

## ÉQUATION DES ONDES AMORTIES DANS UN DOMAINE EXTÉRIEUR

PAR MOEZ KHENISSI

---

RÉSUMÉ. — On étudie la position des pôles de diffusion du problème de Dirichlet pour l'équation des ondes amorties du type  $\partial_t^2 - \Delta + a(x)\partial_t$  dans un domaine extérieur. Sous la condition du « contrôle géométrique extérieur », on déduit alors le comportement des solutions en grand temps. On calcule en particulier le meilleur taux de décroissance de l'énergie locale en dimension impaire d'espace.

ABSTRACT (*Dissipative wave equation in an exterior domain*). — We study the position of diffusion poles for the Dirichlet problem for the dissipative wave equation in the exterior of an arbitrary obstacle in  $\mathbb{R}^d$ . We deduce under the “Exterior Geometric Control” condition the behavior of the solutions for large time. We give, in particular, a formula for the best rate of decay of the local energy in odd dimension spaces.

### 1. Introduction

On s'intéresse dans cet article à l'équation des ondes amorties dans un domaine extérieur avec conditions de Dirichlet. On considère un obstacle borné  $\Theta$  de  $\mathbb{R}^d$  à bord  $C^\infty$ , on note  $\Omega = \bar{\Theta}^c$  et  $a(x) \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}_+)$ . Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & -2aI \end{pmatrix}$$

---

*Texte reçu le 15 mai 2001, révisé le 2 avril et le 19 septembre 2002*

MOEZ KHENISSI, Faculté des Sciences de Gabès, Département de Mathématiques, route de Medenine, 6029 Gabès (Tunisie) • *E-mail* : [Moez.Khenissi@fsg.rnu.tn](mailto:Moez.Khenissi@fsg.rnu.tn)

Classification mathématique par sujets (2000). — 35L05, 35S15, 35A07.

Mots clefs. — Équation des ondes, stabilisation, résolvante, scattering.

l'opérateur non borné défini sur l'espace de Hilbert

$$H = \widetilde{H}_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

où  $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$  est le complété Hilbertien de  $C_0^\infty(\Omega)$  pour la norme  $\|u\|_1^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2$ . Il a pour domaine

$$D(A) = \{(u_0, u_1) \in H; \Delta u_0 \in L^2(\Omega), u_1 \in \widetilde{H}_0^1(\Omega)\}.$$

Le problème d'évolution

$$(1.1) \quad \begin{cases} (\partial_t - A)U(t) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ U|_{\partial\Omega} = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+, \\ U(0) = U_0 \in H \end{cases}$$

possède une unique solution  $U(t) = e^{tA}U_0 \in C^0(\mathbb{R}_+, H)$ , obtenue en appliquant par exemple le théorème de Hille-Yoshida. Pour  $R > 0$ ,  $U_0$  à support dans  $B(0, R)$ , on définit son énergie locale à l'instant  $t$  dans  $\Omega_R = B_R \cap \Omega$  par

$$(1.2) \quad E_R(U, t) = \int_{\Omega_R} [|\nabla u_0|^2(t) + |u_1|^2(t)] dx.$$

Elle est bornée par l'énergie initiale.

Dans le cas où  $a(x) \equiv 0$ , on sait depuis les travaux de P.D. Lax et R.S. Phillips [6] (voir aussi [7], [8]) que l'énergie locale de la solution de l'équation des ondes tend vers 0 quand le temps tend vers l'infini. Puis R. Melrose [10] (voir aussi Morawetz [11]) montre que si l'obstacle est non captif, cette convergence est exponentielle en dimension impaire d'espace et polynômiale en dimension paire par rapport à l'énergie initiale. Dans le cas captif, on sait depuis Ralston [12] qu'il n'existe pas de taux uniforme de décroissance par rapport à l'énergie initiale. Néanmoins, N. Burq [2] montre que le taux est toujours au moins logarithmique, mais par rapport à une norme plus forte que celle de l'énergie initiale ( $\|\cdot\|_{D(A^k)}$ , avec  $k > 0$ ).

Dans ce travail, on suppose que  $\omega = \{a(x) > 0\}$  vérifie le « *contrôle géométrique extérieur* » au-dessus de  $B_R$  (C.G.E.), i.e. il existe  $T > 0$  tel que tout rayon bicaractéristique généralisé  $\gamma$  issu d'un point de  $T^*(\mathbb{R}_+ \times \Omega_R)$  vérifie l'une des deux conditions suivantes :

- a)  $\gamma$  quitte  $\mathbb{R}_+ \times \Omega_R$  avant l'instant  $T$ , ou
- b)  $\gamma$  rencontre la zone  $\mathbb{R}_+ \times \omega$  entre les instants 0 et  $T$ .

Dans [1], on montre, en dimension impaire d'espace, sous l'hypothèse du « *contrôle géométrique extérieur* », qu'on a une décroissance exponentielle par rapport à l'énergie initiale, en étudiant le semi-groupe  $Z(t)$  de Lax et Phillips adapté au problème.

Dans le présent travail, on se propose d'étudier en premier lieu les pôles de diffusion de l'équation des ondes (1.1). Plus précisément, soit  $R(\lambda)$ , la résolvante

sortante du laplacien perturbé avec condition de Dirichlet, holomorphe dans  $\{\text{Im } \lambda < 0\}$ , définie de la manière suivante :

Soit  $u(t)$  le propagateur des ondes

$$(1.3) \quad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t)u(t)f = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \Omega, \\ u(t)f|_{\partial\Omega} = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \\ u(0)f = 0, \\ \partial_t u(0)f = f \in C_0^\infty \end{cases}$$

qu'on étend comme opérateur de  $L^2(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ . L'opérateur  $R(\lambda)$  est défini par la relation :

$$(1.4) \quad R(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t} u(t) dt, \quad \text{pour } \{\text{Im } \lambda < 0\}.$$

Comme l'opérateur  $u(t)$  est une contraction de  $L^2(\Omega)$  dans  $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ , il est clair que cette relation définit une famille d'opérateurs bornés de  $L^2(\Omega)$  dans  $\widetilde{H}_0^1(\Omega)$ , holomorphe dans  $\{\text{Im } \lambda < 0\}$ .

Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ,  $\chi = 1$  sur  $B_R$ . La résolvante sortante tronquée

$$R_\chi(\lambda) = \chi R(\lambda) \chi,$$

considérée comme opérateur de  $L^2(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , holomorphe dans  $\{\text{Im } \lambda < 0\}$ , s'étend en un opérateur méromorphe (perturbation compacte [8], voir aussi [16]) dans  $\mathbb{C}$  en dimension impaire et dans le revêtement simplement connexe de  $\mathbb{C}^*$  (surface de Riemann du logarithme) si la dimension est paire.

Dans la première partie, on va localiser les pôles de ce prolongement, qu'on appelle pôles de diffusion. Ces pôles sont aussi les points pour les quels il existe une solution sortante non triviale de l'équation

$$(1.5) \quad (\Delta + \lambda^2 - i2a(x)\lambda)u = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Ce sont également (en dimension impaire d'espace) les valeurs propres du générateur infinitésimal du semi-groupe  $Z(t)$  de Lax-Phillips.

Pour cela, notons  $D(0) = \inf\{\text{Im } \lambda, \lambda \text{ pôle de } R(\lambda)\}$  et

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} a(x) & \text{sur } B_R, \\ +\infty & \text{sur } B_R^c. \end{cases}$$

Pour tout  $\rho_0 = (x_0, \zeta_0) \in T^*(\Omega)$ , avec  $|\zeta_0| = 1$  (et  $\zeta_0$  appartenant au demi-espace fermé défini par  $\bar{\Omega}$  si  $x_0 \in \partial\Omega$ ) il existe une unique géodésique généralisée,  $s \mapsto x(s, \rho_0)$  de  $\bar{\Omega}$  issue de  $\rho_0$ , *i.e.* vérifiant  $x(0, \rho_0) = x_0$ ,  $\lim_{s \rightarrow 0^+} x(s, \rho_0)/s = \zeta_0$ , parcourue à vitesse 1. Pour  $t > 0$ , on pose

$$(1.6) \quad C(t) = \inf_{\rho_0} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{a}(x(s, \rho_0)) ds.$$

C'est une fonction de  $t$ , continue, positive, qui vérifie

$$tC(t) + sC(s) \leq (t + s)C(s + t).$$

On note

$$C(\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$$

(qui existe car  $tC(t)$  est sous-additive [9], et elle peut être infinie). Cette limite est indépendante de  $R$ , et on a  $C(t) \leq C(\infty)$  pour tout  $t \geq 0$ . Si  $\Omega$  est non captif,  $C(\infty) = +\infty$ , sinon  $C(t)$  est majorée par  $\|a\|_\infty$ . La limite  $C(\infty)$  ne fait intervenir que la moyenne de  $a(x)$  sur les géodésiques captées et sous l'hypothèse du C.G.E., on a  $C(\infty) > 0$ . On a le théorème de localisation suivant.

**THÉORÈME 1.0.1.** — *Pour tout  $\delta < C(\infty)$ , il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que la résolvante sortante tronquée  $R_\lambda(\lambda)$  se prolonge d'une manière holomorphe dans la région*

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Im} \lambda \leq \delta, |\operatorname{Re} \lambda| \geq \lambda_0\}.$$

*Plus précisément, il existe  $c > 0$  tel que pour toute  $f \in L^2$ ,  $\operatorname{Supp} f \subset B_R$  et pour toute  $\lambda$  appartenant à la région précédente, on a*

$$(1.7) \quad \|\nabla R(\lambda)f\|_{L^2_R}^2 + \|\lambda R(\lambda)f\|_{L^2_R}^2 \leq c \|f\|_{L^2}^2.$$

Dans la deuxième partie de ce travail, on déduit que la décroissance de l'énergie locale est exponentielle en dimension impaire et en  $1/t^d$  en dimension paire c'est-à-dire, on démontre le théorème :

**THÉORÈME 1.0.2.** — *Sous l'hypothèse du C.G.E. au-dessus de  $B_R$ , pour tout  $\delta < \alpha = 2 \min(D(0), C(\infty))$ , il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $f \in H_R$ , on a*

$$(1.8) \quad E_R(u(t)f) \leq ce^{-\delta t} E(u(0)f), \text{ si } d \text{ est impaire}$$

$$(1.9) \quad E_R(u(t)f) \leq \frac{c}{t^d} E(u(0)f), \text{ si } d \text{ est paire}$$

où  $u$  est la première composante de la solution de (1.1) pour la donnée initiale  $U_0 = f$ .

Soit  $\beta$  le meilleur taux de décroissance exponentielle en dimension impaire, défini par

$$\beta = \sup \{ \delta > 0; \exists c > 0, \forall f \in H, \operatorname{Supp} f \subset B_R, \\ E_R(U(t)f) \leq ce^{-\delta t} E(U(0)f), \forall t \geq 0 \}.$$

Dans la troisième partie, on calcule  $\beta$ , en fonction des pôles de  $R(\lambda)$  et des moyennes de  $\tilde{a}(x)$  sur les géodésiques de  $\Omega$ . Cela fait l'objet du théorème :

**THÉORÈME 1.0.3.** — *On a*

$$\beta = 2 \min(D(0), C(\infty)).$$

## 2. Localisation des pôles de la résolvante

On commence par démontrer que la résolvante sortante  $R_\chi(\lambda)$  considérée comme opérateur de  $L^2(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  est méromorphe dans  $\mathbb{C}$  en dimension impaire et dans la surface de Riemann du  $\log$  en dimension paire d'espace. Ce résultat est classique pour les opérateurs autoadjoints et il reste vrai avec une perturbation compacte [5], [15]. Dans notre cas, on adapte la démonstration de Lax et Phillips [8]. (En réalité la démonstration en dimension impaire d'espace est plus simple, en fait elle se déduit de la compacité de  $Z(2R)(\lambda - B)^{-1}$  où  $B$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe  $Z(t)$  de Lax et Phillips [6].)

On rappelle que pour toute  $f$  dans  $L^2(\Omega)$  à support dans  $B_R$ ,  $R(\lambda)f$  est l'unique solution sortante du problème nonhomogène suivant :

$$(2.1) \quad (-\Delta - \lambda^2 + i2\lambda a(x))u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0$$

que l'on peut voir comme perturbation du problème dans l'espace libre :

$$(2.2) \quad (-\Delta - \lambda^2)w = g \text{ sur } \mathbb{R}^d, \quad g \text{ dans } L^2(\Omega_R)$$

où  $w = R_0(\lambda)g$ , avec  $R_0(\lambda)$  la résolvante sortante libre.

On rappelle que

$$(2.3) \quad R_0(\lambda)g = \int \gamma_+(|x-y|, \lambda)g(y) dy$$

où

- $\gamma_+(r, \lambda) = e^{-i\lambda r} P_d(r, \lambda)$ ,  $P_d$  est un polynôme, en dimension impaire d'espace et

- $\gamma_+(r, \lambda) = -\frac{i}{4} \left(\frac{\lambda}{2\pi r}\right)^{\frac{1}{2}n-1} H^{(2)}(\lambda r)$  en dimension paire, où  $H^{(2)}$  est la fonction Hankel; on peut noter que  $\gamma_+$  est asymptotiquement [8], [2] comme

$$r^{-\frac{1}{2}(n-1)} \exp(-i\lambda r).$$

On pose

$$(2.4) \quad u = w - \beta h$$

où

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \Delta h + \xi^2 h - i\xi a(x)h &= 0 \text{ sur } \Omega_R, \\ h &= w \text{ sur } \partial\Omega, \\ h &= 0 \text{ sur } \{|x| = R\} \end{aligned}$$

et  $\beta \in C_0^\infty$  valant 1 près  $\partial\Omega$  et sur un voisinage de support de  $a(x)$  et à support dans  $B_R$ ,  $\xi$  étant choisi et fixé suivant la discussion. Ainsi  $w$  est complètement déterminé par  $g$  et  $h$  est complètement déterminé par  $w$ .

Le problème est de déterminer la fonction  $g$  pour laquelle  $u$  vérifie (2.1), ainsi

$$\begin{aligned} f &= (-\Delta - \lambda^2 + i2\lambda a(x))u \\ &= (-\Delta - \lambda^2 + i2\lambda a(x))w - (-\Delta - \lambda^2 + i2\lambda a(x))\beta h \\ &= g + i2\lambda a(x)w + (\Delta\beta)h + 2\nabla\beta\nabla h + [\lambda^2 - \xi^2 + 2ia(x)(\xi - \lambda)]\beta h \\ &= (I - T_\lambda)g \end{aligned}$$

où

$$T_\lambda g = -i2\lambda a(x)w - (\Delta\beta)h - 2\nabla\beta\nabla h - [\lambda^2 - \xi^2 + 2ia(x)(\xi - \lambda)]\beta h.$$

LEMME 2.0.1. — On a :

- $T_\lambda$  est un opérateur compact sur  $L_2(\Omega_R)$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .
- $T_\lambda$  est une fonction holomorphe en  $\lambda$  dans  $\mathbb{C}$  en dimension impaire et dans la surface de Riemann du logarithme en dimension paire.

*Preuve de a).* — Soit  $H^k(\Omega_R)$  l'espace de Sobolev des fonctions définies sur  $\Omega_R$  qui sont  $k$  fois dérivables, ayant comme norme

$$\|h\|'_k = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega_R} |\partial^\alpha h|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

À partir de (2.3) et de la théorie des intégrales oscillantes on peut voir que

$$(2.6) \quad \|\beta w\|'_2 \leq C_\lambda \|g\|'_0,$$

où  $C_\lambda$  est uniformément borné sur tout compact de la surface de Riemann du logarithme en dimension paire d'espace et de  $\mathbb{C}$  en dimension impaire d'espace.

Maintenant,  $v = h - \beta w$  satisfait l'équation

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \Delta v + \xi^2 v - i\xi a(x)v &= -\Delta(\beta w) - \xi^2 \beta w + i\xi a(x)\beta w \text{ sur } \Omega_R \\ v &= 0 \text{ sur } \partial\Omega_R. \end{aligned}$$

On déduit par un argument d'ellipticité que

$$(2.8) \quad \|v\|'_2 \leq C \|\beta w\|'_2.$$

En combinant avec (2.6), on obtient

$$(2.9) \quad \|h\|'_2 \leq CC_\lambda \|g\|'_0.$$

Comme  $T_\lambda g$  ne contient que des dérivations de premier ordre de  $h$ ,

$$(2.10) \quad \|T_\lambda g\|'_1 \leq C \|h\|'_2 \leq C'_\lambda \|g\|'_0,$$

et d'après le théorème de compacité de Rellich, on déduit que  $T_\lambda$  est un opérateur compact sur  $L_2(\Omega_R)$ .

*Preuve de b).* — Il est connu que  $R_0(\lambda)$ , considéré comme opérateur de  $L_2(\Omega_R)$  dans l'espace de Sobolev  $H^2(\Omega_R)$ , est holomorphe sur  $\mathbb{C}$  en dimension impaire d'espace et dans la surface de Riemann du logarithme en dimension paire. On peut voir à partir de la relation  $h = v + \beta w$  et (2.10) que  $T_\lambda$  est holomorphe, ainsi on achève la preuve du lemme 2.0.1.

On définit l'opérateur  $Q$  par  $Q : w \rightarrow \beta h$  et la résolvante sortante  $R(\lambda)$  par

$$u = R(\lambda)f = (I - Q)R_0(\lambda)(I - T_\lambda)^{-1}f$$

de  $L_2(\Omega_R)$  dans  $H^2(\Omega_R)$ . Toujours d'après la relation  $h = v + \beta w$  et (2.10), on voit que  $Q$  est un opérateur borné sur  $H^2(\Omega_R)$ . Le lemme 2.0.1 implique que  $(I - T_\lambda)^{-1}$  est méromorphe sur le domaine d'holomorphie de  $T_\lambda$ . Comme  $u$  est déterminé par  $R_0(\lambda)(I - T_\lambda)^{-1}$  à l'extérieur de la boule  $\{|x| < R\}$ , on peut bien prendre l'espace image de  $R(\lambda)$  dans  $H^2(\Omega_{R'})$  pour tout  $R' > R$ .

Pour conclure, l'opérateur  $R(\lambda)$  considéré comme fonction en  $\lambda$  (de  $L_2(\Omega_R)$  dans  $H^2(\Omega_{R'})$  avec  $R' > R$ ) est méromorphe sur  $\mathbb{C}$  en dimension impaire d'espace et dans la surface de Riemann du logarithme en dimension paire.  $\square$

**2.1. Études des hautes fréquences.** — Cette section est consacrée à la preuve du théorème 1.0.1.

Comme  $R_\chi(\lambda)$ , considéré comme opérateur de  $L^2(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , est méromorphe dans  $\mathbb{C}$  en dimension impaire et dans la surface de Riemann du logarithme, holomorphe sur  $\{\text{Im } \lambda < 0\}$  et que  $c, \delta$  et  $\lambda_0$  ne dépendent pas de  $\lambda$ , il suffit de montrer l'inégalité (1.7) pour  $\lambda$  non pôle de  $R(\lambda)$  et appartenant à la région  $\{\lambda \in \mathbb{C}, \text{Im } \lambda \leq \delta, |\text{Re } \lambda| \geq \lambda_0\}$ ; par suite, on déduit que  $R(\lambda)$  n'a pas des pôles dans cette région et qu'elle vérifie (1.7). De plus, comme  $R_\chi(-\bar{\lambda}) = \overline{R_\chi(\lambda)}$ , on limite notre étude à l'ensemble  $\text{Re } \lambda > 0$ . Enfin il est clair qu'il n'y a rien à démontrer lorsque  $C(\infty) = 0$  (ce cas correspond à un ouvert  $\Omega$  captif et à l'hypothèse C.G.E. non vérifiée). On s'intéresse donc aux réels  $\delta > 0$ . La preuve est basée sur un raisonnement par l'absurde.

On suppose qu'il existe  $\delta < C(\infty)$  tel que pour tout  $\lambda_0$  et pour tout  $c$  (en particulier pour  $\lambda_0 = c = n \in \mathbb{N}$ ), il existe  $f_n \in L^2$  et  $\text{Supp } f_n \subset B_R$ , tel que  $\text{Re } \lambda_n \geq n, 0 \leq \text{Im } \lambda_n \leq \delta$  vérifiant

$$(2.11) \quad \|\nabla R(\lambda_n)f_n\|_{L_R^2}^2 + \|\lambda_n R(\lambda_n)f_n\|_{L_R^2}^2 \geq n\|f_n\|_{L^2}^2.$$

On note  $u_n = R(\lambda_n)f_n$ , on normalise par  $\|\nabla u_n\|_{L_R^2}^2 + \|\lambda_n u_n\|_{L_R^2}^2 < \infty$ . La suite  $\text{Im } \lambda_n$  est bornée, elle admet une sous-suite convergente. On obtient ainsi modulo cette sous-suite

$$\begin{cases} -\Delta u_n - \lambda_n^2 u_n + 2ia(x)\lambda_n u_n = f_n & \text{dans } \Omega, \\ u_n|_{\partial\Omega} = 0, & u_n \text{ sortante} \end{cases}$$

$$(2.12) \quad \|\nabla u_n\|_{L_R^2}^2 + \|\lambda_n u_n\|_{L_R^2}^2 = 1, \quad \|f_n\|_{L_R^2} \rightarrow 0 \text{ et } \|u_n\|_{L_R^2} \rightarrow 0$$

et  $h_n = 1/(\operatorname{Re} \lambda_n) \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{Im} \lambda_n \rightarrow \delta_0 \leq \delta$ .

On examine à présent la suite  $u_n$ .

LEMME 2.1.1. — On a  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $H_{\text{loc}}^1(\Omega)$  et  $\lambda_n u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ .

*Démonstration.* — On a (2.12) implique que  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $H_R^1$  et de plus

$$(2.13) \quad \lambda_n u_n = -\frac{1}{\lambda_n} \Delta u_n + 2ia(x)u_n - \frac{1}{\lambda_n} f_n.$$

En effectuant le produit scalaire  $L^2$  avec  $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ , on voit que  $\lambda_n u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L_R^2$ .

Soit  $\chi \in C_0^\infty$  valant 1 près de  $\partial\Omega$  et sur un voisinage du support de  $a(x)$  et à support dans  $B_R$ . On pose  $w_n = (1 - \chi)u_n$ . On vérifie que

$$-(\lambda_n^2 + \Delta)w_n = [\Delta, \chi]u_n - (1 - \chi)f_n \quad \text{dans } \mathbb{R}^d,$$

donc  $w_n = R_0(\lambda_n)g_n$  où  $R_0$  est la résolvante libre du laplacien et

$$g_n = [\Delta, \chi]u_n - (1 - \chi)f_n,$$

bornée dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et à support dans  $B_R$ . On a

$$R_0(\lambda_n)g_n = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda_n t} u_0(t) g_n dt,$$

où  $u_0(t)$  est le propagateur libre. Ainsi par intégration par parties et en remarquant que l'énergie locale tend vers 0 en  $+\infty$ ,

$$\lambda_n R_0(\lambda_n)g_n = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda_n t} \partial_t u_0(t) g_n dt.$$

Comme  $\operatorname{Im} \lambda_n \leq \delta$ , pour  $\operatorname{Re} \lambda_n$  assez grand, pour  $R' > R$ , on a

$$\|\nabla w_n\|_{B_{R'}}^2 + \|\lambda_n w_n\|_{B_{R'}}^2 \leq c \|g_n\|^2.$$

On peut démontrer cette inégalité en dimension impaire d'espace d'une manière simple, en se basant sur le principe de Huyghens ( $E_{t-R}(u(t)f) = 0$  pour tout  $t \geq R$  et tout  $f \in H_R$ ) et en dimension paire sur la méthode de la phase stationnaire pour  $\operatorname{Re} \lambda_n \rightarrow +\infty$  dans l'expression intégrale (2.6) (voir [2]). On déduit que  $w_n$  est bornée dans  $H_{\text{loc}}^1(B_R^c)$  et que  $\|w_n\|_{L_{\text{loc}}^2} \rightarrow 0$ . Ainsi  $u_n \rightharpoonup 0$  dans  $H_{\text{loc}}^1$  et (2.13) implique que  $\lambda_n u_n \rightharpoonup 0$  dans  $L_{\text{loc}}^2$ .  $\square$

On pose

$$v_n(t, x) = e^{-it/h_n} u_n(x).$$

On déduit facilement du lemme 2.1.1 que  $v_n \rightharpoonup 0$  dans  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R} \times \Omega)$ . On peut ainsi lui associer une mesure de défaut microlocale  $\mu$  dans  $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R} \times \Omega)$  (voir [9], nous renvoyons le lecteur aux articles originaux [4], [13] de P. Gérard



et L. Tartar pour une exposition de la théorie des  $H$ -mesures, ou mesures de défauts microlocales). La suite  $v_n$  vérifie l'équation des ondes

$$(2.14) \quad \begin{cases} \square v_n - (2a(x) - 2\delta_0)\partial_t v_n = e^{-it/h_n} \tilde{f}_n, \\ v_n|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

avec  $\tilde{f}_n = f_n + \text{Im } \lambda_n(2a(x) - \text{Im } \lambda_n)u_n + 2i \text{Re } \lambda_n(\text{Im } \lambda_n - \delta_0)u_n$ . On vérifie que  $\|\tilde{f}_n\|_{L^2_{\text{loc}}}$  tend vers zéro car

$$\|f_n\|_{L^2} \rightarrow 0, \quad \|\text{Im } \lambda_n(2a(x) - \text{Im } \lambda_n)u_n\|_{L^2_{\text{loc}}}^2 \leq c \|u_n\|_{L^2_{\text{loc}}}^2 \rightarrow 0,$$

$$\|\text{Re } \lambda_n(\text{Im } \lambda_n - \delta_0)u_n\|_{L^2_{\text{loc}}}^2 \leq c |\text{Im } \lambda_n - \delta_0| \cdot \|\lambda_n u_n\|_{L^2_{\text{loc}}} \leq c |\text{Im } \lambda_n - \delta_0| \rightarrow 0.$$

Ainsi  $\square v_n$  est compact dans  $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R} \times \Omega)$ . On peut donc appliquer le théorème de régularité microlocale pour les mesures de défaut. On a  $\text{Supp } \mu \subset \{|\xi|^2 = \tau^2\}$  variété caractéristique de l'opérateur des ondes.

Nous allons montrer de plus le

LEMME 2.1.2. — *Pour tout  $x \notin B_R$ , on a*

$$\text{Supp } \mu \subset \{(t, x, \tau, \xi); |\xi|^2 = \tau^2 \text{ et } x \cdot \xi < 0\}.$$

*Démonstration.* — Soit  $x_0 \in \Omega$ ,  $|x_0| > R$  et  $(\tau_0, \xi_0) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$  tel que  $x_0 \cdot \xi_0 \geq 0$  et  $|\xi_0|^2 = \tau_0^2$ . Soit  $\chi \in C^\infty_0(\Omega)$ , à support dans un voisinage  $V_{x_0}$  de  $x_0$  inclus dans  $B^c_R$  et  $\varphi \in C^\infty_0([0, T])$  pour  $T > 0$ . Soit  $a(x, \tau, \xi) \in S^0$ , homogène d'ordre zéro, un symbole de microlocalisation près de  $(x_0, \tau_0, \xi_0)$ , valant 1 en ce point. On a

$$(2.15) \quad \begin{aligned} & \langle a(x, D_x, D_t)\varphi\chi v_n, \varphi\chi v_n \rangle_{H^1_{x,t}} \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times [0, T] \times S^d} a(x, \xi, \tau)\varphi(t)\chi(x) d\mu(x, t, \xi, \tau). \end{aligned}$$

Pour déduire le résultat du lemme 2.1.2, il suffit de démontrer que

$$\langle a(x, D_x, D_t)\varphi\chi\nabla v_n, \varphi\chi\nabla v_n \rangle_{L^2} + \langle a(x, D_x, D_t)\varphi\chi\partial_t v_n, \varphi\chi\partial_t v_n \rangle_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Comme  $u_n = w_n$  sur  $B^c_R$  et, en outre, remarquant qu'une dérivation en espace de  $w_n$  ou en temps de  $v_n$  est essentiellement une multiplication par  $\lambda_n$ , il suffit de montrer que  $\lambda_n a(x, D_x, D_t)\varphi\chi v_n$  tend vers 0, pour la norme uniforme. On a

$$(2.16) \quad \begin{aligned} & a(x, D_x, D_t)\varphi\chi v_n \\ & = \iint_{y \in V_{x_0}} e^{i(x-y)\xi + i(t-s)\tau} \varphi(s)\chi(y)v_n(s, y)a(x, \xi, \tau) dy ds d\xi d\tau. \end{aligned}$$

REMARQUE 2.1.1. — En tenant compte du fait que  $\operatorname{Re} \lambda_n$  tend vers  $+\infty$ , que  $\operatorname{Im} \lambda_n$  tend vers  $\delta_0$  et que l'expression de la résolvante libre admet le même comportement asymptotique en dimension impaire qu'en dimension paire d'espace [8], on va se restreindre, pour simplifier, à l'expression de  $R_0(\lambda_n)$  en dimension impaire [3].

On a

$$(2.17) \quad w_n(y) = \int_{z \in \operatorname{Supp} g_n} e^{-i\lambda_n |y-z|} \mathcal{P}_d(|y-z|, \lambda_n) g_n(z) dz,$$

où

$$\mathcal{P}_d(r, \lambda) = c(d) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{\frac{1}{2}(d-2)} \left( \frac{e^{-i\lambda r}}{r} \right) e^{i\lambda r} = \sum_{\alpha, \beta \in I} c(d) \frac{\lambda^\alpha}{r^\beta},$$

$|I|$  ne dépend que de  $d$ . Donc

$$(2.18) \quad a(x, D_x, D_t) \varphi \chi v_n = c(d) \sum_{\alpha, \beta \in I} J_{\alpha, \beta, n}(x),$$

avec

$$J_{\alpha, \beta, n} = c \iint_{s \in [0, T]} \varphi(s) e^{i(t-s)\tau - is/h_n} \\ \times \iint_{y \in V_{x_0}, z \in B_R} \lambda^\alpha e^{i(x-y)\xi - i/h_n |y-z|} \chi(y) a(x, \xi, \tau) \frac{g_n(z)}{|y-z|^\beta} e^{\operatorname{Im} \lambda_n |y-z|}.$$

Soient les phases

$$(2.19) \quad \Gamma_n(y) = y \cdot \xi + \frac{1}{h_n} |y-z|, \quad \delta(s) = s\tau.$$

On a

$$(2.20) \quad \nabla_y \Gamma_n = \frac{1}{h_n} \left( h_n \xi + \frac{(y-z)}{|y-z|} \right);$$

en vertu de  $x \cdot \xi \geq 0$ , on peut voir aisément qu'il existe  $c_1$  et  $c_2 > 0$  tels que

$$(2.21) \quad |\nabla_y \Gamma_n| \geq \frac{c_1}{h_n} \quad \text{et} \quad |\nabla_y \Gamma_n| \geq c_2 |\xi|.$$

On va intégrer par parties à l'aide des opérateurs

$$L_n(\xi, y, \partial_y) = \frac{\nabla_y \Gamma_n \cdot \partial_y}{-i |\nabla_y \Gamma_n|^2}, \quad {}^t L_n = \partial_y \cdot \left( \frac{\nabla_y \Gamma_n}{i |\nabla_y \Gamma_n|^2} \right) = \ell_n(\xi, y, \partial_y)$$

et

$$(2.22) \quad H = {}^t H = 1 - \partial_s^2.$$

Ils vérifient

$$(2.23) \quad L_n(e^{-i\Gamma_n}) = e^{-i\Gamma_n} \quad \text{et} \quad H(e^{-i\delta}) = (1 + \tau^2) e^{-i\delta}.$$

On remarque que  $\tilde{\ell}_n = O(h_n |\xi|^{-1})$  (i.e.  $\exists c > 0$  tel que  $(1 + |\xi|^2)^{1/2} \tilde{\ell}_n < ch_n$ , pour tous  $y \in V_{x_0}$ ,  $z \in B_R$  et  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ) où  $\tilde{\ell}_n$  représente les coefficients de  $\ell_n$ .

En intégrant par parties  $N$  fois par  $L_n$  et  $M$  fois par  $H$ , on obtient

$$\begin{aligned} J_{\alpha,\beta,n} &= c\lambda_n^\alpha \iint e^{i(t-s)\tau} \frac{1}{(1+\tau^2)^M} H^M(\varphi(s)) e^{-is/h_n} \\ &\quad \times \iint e^{i(x-y)\xi - i/h_n |y-z|} a(x, \xi, \tau) ({}^t L_n)^N \left( \chi(y) \frac{g_n(z)}{|y-z|^\beta} e^{\text{Im } \lambda_n |y-z|} \right). \\ &= c\lambda_n^\alpha \iint e^{i(t-s)\tau} \frac{1}{(1+\tau^2)^M} H^M(\varphi(s)) e^{-is/h_n} \\ &\quad \times \int e^{i(x-y)\xi} \frac{a(x, \xi, \tau)}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}N}} (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}N} \int_{z \in B_R} e^{-i/h_n |y-z|} \ell_n^N(). \end{aligned}$$

En remarquant que  $H^M(\varphi(s)) e^{-is/h_n}$  est en  $O(h_n^{-2M})$ , on obtient

$$\begin{aligned} |\lambda_n J_{\alpha,\beta,n}| &\leq c|\lambda_n|^{\alpha+1} h_n^{-2M} \int \frac{1}{|1+\tau^2|^M} \frac{|a(x, \xi, \tau)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}N}} (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}N} \\ &\quad \times \int_{z \in B_R} \left| \ell_n^N \left( \frac{\chi(y) g_n(z)}{|y-z|^\beta} e^{\text{Im } \lambda_n |y-z|} \right) \right|. \end{aligned}$$

Comme les coefficients de  $\ell$  sont d'ordre  $-1$  en  $\xi$ ,  $\text{Im } \lambda_n < \delta_0$  et  $\chi \in C_0^\infty$ , alors il existe  $c \in \mathbb{R}_+$  tel que

$$\begin{aligned} (2.24) \quad (1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}N} \int_{z \in B_R} \left| \ell_n^N \left( \frac{\chi(y) e^{\text{Im } \lambda_n |y-z|}}{|y-z|^\beta} \right) g_n(z) \right| \\ \leq ch_n^N \int_{z \in B_R} |g_n(z)|^2 dz, \end{aligned}$$

quels que soient  $y \in V_{x_0}$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

Or  $g_n$  est bornée dans  $L^2$ ; ainsi pour tout  $x \in V_{x_0}$ , on a

$$\begin{aligned} |\lambda_n J_{\alpha,\beta,n}| &\leq c|\lambda_n|^{\alpha+1} h^{N-2M} \iint_{\tau,\xi} \frac{1}{|1+\tau^2|^M} \cdot \frac{|a(x, \xi, \tau)|}{(1+|\xi|^2)^{\frac{1}{2}N}} d\tau d\xi \\ &\leq c|\lambda_n|^{\alpha+1} h^{N-2M} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad \text{pour } N \text{ assez grand.} \end{aligned}$$

Et donc

$$\sup_{x \in V_{x_0}} (\lambda_n a(x, D_x, D_t) \varphi \chi V_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On déduit que  $\int a(x, \xi, \tau) \varphi \chi d\mu = 0$  et par suite  $\mu$  ne charge pas  $(x_0, \xi_0, \tau_0)$ .  $\square$

REMARQUE 2.1.2. — Le lemme 2.1.2 exprime tout simplement qu'en dehors de  $B_R$  la mesure  $\mu$  est nulle sur les rayons sortants ( $x \cdot \xi \geq 0$ ). Dans toute la suite, la mesure  $\mu$  est définie sur la composante connexe  $\tau > 0$  ( $SZ^+$ , voir [9]). Ainsi les rayons pour lesquels  $x \cdot \xi > 0$  sont les sortantes dans le futur ( $s > 0$ ).

Maintenant grâce aux lemmes 2.1.1 et 2.1.2, on va trouver une absurdité en utilisant le théorème de propagation de Lebeau [9]. On rappelle que  $v_n$  vérifie l'équation des ondes amorties :

$$(2.25) \quad \begin{cases} \square v_n - (2a(x) - 2\delta_0) \partial_t v_n = e^{it/h_n} \tilde{f}_n, \\ v_n|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

avec  $\|e^{it/h_n} \tilde{f}_n\|_{L^2_{\text{loc}}} \rightarrow 0$  lorsque  $n$  augmente indéfiniment.

Ainsi, d'après [9], pour tout  $\omega$  borélien en  $(x, t, \xi, \tau)$  dans  $T^*B_R \times [0, T]$ ,  $T > 0$ , on a

$$(2.26) \quad \mu(G(s)\omega) = \int_{\omega} \exp\left(\int_0^s (2a(G(\sigma)(x, t, \xi, \tau)) - 2\delta_0) d\sigma\right) d\mu(x, t, \xi, \tau)$$

où  $G(s)$  est le flot bicaractéristique généralisé associé à  $\square$ . On rappelle que  $\{G(s)\}$  est un groupe de  $C^0$ -homéomorphismes.

On a  $\text{Supp } \mu \cap B_R \neq \emptyset$ , car sinon  $\mu = 0$  sur  $B_R$ . En appliquant alors le lemme 2.1.2 et le théorème de propagation des mesures (P. Gérard [4]), [9], on aurait  $\mu = 0$  sur  $B_{R'}$  où  $R' > R$  et donc  $v_n \rightarrow 0$  dans  $H^1_{t,x}(B_R \times [0, T])$ . Ainsi

$$u_n \rightarrow 0 \text{ dans } H^1_R, \quad \text{et} \quad \lambda_n u_n \rightarrow 0 \text{ dans } L^2_R,$$

ce qui est absurde car  $\|\nabla u_n\|_{L^2_R}^2 + \|\lambda_n u_n\|_{L^2_R}^2 = 1$ .

Soit donc  $\omega$  un borélien de  $T^*(B_R) \times [0, 1]$  tel que  $\mu(\omega) \neq 0$ .

On écrit  $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$  où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les deux boréliens définis par

$$\omega_1 = \{\rho \in \omega; \exists s, G(s)\rho \notin B_R\}, \quad \omega_2 = \{\rho \in \omega; \forall s \geq 0, G(s)\rho \in B_R\}.$$

On a  $\mu(\omega) = \mu(\omega_1) + \mu(\omega_2)$ . Or  $\mu(\omega_1) = 0$ , car si  $\rho \in \omega_1$ , il existe  $s$  tel que  $G(s)\rho \notin B_R$ ; donc  $G(s)\rho$  est sortante et en appliquant le lemme 2.1.2,  $\mu(\omega_1) = 0$ . Ainsi  $\mu(\omega) = \mu(\omega_2)$ .

On remarque que si  $\Omega$  est non captif,  $\omega = \omega_1$  implique  $\mu(\omega) = 0$ , ce qui est absurde. Donc il reste le cas où  $\Omega$  est captif avec l'hypothèse de C.G.E. au-dessus de  $B_R$ .

On a  $G(s)\omega_2 \subset T^*(B_R) \times [s, s+1]$  quel que soit  $s \geq 0$ , donc

$$(2.27) \quad \mu(G(s)\omega_2) \leq \mu(B_R \times [s, s+1]) \leq \|v_n\|_{H^1_{R,[0,1]}}^2 \leq 1.$$

On rappelle que  $C(s) = \inf_{\rho} s^{-1} \int_0^s \tilde{a}(G(\tau)\rho) d\tau$ .

En remarquant que toutes les bicaractéristiques issues de  $\omega_2$  sont captives, on obtient d'après (2.26)

$$(2.28) \quad \mu(G(s)\omega_2) \geq e^{[2C(s)-2\delta_0]s} \mu(\omega_2).$$

On a  $\delta_0 < C(\infty)$ , donc il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $\delta_0 \leq C(\infty) - \varepsilon$ .

Soit  $s_0 > 0$  tel que  $C(\infty) - C(s_0) \geq \frac{1}{2}\varepsilon$ ; pour tout  $s \geq s_0$ , on a

$$(2.29) \quad \mu(G(s)\omega_2) \geq e^{[2C(s)-2C(\infty)+2C(\infty)-2\delta_0]s} \mu(\omega)$$

$$(2.30) \quad \geq e^{(-\varepsilon+2\varepsilon)s} \mu(\omega)$$

$$(2.31) \quad \geq e^{\varepsilon s} \mu(\omega).$$

Pour  $s$  assez grand on obtient  $\mu(G(s)\omega_2) > 1$  (car  $\mu(\omega) \neq 0$ ), ce qui contredit (2.27).  $\square$

**2.2. Basses fréquences.** — Le comportement de  $R_\chi(\lambda)$  en basses fréquences (près de l'origine) dépend de la parité de la dimension d'espace [14]. En fait, en dimension paire, 0 présente une singularité de type branche logarithmique [16], [14] et en dimension impaire l'ensemble des pôles de  $R_\chi(\lambda)$  n'admet pas de points d'accumulation [6] et il ne coupe pas l'axe réel. Donc sur l'ensemble  $\{|\lambda| < c\}$ , les pôles de  $R_\chi(\lambda)$  sont en nombre fini et donc isolés. Plus précisément, en tenant compte de la proposition 3.1 de [16], [14] ( $R_\chi(\lambda)$  considéré comme opérateur de  $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ ), on a

LEMME 2.2.1. — Si  $d \geq 2$  est paire, pour  $\lambda \rightarrow 0$  et  $|\arg \lambda + \frac{1}{2}\pi| \leq \pi$ , on a

$$(2.32) \quad R_\chi(\lambda) = \mathcal{M}_d \lambda^{d-2} \log \lambda + \mathcal{F}_d(\lambda) + O(|\lambda|^{d-2}),$$

où  $\text{rang } \mathcal{M}_d = 1$  et  $\mathcal{F}_d$  est un polynôme de degré  $\leq d - 3$  si  $d \geq 4$  et  $\mathcal{F}_2 \equiv 0$ .

Démonstration. — Soit  $\tilde{R}(\lambda) : L^2_{\text{comp}}(\Omega) \rightarrow L^2_{\text{comp}}(\Omega)$  l'opérateur défini par

$$\tilde{R}(\lambda)f \text{ est l'unique solution de } (-\Delta - \lambda^2)u = f, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u \text{ sortante.}$$

Soit alors  $f \in L^2(\Omega)$  est à support dans  $B_R$ ;  $a(x)$  étant aussi à support compact dans  $B_R$ , la solution  $u$  du système

$$(-\Delta - \lambda^2 + i\lambda a(x))u = f + i\lambda a(x)u, \quad u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u \text{ sortante}$$

s'écrit comme

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\lambda)f &= u = R(\lambda)(f + i\lambda a(x)u) \\ &= R(\lambda)(f + i\lambda a(x)\tilde{R}(\lambda)f) \\ &= R(\lambda)[I + i\lambda a(x)\tilde{R}(\lambda)]f. \end{aligned}$$

Ainsi pour toute  $f \in L^2$  à support dans  $B_R$ ,

$$\tilde{R}_\chi(\lambda)f = R_\chi(\lambda)[I + i\lambda a(x)\tilde{R}_\chi(\lambda)]f.$$

En tenant compte de la proposition 3.1 de Vodev [16], on a  $i\lambda a(x)\tilde{R}_\chi(\lambda) \rightarrow 0$  quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Donc  $I + i\lambda a(x)\tilde{R}_\chi(\lambda)$  est inversible et on peut voir aisément que  $R_\chi(\lambda)$  et  $\tilde{R}_\chi(\lambda)$  ont le même comportement près de 0.  $\square$

REMARQUE 2.2.1. — Il est clair qu'en dimension paire, le lemme 2.2.1 donne, modulo une fonction analytique en 0,

$$\lambda R_\chi(\lambda) = \mathcal{M}_d \lambda^{d-1} \log \lambda + O(|\lambda|^{d-1}), \quad \lambda \rightarrow 0.$$

De plus, on peut voir facilement de la preuve du lemme que la même conclusion est établie pour  $\chi \partial_{x_j} R_\chi(\lambda)$ ,  $j = 1, \dots, d$ .

### 3. Décroissance de l'énergie locale

Cette section est consacrée à la preuve du théorème 1.0.2.

Comme dans Morawetz [11], on considère une fonction  $\varphi(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que

$$\varphi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \leq 1, \\ 1 & \text{pour } t \geq 2. \end{cases}$$

Soit  $V(t) = \varphi(t)U(t)$  où  $U(t) = e^{itG}$  et  $G = -iA$ . La transformée de Fourier

$$\widehat{V}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\lambda} V(t) dt$$

est bien définie pour  $\text{Im } \lambda < 0$ , comme opérateur borné de  $H$ . On a

$$V(t) = (2\pi)^{-1} \int_{\text{Im } \lambda = -\varepsilon} e^{-it\lambda} \widehat{V}(\lambda) d\lambda, \quad \forall \varepsilon > 0$$

et vérifie

$$(3.1) \quad (\partial_t - iG)V(t) = \varphi'(t)U(t).$$

Donc  $\widehat{V}(\lambda) = i(G - \lambda)^{-1} \widehat{\varphi'U}(\lambda)$  avec  $\text{Im } \lambda < 0$ .

Comme  $\varphi'(t)U(t)f$  est à support compact indépendant de  $t$ , alors  $\widehat{\varphi'U}(\lambda) : H_{\text{comp}} \rightarrow H_{\text{comp}}$  est analytique sur  $\mathbb{C}$ . De plus  $(G - \lambda)^{-1} : H_{\text{comp}} \rightarrow H_{\text{loc}}$  s'étend en un opérateur méromorphe sur  $\mathbb{C}$  si  $d$  est impair, et sur la surface de Riemann du logarithme, si  $d$  est pair et on a

$$(3.2) \quad (G - \lambda)^{-1} = -i \begin{pmatrix} R(\lambda)(2a + i\lambda) & R(\lambda) \\ \lambda R(\lambda)(2a + i\lambda) - \text{Id} & i\lambda R(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Ainsi si  $d$  est impair, (1.7) donne que

$$(3.3) \quad \exists c > 0 \quad \text{tel que} \quad \|(G - \lambda)^{-1} f\|_R \leq c \|f\|$$

pour toute  $f \in H$  telle que  $\text{Supp } f \subset B_R$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$  tel que  $\text{Im } \lambda \leq \delta$ .

Et d'après la remarque 2.1.1

$$(3.4) \quad (G - \lambda)^{-1} = \mathcal{M}'_d \lambda^{d-1} \log \lambda + O(|\lambda|^{d-1}), \quad \lambda \rightarrow 0, \quad |\arg \lambda + \frac{1}{2}\pi| \leq \pi,$$

modulo une fonction analytique en  $\lambda = 0$  si  $d$  est pair.

D'après l'équation (3.1), on a

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad V(t)f &= (2\pi)^{-1} \int_{\text{Im } \lambda = -\epsilon} e^{it\lambda} (G - \lambda)^{-1} \widehat{\varphi'U}(\lambda) f d\lambda, \quad \forall \epsilon > 0 \\
 &= (2\pi)^{-1} e^{-\delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz} (G - (z + i\delta))^{-1} \widehat{\varphi'U}(z + i\delta) f dz \\
 &\quad + (2\pi)^{-1} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\substack{\text{Re } \lambda = -\epsilon, \\ 0 \leq \text{Im } \lambda \leq \delta}} e^{it\lambda} (G - \lambda)^{-1} \widehat{\varphi'U}(\lambda) f d\lambda \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\substack{\text{Re } \lambda = \epsilon, \\ 0 \leq \text{Im } \lambda \leq \delta}} e^{it\lambda} (G - \lambda)^{-1} \widehat{\varphi'U}(\lambda) f d\lambda \right\} \\
 (3.6) \quad &= (2\pi)^{-1} e^{-\delta t} W_1(t)f + W_2(t)f.
 \end{aligned}$$

• On examine d'abord  $W_2(t)f$ . Dans la première intégrale,  $\lambda$  est paramétré par  $\lambda = -\epsilon + iy$ , et dans la deuxième intégrale,  $\lambda = \epsilon + iy$ . Il est clair que  $W_2(t)f \equiv 0$  si  $d$  est impair. Par contre pour  $d$  pair, on a à partir de (3.4) et en remarquant que  $|\log(-\epsilon + iy) - \log(\epsilon + iy)| \leq C^{te}$ , on voit aisément que  $W_2(t)$  est en  $O(t^{-d})$ . En d'autre termes,

$$(3.7) \quad \|W_2(t)f\|_R \leq Ct^{-d} \|f\|.$$

• Pour estimer  $\|W_1(t)f\|_R$ , on va utiliser l'identité de Plancherel avec l'inégalité (3.3). On a

$$\begin{aligned}
 (3.8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \|W_1(t)f\|_R^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \|(G - (z + i\delta))^{-1} \widehat{\varphi'U}(z + i\delta) f\|^2 \\
 &\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \|\widehat{\varphi'U}(z + i\delta) f\|_R^2 dz \\
 &= c \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\delta t} \|\varphi'(t)U(t)f\|_R^2 dt dz \\
 (3.9) \quad &\leq c \|f\|^2.
 \end{aligned}$$

Soit  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$  tel que  $\chi = 1$  sur  $|x| \leq R$ . On a

$$(3.10) \quad (\partial_t - iG)\chi W_1(t)f = \delta\chi W_1(t)f - i\chi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz} \widehat{\varphi'U}(z + i\delta) f dz$$

$$(3.11) \quad = \tilde{W}_1(t)f.$$

Soit alors  $t_0$  tel que

$$\|W_1(t_0)f\|_R \leq c \|f\|.$$

On a

$$(3.12) \quad \chi W_1(t)f = U(t)\chi W_1(t_0)f + \int_{t_0}^t U(t - t_0 - s)\tilde{W}_1(s)f ds$$

$$(3.13) \quad \|W_1(t)f\|_R \leq \|\chi W_1(t)f\| \leq c\|f\| + \int_{t_0}^t \|\tilde{W}_1(s)f\| ds$$

$$(3.14) \quad \leq c\|f\| + ct^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|\tilde{W}_1(s)f\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(3.15) \quad \leq ct^{\frac{1}{2}}\|f\|, \quad t \geq 1.$$

Ainsi (1.8) et (1.9) se déduisent de (3.6), (3.7) et (3.15).  $\square$

#### 4. Le meilleur taux de décroissance en dimension impaire

Soit  $\beta$  le meilleur taux de décroissance exponentielle défini par

$$\beta = \sup \{ \delta > 0; \exists c > 0, \forall f \in H, \text{Supp } f \subset B_R, \\ E_R(U(t)f) \leq ce^{-\delta t} E(U(0)f), \forall t \geq 0 \}.$$

*Preuve du théorème 1.3.* — D'après le théorème 1.0.2, on a

$$\beta \geq \alpha = 2 \min(D(0), C(\infty)).$$

Montrons que  $\beta \leq \alpha$ .

• On a  $\beta \leq 2D(0)$ . — En effet, supposons que  $2D(0) < \beta$ ; alors il existe  $\lambda_1$  pôle de  $R(\lambda)$  tel que  $2 \text{Im } \lambda_1 < \beta$ . On a  $R(\lambda_1)f = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda_1 t} u(t)f dt$ , donc

$$(4.1) \quad \|R(\lambda_1)f\|_R \leq \int_0^{+\infty} e^{\text{Im } \lambda_1 t} \|u(t)f\|_R dt$$

$$(4.2) \quad \leq \int_0^{+\infty} e^{\text{Im } \lambda_1 t} e^{-\frac{1}{2}\beta t} \|f\| dt$$

$$(4.3) \quad \leq \int_0^{+\infty} e^{\frac{1}{2}t(2 \text{Im } \lambda_1 - \beta)} \|f\| dt$$

$$(4.4) \quad \leq -\frac{\|f\|}{\text{Im } \lambda_1 - \frac{1}{2}\beta} < \infty, \quad \forall f \in H_R.$$

Donc  $\lambda_1$  n'est pas un pôle de  $R(\lambda_1)$ , ce qui est absurde.

• On a  $\beta \leq 2C(\infty)$ . — En supposant que  $2C(\infty) < \beta$ , il existe  $\eta > 0$  tel que  $\beta = 2C(\infty) + 4\eta$  et il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $f \in H_R$  et tout  $t > 0$ ,

$$E_R(u(t)) \leq ce^{-(\beta-\eta)t} E(0).$$

Soit  $t > 0$  tel que  $ce^{-(\beta-\eta)t_0} \leq e^{-(\beta-2\eta)t_0}$

$$(4.5) \quad E_R(u(t_0)) \leq e^{-(\beta-2\eta)t_0} E(0) \quad \forall f \in H_R,$$

$$(4.6) \quad \leq e^{-2(C(\infty)+\eta)t_0} E(0).$$



Comme  $C(\infty) < \infty$  (sinon l'inégalité à démontrer est vraie) et  $C(t_0) \leq C(\infty)$ , il existe  $\rho_0$  tel que

$$C(t_0) = \frac{1}{t_0} \int_0^{t_0} a(x(s, \rho_0)) ds \leq \frac{\beta}{2} - \eta \quad (\rho_0 \text{ captif})$$

$$(4.7) \quad E_R(u(t_0)) \leq e^{-2(C(t_0)+\eta)t_0} E(0),$$

ce qui est absurde. En effet, soit  $f_k \xrightarrow{L^2} 0$  tel que  $\|f_k\|_{L^2} = 1$ . On note  $u_k$  la solution de (1.3) avec  $u_k(0) = 0$ ,  $\partial_t u_k(0) = f_k$  et soit  $\mu$  une mesure de défaut microlocale associée à  $(u_k)$  dans  $H$ . La fonction  $f_k$  est choisie telle que  $\mu$  soit portée par  $\gamma$  (rayon bicaractéristique issu de  $\rho_0 \subset B_R$ ).

On note  $u_s(t, x) = u(t + s, x)$ ,  $s \in [0, \varrho]$ ,  $\varrho > 0$ ,

$$(4.8) \quad \int_0^\varrho E_R(u_s(t_0)) ds \leq e^{-2(C(t_0)+\eta)t_0} \int_0^\varrho E(u_s(0)) ds$$

$$(4.9) \quad \mu([t_0, t_0 + \varrho]) \leq e^{-2(C(t_0)+\eta)t_0} \mu([0, \varrho])$$

$$(4.10) \quad e^{-\frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} a(x(s, \rho_0)) ds} \mu([0, \varrho]) \leq e^{-\frac{2}{t_0} \int_0^{t_0} a(x(s, \rho_0)) ds - 2\eta t_0} \mu([0, \varrho]).$$

Or  $\mu([0, \varrho]) \neq 0$  (sinon  $u_k$  tend vers zéro dans  $H^1([0, \varrho] \times B_R)$ ), ce qui contredit  $\|f_k\|_{L^2} = 1$ . Cela achève la preuve du théorème 1.0.3.  $\square$

*Remerciements.* — Je remercie le Professeur Nicolas Burq, pour les discussions que j'ai eues avec lui à propos de cet article lors de mes séjours à Orsay. Je remercie également le Professeur Gilles Lebeau pour ses remarques fructueuses qui ont permis d'améliorer le contenu de ce travail.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ALOUI (L.) & KHENISSI (M.) — *Stabilisation de l'équation des ondes dans un domaine extérieur*, Rev. Mat. Iberoamericana, t. **28** (2002), pp. 1–16.
- [2] BURQ (N.) — *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur*, Acta Math., t. **180** (1998), pp. 1–29.
- [3] GÉRARD (C.) — *Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexe*, Mém. Soc. math. France (N.S.), vol. 31, Société Mathématique de France, Paris, 1988.
- [4] GÉRARD (P.) — *Microlocal defect measures*, Comm. Partial Differential Equations, t. **16** (1991), pp. 1761–1794.
- [5] GOHBERG (I.C.) & KREIN (M.G.) — *Introduction to the Theory of Linear non Self adjoint Operators*, Translations of Mathematical Monograph, vol. 18, Amer. Math. Soc., 1969.
- [6] LAX (P.D.) & PHILLIPS (R.S.) — *Scattering theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 26, Academic Press, New York, 1967.

- [7] ———, *The acoustic equation with an indefinete energy form end the Schrödinger equation*, J. Funct. Anal., t. **1** (1967), pp. 37–83.
- [8] ———, *Scattering theory for the Acoustic Equation in an Even Number of Space Dimensions*, Indiana Univ. Math. J., t. **22** (1972), no. 2, pp. 101–133.
- [9] LEBEAU (G.) – *Équation des ondes amorties*, in *Algebraic and Geometric Methods in Mathematical Physics*, Kluwer Academic Publishers, Nertherlands, 1996, pp. 73–109.
- [10] MELROSE (R.) – *Singularities and energie decay in acoustical scattering*, Duke Math. J., t. **46** (1979), pp. 43–59.
- [11] MORAWETZ (C.S.) – *Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation*, Comm. Pure Appl. Math., t. **28** (1975), pp. 229–264.
- [12] RALSTON (J.) – *Solution of the wave equation with localized energy*, Comm. Pure Appl. Math., t. **22** (1969), pp. 807–823.
- [13] TARTAR (L.) – *H-mesures : a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, t. **115** (1993), pp. 193–230.
- [14] VAINBERG (B.) – *Asymtotic methods in equations of mathematical physics*, Gordon and Breach, New York, 1988.
- [15] VODEV (G.) – *Sharp Bounds on the Number of Scattering Poles for Perturbations of Laplacian*, Comm. Math. Phys., t. **146** (1992), pp. 205–216.
- [16] ———, *On the uniform decay of the local energy*, Serdica Math. J., t. **25** (1999), no. 3, pp. 191–206.