.16.

Soit $h \in \mathcal{M}_\Gamma$. On note Λ l'ensemble des géodésiques formant la combinatoire du polyèdre original. Montrons que l'on peut récupérer directement cette combinatoire par le processus suivant :

(*) Considérer une singularité de type f située au point A et sa singularité la plus proche située au point B. Par construction de $\mathcal{M}_\Gamma$, il existe une géodésique joignant A et B, incluse dans Λ et strictement plus petite que π. Choisissons une géodésique γ joignant A à B, et de longueur inférieure à π. Comme h est constitué de recollement de (néga) hémisphères, d'après la proposition 4.10, cette géodésique appartient à Λ. Ensuite, au niveau de la singularité B, on trace toutes les géodésiques partant de B et formant un angle multiple de π avec la géodésique AB. Elles sont dans Λ. On réitère ce procédé et par connexité de Γ^*, au bout d'un nombre fini d'étapes, on peut lire sur h toute la combinatoire Λ.

Montrons l'inclusion $\mathcal{Q}_\Gamma \subset \mathcal{M}_\Gamma$. Soit $g \in \mathcal{Q}_\Gamma$. D'après le théorème 3.16, résultat principal de la section précédente, il existe un unique polyèdre semi-idéal P ayant g pour métrique duale.

Regardons sur g la combinatoire Σ^* induite par P. On cherche à montrer que cette combinatoire est la même que la combinatoire Γ^* obtenue sur g par le processus (*) (processus qui aboutit par construction de g).

Rappelons que les arêtes de Σ^* sur g correspondent à des angles dièdres et sont donc strictement inférieures à π. Soit a une arête de Σ^* non incluse dans Γ^*. Si a joint deux singularités de type h, elle traverse deux hémisphères et est supérieure ou égale à π. Si elle joint deux singularités de type f, elle fait un séjour dans un (néga) hémisphère et est supérieure ou égale à π (par propriété des géodésiques des (néga) hémisphères). Si a joint deux singularités de type différents, elle passe par deux hémisphères différents et pour la même raison est supérieure ou égale à π. Donc $\Sigma^* \subset \Gamma^*$. Supposons que l'inclusion soit stricte, on pourrait alors trouver deux arêtes de Σ^*, adjacentes et bordant une même face avec un angle supérieur à π. Ceci est interdit par convexité du polyèdre P. Donc $\Sigma^* = \Gamma^*$. CQFD.

Le polyèdre P possède donc la combinatoire souhaitée, les sommets correspondant aux hémisphères droits de g sont idéaux, et les faces correspondant aux singularités de type h sont perpendiculaires à leur faces adjacentes. On peut donc appliquer trun^{-1} et conclure. □

4.4. Caractérisation des polyèdres hyperidéaux en terme de leurs angles dièdres. — Le but de cette section est de remarquer que l'espace des métriques duales des polyèdres hyperidéaux est suffisamment dégénéré pour être décrit en terme de graphe muni de poids correspondants aux angles dièdres.

Lemme 4.13. — *Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble de $\mathcal{S}_n$, espaces des métriques sphériques avec n singularités numérotées. On demande que les éléments de $\mathcal{S}_n$ admettent tous une même triangulation par E géodésiques de longueurs strictement inférieures à π. L'application $\psi : \mathcal{S} \to]0,\pi[^E$, qui à un espace métrique associe la longueur des géodésiques de sa triangulation, est un plongement.*

Démonstration. — ψ^{-1} est la restriction de l'application continue et injective qui à un E-uplet de $]0,\pi[^E$ associe l'espace obtenu en recollant les triangles sphériques déterminés uniquement par la longueur de leurs côtés. □

Soit $h \in \mathcal{Q}_\Gamma$; on a vu que l'on pouvait retrouver la combinatoire Γ^* sur h. On peut trianguler les hémisphères correspondant aux sommets idéaux. On peut donc définir un plongement $\psi : \mathcal{Q}_\Gamma \to]0,\pi[^E$. Inversement (on rappelle que K_Γ est le sous-ensemble de $]0,\pi[^E$ défini au théorème 4.5), on peut définir une application $\chi : K_\Gamma \to \mathcal{S}_{S_h+F}$ comme dans la construction de $\mathcal{Q}_\Gamma$ dans la définition 4.11 en enlevant la condition pour les géodésiques d'être de longueur strictement supérieures à 2π. Rappelons cette construction : on recolle des hémisphères et des néga-hémisphères avec les longueurs d'arêtes prescrites par K_Γ, selon la combinatoire Γ^*. Les conditions sur K_Γ assurent d'avoir des hémisphères au niveau des faces duales des sommets de type i, et des néga-hémisphères au niveau des faces duales des sommets de type h.

Sur l'ensemble où elle est définie, l'application composée $\psi \circ \chi$ est l'identité.

Théorème 4.14. — *On a $\psi(\mathcal{Q}_\Gamma) = K_\Gamma$, i.e. $\chi(K_\Gamma) = \mathcal{Q}_\Gamma$.*

Démonstration. — Montrons l'inclusion $\psi(\mathcal{Q}_\Gamma) \subset K_\Gamma$. Soit $h \in \mathcal{Q}_\Gamma$ avec les géodésiques dessinant la combinatoire. On veut donc montrer que la condition pour toutes les géodésiques fermées de h d'être strictement supérieures à 2π implique que le graphe de géodésiques de combinatoire Γ^* (les géodésiques joignant une singularité de type h aux singularités de type f ne sont pas prises en compte) vérifie les conditions de la définition de K_Γ (théorème 4.5).

Première condition. — Soit γ une courbe fermée de Γ^*. γ est une géodésique de h puisqu'à chaque singularité, γ est localement une géodésique (pas de « coin » d'angle inférieur strictement à π). La condition sur les géodésiques fermées de h entraîne que γ est de longueur strictement plus grande que 2π, sauf uniquement dans le cas où γ borde un hémisphère simple. Ceci constitue exactement la première condition.

Seconde condition. — Soit γ un chemin sur Γ^* dont les extrémités sont dans le bord d'une même (néga) hémisphère, mais non contenu tout entier dans ce bord. On cherche à minorer la longueur de γ par π ; quitte à enlever une partie de la courbe, on peut supposer que seules les extrémités de γ sont sur le bord de l'hémisphère. Maintenant on peut fermer la géodésique en une géodésique fermée en joignant les deux extrémités par un arc de géodésique appartenant au (néga) hémisphère. Cet arc sera contenu dans le bord si les extrémités sont proches, ou au contraire passera par le pôle du (néga) hémisphère si elles sont éloignées. Il est de longueur inférieure ou égale à π. La condition sur les géodésiques de h permet de minorer strictement la longueur de γ par π. CQFD.

Montrons maintenant l'inclusion $\chi(K_\Gamma) \subset \mathcal{Q}_\Gamma$. Soient donc $h \in \chi(K_\Gamma)$ et γ une géodésique fermée de h. On cherche à montrer que sa longueur est strictement supérieure à 2π, connaissant les conditions (C1) et (C2) imposées aux angles dièdres.

Ou bien γ est contenu dans Γ^*, et le résultat est immédiat, ou bien γ possède un arc de longueur π dans un (néga) hémisphère. Considérons maintenant le chemin γ' constitué de γ privé de cet arc. On remarque que γ' ne peut être contenu dans le bord du (néga) hémisphère (sinon γ ne serait pas géodésique au niveau des extrémités de γ'). Ou bien γ' est contenu dans Γ^* et le résultat s'en déduit d'après la condition (C2) de la définition 4.4 (cette condition n'est pas nécessaire si tous les (néga) hémisphères sont des hémisphères simples), ou bien γ possède deux arcs de géodésiques sur deux hémisphères différentes. Maintenant ou bien γ n'est pas la réunion de ces deux arcs et sa longueur est supérieure strictement à 2π, ou bien elle l'est effectivement. Dans ce cas, les deux (néga) hémisphères sont en contact sur une longueur supérieure à π, ce qui est impossible. □

Remarque. — La condition (C2) est inutile dans le cas idéal. La caractérisation de polyèdres idéaux en fonction de leurs angles dièdres ne fait intervenir que la condition (C1).

4.5. Conclusion. — On a donc existence et unicité des polyèdres hyperidéaux de combinatoire Γ dont les angles dièdres extérieurs vérifient les deux conditions suivante :

(C1) $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} \geq 2\pi$ pour toute courbe fermée γ plongée dans le graphe Γ^* et passant par $e_1, \ldots, e_n$; l'égalité ayant lieu quand γ est le bord d'une face du graphe dual Γ^* correspondant à un sommet idéal.

(C2) $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} > \pi$ pour tout chemin γ plongé dans Γ^* et joignant deux sommets de Γ^* ayant une même face adjacente, mais tel que γ ne soit pas tout entier contenu dans le bord de cette face.

Cette caractérisation permet d'avoir un critère pour savoir si un polyèdre de combinatoire fixée est inscriptible dans une sphère.

On a existence et unicité des polyèdres idéaux de combinatoire Γ dont les angles dièdres vérifient la condition suivante :

(CI) $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} \geq 2\pi$ pour toute courbe fermée γ plongée dans le graphe dual Γ^* et passant par $e_1, \ldots, e_n$; l'égalité ayant lieu quand γ est le bord d'une face de Γ^*.

5. Le cas fuchsien

Dans cette section, on se propose de généraliser tous les résultats précédents au cas fuchsien. Les résultats de Rivin [8] et [7] ont été généralisés au cas fuchsien par Schlenker dans [9]. Nous nous proposons d'appliquer la même démarche que dans les sections précédentes à ce cas.

5.1. Définitions. — On sait que pour tout $g \geq 2$, il existe un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ tel que $\mathbb{H}^2/\Gamma$ soit une surface compacte hyperbolique de genre $g \geq 2$. On va étendre l'action de ce groupe à $\mathbb{H}^3$ de la manière suivante : on considère un plan hyperbolique $\mathbb{H}^2 \subset \mathbb{H}^3$ et on écrit $\mathbb{H}^3$ comme l'ensemble des couples $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$ muni de la métrique $(\mathrm{d}t^2 + \mathrm{ch}^2(t) g_{\mathbb{H}^2})$. On fait alors agir $\gamma \in \Gamma$ selon la formule $\gamma(t, x) = (t, \gamma x)$.

DÉFINITION 5.1. — Le quotient $\mathbb{H}^3/\Gamma$ obtenu (qui est topologiquement le produit cartésien d'une surface compacte de genre g avec $\mathbb{R}$) est appelé *variété fuchsienne.*

DÉFINITION 5.2. — Soit S une surface fermée de genre $g \geq 2$.On note $\widetilde{S}$ son revêtement universel (le plan) et Γ sont groupe fondamental. Un polyèdre compact convexe fuchsien est la donnée d'un couple (ϕ, ρ) vérifiant les conditions suivantes :

• $\phi : \widetilde{S} \to \mathbb{H}^3$ est un plongement polyèdral convexe, i.e. la donnée d'une cellulation de $\widetilde{S}$ telle que ϕ envoie les arêtes de la cellulation sur des segments compacts de géodésiques et les faces de la cellulation sur des portions compactes de plans, formant un ensemble polyèdral convexe ;

• $\rho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(P)$ est une action de Γ sur un plan $P \equiv \mathbb{H}^2$ de $\mathbb{H}^3$, i.e. un morphisme de groupe dans l'ensemble des isométries de $\mathbb{H}^3$ laissant P invariant ;

• ϕ est Γ-équivariant, i.e.

$$\forall x \in \widetilde{S},\ \forall \gamma \in \Gamma, \quad \phi(\gamma x) = \rho(\gamma)\phi(x).$$

En quotientant ϕ par Γ, on obtient un plongement convexe polyèdral de S dans la variété fuchsienne $\mathbb{H}^3/\Gamma$.

Remarques. — Le nombre de faces et de sommets de $\phi(\widetilde{S})$ est infini.

• Dans l'espace projectif, le bord de $\phi(\widetilde{S})$ est très exactement le bord de P.

• La combinatoire Γ d'un polyèdre fuchsien et sa combinatoire duale sont des décompositions cellulaires d'une surface de genre $g \geq 2$.

Définition 5.3. — On étend la définition précédente en considérant le cas où le plongement polyèdral convexe ϕ est à valeurs dans l'espace projectif $\mathbb{RP}^3$ muni du groupe des isométries hyperboliques. Un polyèdre fuchsien est alors dit respectivement *semi-idéal, idéal, hyperidéal, strictement hyperidéal*, si dans l'espace projectif toutes les arêtes du plongement polyèdral ϕ coupent $\mathbb{H}^3$ et si respectivement, certains sommets sont sur le bord de $\mathbb{H}^3$, tous les sommets sont sur le bord de $\mathbb{H}^3$, les sommets sont soit sur le bord soit au-delà de $\mathbb{H}^3$, tous les sommets sont au-delà de $\mathbb{H}^3$.

5.2. Caractérisation des polyèdres fuchsiens semi-idéaux en fonction de leur métrique duale. — On se donne un polyèdre fuchsien (ϕ,ρ) dans $\mathbb{H}^3$. Vu dans $\mathbb{S}^3_1$, la représentation ρ, dont l'image est un sous-groupe de transformations orthogonales de $\mathbb{R}^3_1$, fixe un point (l'orthogonal du plan P). Le plongement dual ϕ^* donne un plongement polyèdral convexe de type espace, équivariant dans l'espace de Sitter, car les images de la représentation ρ, transformations orthogonales, commutent avec l'application $*$. La métrique duale du polyèdre fuchsien est la métrique induite sur l'image de ce plongement ϕ^*. Comme souligné dans [9], on a un résultat de rigidité infinitésimale en fonction de la métrique duale.

Proposition 5.4. — *Soit (ϕ,ρ) un polyèdre fuchsien de $\mathbb{H}^3$. Il n'y a pas de déformation infinitésimale non-triviale* (*i.e. pas de la forme* $\mathrm{d}(\epsilon_t\phi, \epsilon_t\rho\,\epsilon_t^{-1})/\mathrm{d}t$ *où ϵ_t est une isométrie infinitésimale de* $\mathbb{H}^3$), *qui ne déforme pas la métrique duale de l'image de ϕ au premier ordre.*

Schéma de preuve. — Comme expliqué dans le lemme 4.8 de [9], on utilise une généralisation des idées de Cauchy sur la rigidité des polyèdres aux surfaces équivariantes de genre supérieur ou égal à 2 dans l'espace de Minkowski (*cf.* [5]).

Puis on utilise la transformation de Pogorelov dans l'espace de Sitter, qui fonctionne à condition que ρ laisse invariant un point (*cf.* [6]). □

Fixons maintenant le nombre n de faces du polyèdre et le genre g de la surface S considérée.

DÉFINITION 5.5. — On appelle $\mathcal{P}_f^{\mathrm{c}}$ l'ensemble des polyèdres fuchsiens de genre g, avec n faces, définis à isométrie près (*i.e.* quotienté par la relation d'équivalence $(u\phi, u\rho u^{-1}) = (\phi, \rho)$ où u est une isométrie directe laissant le plan P invariant).

On note $\mathcal{P}_f^{\mathrm{si}}$ l'ensemble des polyèdres fuchsiens semi-idéaux (le plongement polyèdral ϕ présente des sommets à l'infini) et $\mathcal{P}_f^{h}$ l'ensemble des polyèdres fuchsiens hyperidéaux (le plongement polyèdral ϕ présente des sommets hyperidéaux).

On définit les espaces de métriques de manière analogue au cas de genre 0.

DÉFINITION 5.6. — On note $\mathcal{M}_f^{\mathrm{c}}$ l'ensemble des espaces métriques h, définis à isométrie près, tel que h soit homéomorphe à la surface S de genre 2, de courbure constante 1, partout à l'exception d'un nombre fini égal à n de points où il présente une singularité conique strictement supérieure à 2π. Les singularités sont numérotées. On demande que les géodésiques contractiles soient de longueur strictement supérieures à 2π.

DÉFINITION 5.7. — On note $\mathcal{M}_f^{\mathrm{i}}$ l'espace des espaces métriques h, définis à isométrie près, tel que h soit homéomorphe à la surface S de genre 2, de courbure constante 1 partout à l'exception d'un nombre fini égal à n de points où il présente une singularité conique d'angle strictement supérieure à 2π. Les singularités sont numérotées. On demande que les géodésiques contractiles soient de longueur strictement supérieure à 2π, sauf un nombre fini qui s'identifient alors chacune au bord d'un hémisphère.

On énonce le théorème démontré dans la section 4 de [9] :

THÉORÈME 5.8 (Schlenker). — *On a les deux propriétés suivantes :*

1) *L'application ϕ qui à un polyèdre fuchsien associe sa métrique duale est un homéomorphisme de $\mathcal{P}_f^{\mathrm{c}}$ sur $\mathcal{M}_f^{\mathrm{c}}$.*

2) *Le prolongement par continuité de ϕ à $\widetilde{\phi} : \mathcal{P}_f^{\mathrm{si}} \to \mathcal{S}_f$ a exactement pour image $\mathcal{M}_f^{\mathrm{si}}$.*

On est en mesure de récolter l'injectivité $\widetilde{\phi}$, en utilisant de manière analogue à la démonstration de la proposition 3.13, la rigidité infinitésimale. Ce point est absent de [9].

THÉORÈME 5.9. — *L'application $\widetilde{\phi} : \mathcal{P}_f^{\mathrm{si}} \to \mathcal{M}_f^{\mathrm{si}}$ est localement injective.*

Démonstration. — On suppose par l'absurde que l'application n'est pas localement injective en un polyèdre fuchsien semi-idéal P. De la même manière que dans la démonstration de 3.13, on peut extraire une suite différentiable de polyèdres semi-idéaux non nulle au premier ordre, mais dont la métrique duale est constante. Ceci est interdit par la proposition 5.4. □

On obtient de manière analogue au théorème 3.16 :

THÉORÈME 5.10. — *L'application $\widetilde{\phi} : \mathcal{P}_f^{\mathrm{si}} \to \mathcal{M}_f^{\mathrm{si}}$ est un homéomorphisme global. On a donc une relation bi-univoque entre les polyèdres fuchsiens semi-idéaux et leur métrique duale ie $\mathcal{M}_f^{\mathrm{si}}$.*

Démonstration. — Elle est la même que dans le cas non-fuchsien (reprendre le théorème 3.16). En effet, l'espace des polyèdres fuchsiens semi-idéal est localement compact. (L'espace des polyèdres fuchsiens (ϕ, ρ) à n faces dont les sommets sont indifféremment compacts, idéaux, ou hyperidéaux, et défini à isométrie laissant P invariant près, est localement compact. Les conditions de semi-idéalité sont une intersection finies d'ouverts et de fermés dans cet espace.) $\widetilde{\phi}$ qui est localement injective, est donc un homéomorphisme local. L'argument topologique nécessaire pour conclure fonctionne car la situation est identique au cas non fuchsien :

- $\mathcal{P}_f^{\mathrm{si}}$ est dans l'adhérence de $\mathcal{P}_f^{\mathrm{c}}$ et $\mathcal{M}_f^{\mathrm{si}}$ est dans l'adhérence de $\mathcal{M}_f^{\mathrm{c}}$;
- $\mathcal{P}_f^{\mathrm{c}}$ est homéomorphe à $\mathcal{M}_f^{\mathrm{c}}$;
- $\mathcal{P}_f^{\mathrm{si}}$ est localement homéomorphe à $\mathcal{M}_f^{\mathrm{si}}$. □

On peut maintenant se demander si on peut généraliser la caractérisation des polyèdres hyperidéaux en fonction de leurs angles dièdres au cas fuchsien.

5.3. Caractérisation des polyèdres fuchsiens hyperidéaux en fonction de leur « métrique duale ».

— On note $\mathcal{P}_{f,\Gamma}$ l'ensemble des polyèdres fuchsiens hyperidéaux de combinatoire donnée Γ. Soit P un polyèdre fuchsien hyperidéal. Dans $\mathbb{H}^3$, on peut tronquer les sommets strictement hyperidéaux du plongement équivariant ϕ par des plans hyperboliques disjoints (*cf.* proposition-définition 4.6). L'application troncature est donc une transformation purement géométrique qui « passe au quotient ». Si l'on cherche à caractériser maintenant l'image par $\widetilde{\phi}$ de ces polyèdres tronqués, on obtient le même résultat que dans le théorème 4.12 moyennant quelques modifications. On note $\mathcal{M}_{f,\Gamma}^h$ cette image. On va définir tout d'abord l'espace de métriques candidat pour être l'image de $\widetilde{\phi}$:

DÉFINITION 5.11. — On se donne la combinatoire Γ de genre g d'un polyèdre fuchsien hyperidéal. On associe à chaque arête un poids θ_{e_i} correspondant à l'angle dièdre extérieur, de telle sorte que la somme autour d'un sommet hyperidéal soit supérieure à 2π et la somme autour d'un sommet idéal soit égale à 2π. On construit un espace métrique de la manière suivante :

• On prend autant de néga-hémisphères que de sommets hyperidéaux, la valeur de la singularité valant la somme des angles dièdres autour du sommet. On prend autant d'hémisphères droits que de sommets idéaux.

• On place sur le bord de chaque (néga) hémisphère, dans l'ordre, autant de points qu'il y a de faces adjacentes au sommet en question dans Γ. La distance entre chaque points valant l'angle dièdre correspondant.

• On identifie isométriquement les segments ainsi construits ayant la même arête pour origine dans Γ.

On demande que toutes les géodésiques contractiles fermées de cet espace soient de longueur strictement supérieures à 2π, sauf uniquement s'il s'agit du bord d'une hémisphère simple.

Les points situés sur le bord des hémisphères sont des singularités de courbure strictement négative multiples de π.

L'ensemble des métriques avec $S_h + F$ singularités numérotées ainsi obtenus, qui est un sous-ensemble de $\mathcal{M}^{\mathrm{si}}_{f,S_h+F}$, sera noté $\mathcal{Q}_{f,\Gamma}$. Les S_h premières singularités, pôles des néga-hémisphères, seront dite de *type h*, les F dernières seront dite de *type f.*

On a maintenant l'analogue du théorème 4.12 dans le cas fuchsien :

THÉORÈME 5.12. — *On a l'égalité $\mathcal{Q}_{f,\Gamma} = \mathcal{M}^h_{f,\Gamma}$. Un espace métrique h de cet ensemble avec ses $S_h + F$ singularités numérotées étant donnée, on sait retrouver directement les géodésiques de h formant la combinatoire duale du polyèdre tronqué, image de h par $\widetilde{\phi}^{-1}$.*

Démonstration. — Il faut vérifier que les étapes de la démonstration du théorème 4.12 ne sont pas affectées par le fait que l'on considère une combinatoire de genre 2. On remarque que tout le raisonnement de la démonstration du théorème 4.12 utilise seulement deux choses :

1) l'espace métrique peut se construire comme un recollement d'hémisphères ;

2) la convexité du polyèdre.

L'argument reste donc valable dans le cas fuchsien. □

5.4. Caractérisation des polyèdres fuchsiens hyperidéaux en fonction de leurs angles dièdres. — On peut maintenant caractériser les polyèdres fuchsiens en fonction de leurs angles dièdres extérieurs.

DÉFINITION 5.13. — $K_{f,\Gamma}$ est le sous-ensemble de $]0,\pi[^E$ défini de la manière suivante : à chaque arête e_i de Γ^* on associe un poids θ_{e_i} (représentant les angles dièdres extérieurs) et vérifiant les conditions suivantes :

• $\theta_{e_i} \in]0, \pi[$;

(CF1) $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} \geq 2\pi$ pour toute courbe fermée contractile γ plongée dans le graphe Γ^* et passant par $e_1, \ldots, e_n$; l'égalité ayant lieu quand γ est le bord d'une face du graphe dual Γ^* correspondant à un sommet idéal ;

(CF2) $\sum_{i=1}^{n} \theta_{e_i} > \pi$ pour tout chemin γ plongé dans Γ^* et joignant deux sommets A et B de Γ^* ayant une même face adjacente F, mais tel que γ ne soit pas tout entier contenu dans le bord de cette face. On demande que γ soit homotope au chemin bordant F et joignant A à B.

Théorème 5.14 (caractérisation des polyèdres hyperidéaux fuchsien.)
L'application Θ qui à un polyèdre fuchsien de combinatoire Γ, associe ses angles dièdres est un homéomorphisme de $\mathcal{P}_{f,\Gamma}$ vers $K_{f,\Gamma}$.

Démonstration. — Il suffit de vérifier que la condition pour les métriques duales d'avoir des géodésiques fermées contractiles de longueur strictement supérieure à 2π, sauf si elles bordent un hémisphère, est équivalente aux conditions (CF1) et (CF2) sur les angles dièdres de la définition 5.13. Cette vérification est la même que dans le cas non-fuchsien du théorème 4.5, en prenant soin de traduire le fait que l'on a affaire aux géodésiques contractiles : les chemins fermés dans le graphe de Γ^* de la condition (C1) doivent être contractiles, et les chemins de la condition (C2) doivent être contractiles une fois rajouté un segment de géodésique de l'hémisphère où aboutissent les extrémités. $\square$

6. Conclusion mathématique

Lorsqu'on cherche à caractériser les polyèdres hyperboliques par leurs angles dièdres, l'essentiel des problèmes vient du fait suivant : la connaissance de la métrique (duale ou pas), ne permet pas de reconstruire la combinatoire de l'unique polyèdre correspondant à cette métrique, et ceci dès que l'un des sommets est compact. Curieusement, on ne peut donc toujours pas par ce moyen répondre à la question de rigidité dans le cas compact général en fonction des angles dièdres, bien que l'on sache le faire en fonction de la métrique duale.

Remerciements. — Mes plus vifs remerciements vont évidemment à Jean-Marc Schlenker, non seulement pour la très grande qualité du stage, qui m'a permis de me familiariser modestement à la recherche, mais aussi pour la qualité des relations humaines. C'est de lui que proviennent beaucoup des idées qui ont donné lieu à cet article.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Aleksandrov (A.D.) – *Convex polyhedra*, GITTL, Moscow, 1951, (titre russe : *Vypuklye Mnogogranniki*).

[2] ANDREEV (E.M.) – *On convex polyhedra in Lobacevski spaces*, Math. USSR Sb., t. **10** (1970), pp. 413–440.

[3] ———, *On convex polyhedra of finite volume in Lobacevski spaces*, Math. USSR Sb., t. **12** (1970), pp. 255–259.

[4] BAO (X.) & BONAHON (F.) – *Hyperideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Bull Soc. Math. France, t. **130** (2002).

[5] ISKHAKOV (I.) – *On hyperbolic surface tessellations and equivariant spacelike convex polyhedral surfaces in Minkowski space*, Phd thesis, Ohio State University, 2000.

[6] LABOURIE (F.) & SCHLENKER (J.-M.) – *Surfaces convexes fuchsiennes dans les espaces lorentziens à courbure constante*, Math. Ann., t. **316** (2000), pp. 465–483.

[7] RIVIN (I.) – *A characterisation of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space*, Ann. of Math., t. **143** (1996), pp. 51–70.

[8] RIVIN (I.) & HODGSON (C.D.) – *A characterisation of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space*, Invent. Math., t. **111** (1993), pp. 77–111.

[9] SCHLENKER (J.-M.) – *Hyperbolic manifolds with polyhedral boundary*, Preprint math.GT/01.