

# BULLETIN DE LA S. M. F.

THIERRY BARBOT

## Variétés affines radiales de dimension 3

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 128, n° 3 (2000), p. 347-389

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_2000\\_\\_128\\_3\\_347\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_3_347_0)

© Bulletin de la S. M. F., 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## VARIÉTÉS AFFINES RADIALES DE DIMENSION 3

PAR THIERRY BARBOT (\*)

---

RÉSUMÉ. — Nous classifions les variétés affines radiales de dimension 3 vérifiant l’une des conditions suivantes : (i) leur groupe d’holonomie est virtuellement résoluble, (ii) leur flot radial est tangent à une surface plate, (iii) leur flot radial admet au moins une orbite périodique qui n’est pas de type hyperbolique, (iv) l’image de leur application développante est un ouvert convexe. S. Choi a utilisé les résultats du présent article sous sa version prépubliée, achevant la classification des variétés affines radiales de dimension 3.

ABSTRACT. — RADIANT AFFINE 3-MANIFOLDS. — We classify all the radiant affine 3-manifolds with virtually solvable holonomy. We classify the radiant affine 3-manifolds admitting a flat embedding of a surface tangent to the radial flow too. Eventually, we show that if the radiant affine manifold is not one of Benzécri’s examples, and if its holonomy group is not virtually solvable, then the periodic orbits of the radial flow are of saddle type. As a corollary, we obtain the classification of the convex radiant affine 3-manifolds. S. Choi, using our results exposed in the preprint [2], obtains the complete classification of closed radiant affine 3-manifolds, answering a conjecture by Y. Carrière.

### 1. Introduction

Cet article est consacré à l’étude des structures affines radiales sur les variétés de dimension 3 (une structure affine est dite radiale si son groupe d’holonomie fixe un point de l’espace affine). La terminologie « radiale » provient de l’existence d’un flot non singulier particulier : le flot radial. Ce flot préserve la structure affine et est transversalement projectif.

Y. Carrière [6] a énoncé une conjecture générale à propos de ces variétés affines, qui mène à leur complète classification. S. Choi, exploitant les résultats obtenus dans le présent article dans sa version prépubliée [2], est parvenu à valider la véracité de cette conjecture dans le brillant travail [10].

---

(\*) Texte reçu le 19 avril 1999, révisé le 7 janvier 2000.

T. BARBOT, U.M.P.A., U.M.R. 5669, École Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d’Italie 69007 Lyon. Email : barbot@umpa.ens-lyon.fr et <http://umpa.ens-lyon.fr/~barbot/>  
Ce travail est partiellement soutenu par le CNPq-Brésil.

Mots clés : variété affine radiale.

Classification mathématique par matières : 57M50, 53A20, 53C15.

Un exemple particulièrement simple de variété affine radiale fermée est obtenu en quotientant  $\mathbb{R}^3$  privé de l'origine par une application linéaire contractante (*i.e.* dont le spectre est strictement contenu dans le disque unité). La variété ainsi obtenue est homéomorphe au produit de la sphère et du cercle. Ces variétés affines, ainsi que leur quotient par des groupes (finis) d'automorphismes affines agissant librement et proprement sont appelés *variétés de Hopf affines*. Un autre type d'exemple est obtenu en suspendant des automorphismes du tore ou d'une bouteille de Klein préservant une structure affine sur ces surfaces (rappelons que le tore et la bouteille de Klein sont les seules surfaces compactes admettant des structures affines, [3], [11]).

Ces exemples font partie d'une famille plus générale. Depuis J.-P. Benzécri, on sait comment construire de nombreux exemples de structures affines radiales sur les fibrés de Seifert à classe d'Euler nulle à partir de structures projectives sur l'orbifold sous-jacente (il convient de relever aussi qu'il y a abondance de telles structures projectives, *cf.* [14]). Nous appelons ces structures affines radiales *exemples de Benzécri*, ou encore, *structures affines radiales induites par une structure projective*. Nous rappelons leur construction à la section 3.1. Elles se caractérisent par la propriété suivante (proposition 3.3) :

PROPOSITION. — *Ce sont les seules variétés affines radiales fermées de dimension 3 pour lesquelles toutes les orbites du flot radial sont périodiques.*

Nous rappellerons comment généraliser cette construction pour obtenir, à partir d'automorphismes projectifs d'orbifolds munies de structures projectives réelles, d'autres exemples, que nous appelons *suspensions affines généralisées* (voir [6]). Ils regroupent tous ceux discutés précédemment, et sont caractérisés de la manière suivante (proposition 3.4) :

PROPOSITION. — *Une variété affine radiale fermée de dimension 3 est affinement isomorphe à une suspension affine généralisée si et seulement si son flot radial admet une section totale.*

Rappelons qu'une section totale d'un flot est une surface compacte plongée dans la variété ambiante, transverse au flot et rencontrant toutes les orbites du flot. Cette proposition n'est pas originale puisque déjà établie dans [6] (avec moins de détails). Une telle section du flot radial hérite naturellement d'une structure projective réelle qui est préservée par l'application de premier retour. La conjecture de Y. Carrière, démontrée par S. Choi, énonce précisément que le flot radial d'une variété affine radiale de dimension 3 admet toujours une section totale, et donc qu'une telle variété est toujours une suspension affine généralisée. La preuve de S. Choi utilise les résultats suivants, établis dans le présent article :

THÉORÈME A. — *Les seules variétés de dimension 3 affines radiales fermées dont le groupe d'holonomie est virtuellement résoluble sont les suspensions*

*affines généralisées induites par une structure projective réelle sur une orbifold de caractéristique d'Euler positive ou nulle.*

(Un groupe est virtuellement résoluble s'il contient un sous-groupe résoluble d'indice fini). Je remercie S. Dupont pour avoir relevé une erreur dans la première version de la preuve de ce théorème.

Pour montrer le théorème A, nous emploierons la méthode suivante : étant résoluble (à indice fini près, ce qui n'a pas d'incidence sur le théorème), le groupe d'holonomie préserve soit un plan, soit une droite de  $\mathbb{R}^3$ . Le cas où il n'y a pas de plan invariant reçoit un traitement à part (voir fin du chapitre 5). Dans le cas où il y a un plan invariant, on distingue deux cas, selon que ce plan évite ou non l'image de l'application développante. S'il l'évite, on obtient aisément, grâce à un critère classique dû à Tischler que le flot radial admet une section totale, et donc que  $M$  est une suspension affine généralisée. Sinon, l'image réciproque par l'application développante du plan invariant se projette dans la variété affine en une union finie de surfaces plongées dans  $M$ , affinement plates, et tangentes au flot radial. Le théorème A est donc un corollaire du théorème suivant :

**THÉORÈME B.** — *Soit  $M$  une variété de dimension 3 fermée munie d'une structure affine radiale. Si  $M$  contient une surface plongée plate et tangente au flot radial, alors  $M$  est une suspension affine généralisée.*

La preuve du théorème B peut se résumer de la manière très succincte suivante : soit  $T$  une surface plate tangente au flot radial. Étant affine,  $T$  est un tore ou une bouteille de Klein. Supposons ici que ce soit un tore. On montre que si  $M$  n'est pas une variété de Hopf ni un exemple de Benzécri, alors  $T$  est incompressible (cf. lemme 5.1). Son groupe fondamental est un sous-groupe  $H$  du groupe fondamental de  $M$  isomorphe à  $\mathbb{Z}^2$ . L'étape essentielle consiste à montrer que l'action de  $H$  sur le revêtement universel s'étend en une action de  $\mathbb{R}^2$ . Grâce à cette action, on découpe le revêtement universel en des domaines qui revêtent chacun un morceau affine élémentaire, homéomorphe au produit du tore par l'intervalle. On recompose la variété affine radiale en recollant ces morceaux affines. On vérifie que les variétés obtenues sont des suspensions affines généralisées.

Un résultat intermédiaire important de cette preuve est le suivant :

**THÉORÈME C.** — *Soit  $M$  une variété de dimension 3 fermée munie d'une structure affine radiale. Si le flot radial de  $M$  admet des orbites périodiques qui ne sont pas de type selle, alors  $M$  est une suspension affine généralisée.*

De ce travail, nous obtenons comme corollaire la classification des variétés affines radiales de dimension 3 *convexes*, i.e. celles pour lesquelles l'image de l'application développante est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^3$ . Une orbifold projective

réelle est dite *convexe* si l'image de son application développante est contenue dans un plan affine du plan projectif (*i.e.* le complémentaire d'une droite projective dans  $\mathbb{RP}^2$ ), et qu'elle est convexe dans ce plan affine (*cf.* [8], [14]). Une surface affine est dite *homogène* si le groupe de ses automorphismes affines agit transitivement sur elle-même.

**THÉORÈME D.** — *Les variétés fermées de dimension 3 munies d'une structure affine radiale convexe sont les exemples de Benzécri induits par une structure projective convexe sur une orbifold de caractéristique d'Euler négative ou nulle.*

Ce théorème se montre de la manière suivante : si l'image de l'application développante est un convexe contenant une droite affine complète, on montre aisément l'existence d'un plan préservé par un sous-groupe d'indice fini du groupe d'holonomie. Le théorème B permet alors de conclure. Dans l'autre cas, celui où l'image de l'application développante ne contient pas de droite affine complète, on dispose sur cette image d'une métrique riemannienne préservée par tous les automorphismes affines : celle construite dans [23]. Cette métrique donne alors lieu à une métrique sur la variété affine radiale pour laquelle le flot radial est isométrique. On peut alors utiliser la classification des flots isométriques en dimension 3. La preuve que nous donnons dans cet article n'invoque pas une telle classification. Elle utilise tous les résultats de cet article. Nous observons que l'adhérence d'une orbite est toujours (finiment revêtue par) un tore, de dimension 1, 2 ou 3. Si un de ces tores est unidimensionnel, on applique le théorème C. Si un de ces tores est de dimension 2, on applique le théorème B. Sinon, la variété  $M$  toute entière est elle-même finiment revêtue par le tore tridimensionnel. On applique alors le théorème A.

**REMERCIEMENTS.** — Ce travail a été effectué lors d'un séjour à l'Université Fédérale Fluminense (Niterói, Brésil), puis remanié à l'École Normale Supérieure de Lyon. Je remercie chaleureusement toute l'équipe du département de pós-graduação de l'U.F.F. pour les efforts qu'ils ont déployés pour rendre possible mon séjour dans cet institut. Je remercie également l'Institut de Mathématiques Pures et Appliquées pour son inestimable aide technique, mathématique et autre. Je remercie aussi vivement S. Choi pour m'avoir soumis comme problème la preuve du théorème D. Enfin, un grand merci au rapporteur qui m'a indiqué quel est le bon énoncé et la preuve du lemme de fermeture des assiettes, et qui a optimisé la preuve de la proposition 2.4.

## 2. Préliminaires

Soit  $M$  une variété fermée munie d'une  $(G, X)$ -structure, où  $G$  est un groupe de Lie agissant analytiquement sur une variété analytique  $X$  : il s'agit de la

donnée d'un atlas  $(U_i, f_i)$  de  $M$  tel que chaque carte est à valeur dans un ouvert de  $X$  :

$$f_i : U_i \longrightarrow V_i \subset X$$

et tel que chaque changement de carte  $g_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_j(U_i \cap U_j)$  est localement la restriction de l'action d'un élément de  $G$ . Nous supposons toujours que les intersections  $U_i \cap U_j$  sont connexes. Chaque changement de carte  $g_{ij}$  est alors défini par un unique élément de  $G$  que nous notons également  $g_{ij}$ .

Il est bien connu que ceci équivaut à la donnée d'un homéomorphisme local  $\mathbb{D}$  du revêtement universel  $\widetilde{M}$  de  $M$  dans  $X$ , et d'un morphisme  $\rho$  du groupe fondamental  $\Gamma$  de  $M$  dans  $G$ , vérifiant la relation d'équivariance suivante :

$$\forall x \in \widetilde{M}, \forall \gamma \in \Gamma, \quad \mathbb{D}(\gamma x) = \rho(\gamma)\mathbb{D}(x).$$

L'application  $\mathbb{D}$  est appelée *application développante* de la structure, et  $\rho$  le *morphisme d'holonomie*.

Deux tels couples  $(\mathbb{D}, \rho)$  et  $(\mathbb{D}', \rho')$  définissent la même  $(G, X)$ -structure si et seulement si il existe un élément  $g$  de  $G$  tel que :

$$\mathbb{D}' = g \circ \mathbb{D}, \quad \rho'(\gamma) = g\rho(\gamma)g^{-1}.$$

Les exemples de  $(G, X)$ -structures intervenant dans ce travail sont :

- Les structures projectives (réelles) sur les surfaces :  $G$  est alors le groupe des transformations projectives  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$  du plan projectif  $\mathbb{RP}^2$ . On peut aussi considérer ces structures comme étant des  $(\mathrm{P}^+ \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}), S^2)$ -structures, où  $\mathrm{P}^+ \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$  est le quotient de  $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$  par les homothéties de rapport positif, agissant sur la sphère  $S^2$  vue comme ensemble des demi-droites de  $\mathbb{R}^3$ .
- Les structures affines sur les variétés de dimension 3 :  $G$  est dans ce cas le groupe affine  $\mathrm{Aff}(3, \mathbb{R})$  agissant affinement sur  $\mathbb{R}^3$ .
- Les structures affines radiales :  $G$  est alors le groupe linéaire  $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$  agissant linéairement sur  $\mathbb{R}^3$ .

Il est clair que le troisième exemple est un cas particulier du second. Il est tout aussi clair que si une structure affine voit son groupe d'holonomie fixer un élément de  $\mathbb{R}^3$ , on peut, par une translation envoyant ce point fixe sur l'origine, la réduire à une structure affine radiale.

Pour notre étude, nous aurons besoin d'étendre aux orbifolds la notion de  $(G, X)$ -structure. Rappelons qu'une orbifold (cf. [19], [20]) est la donnée :

- d'une variété support  $\Sigma$ ;
- d'un recouvrement de  $\Sigma$  par des ouverts  $U_i$ ;
- pour chaque indice  $i$ , d'applications continues  $p_i : \widetilde{U}_i \rightarrow U_i$ ;

- de groupes finis d'homéomorphismes  $\Gamma_i$  de  $\tilde{U}_i$  dont les orbites sont exactement les préimages par  $p_i$  de points de  $U_i$  ;
- pour chaque paire d'indices  $(i, j)$  tels que  $U_i$  rencontre  $U_j$ , d'un ensemble  $\Gamma_{ij}$  d'applications partiellement définies de  $\tilde{U}_j$  vers  $\tilde{U}_i$  qui sont exactement tous les relevés relativement à  $p_i$  et  $p_j$  de l'application identité de  $U_i \cap U_j$ .

Un exemple typique d'orbifold est le quotient d'une surface fermée munie d'une métrique à courbure constante par l'action d'un groupe fini d'isométries. Ces orbifolds sont les *bonnes* au sens de Thurston. On peut définir dans le cas des orbifolds une notion de revêtement universel, analogue au cas des variétés. Une orbifold est bonne précisément quand son revêtement universel n'a pas de singularités, *i.e.* est une surface. On peut de même définir la notion de groupe fondamental de l'orbifold : il s'agit d'un groupe agissant sur le revêtement universel tel que le quotient de cette action s'identifie à l'orbifold. L'orbifold est dite munie d'une  $(G, X)$ -structure si les divers ouverts  $\tilde{U}_i$  sont choisis comme étant des ouverts de  $X$  de sorte que les éléments des  $\Gamma_i$  et des  $\Gamma_{ij}$  sont des restrictions d'éléments de  $G$ . Pour toutes ces notions, nous renvoyons à [19] et au chapitre 5 de [20].

PROPOSITION 2.1. — *Une orbifold munie d'une structure projective réelle est bonne. Elle s'identifie au quotient d'une surface projective réelle fermée par un groupe fini de transformations projectives.*

*Preuve.* — Les mauvaises orbifolds sont connues : voir table 5.2 de [20]. Leurs revêtements universels sont la sphère avec une singularité conique ou deux singularités coniques d'ordres différents. Il est aisé de voir que ces orbifolds n'admettent pas de structure projective réelle. Donc, une orbifold avec structure projective est finiment revêtue (au sens des orbifolds) par une surface projective réelle.  $\square$

REMARQUE 2.2. — Il serait aisé de montrer la réciproque, à savoir que les bonnes orbifolds admettent toutes des structures projectives réelles. Mais ce n'est pas notre propos ici.

## 2.1. Propriétés élémentaires des homéomorphismes locaux.

Dans cette section,  $f : M \rightarrow X$  désigne un homéomorphisme local entre deux variétés.

DÉFINITION 2.3. — Une *assiette* de  $f$  est un ouvert de  $M$  sur lequel  $f$  est injective.

LEMME DES ASSIETTES EMBOÎTÉES. — *Soient  $U$  et  $V$  deux assiettes de  $f$ . On suppose que l'intersection entre  $U$  et  $V$  est non vide, que  $U$  est connexe, et que l'image par  $f$  de  $V$  contient celle de  $U$ . Alors,  $U$  est contenue dans  $V$ .*

*Preuve.* — Pour montrer le lemme, il suffit de montrer que l'ouvert  $U \cap V$  est fermé dans le connexe  $U$ . Soit  $\bar{x}$  un élément de  $U$  limite d'une suite de points  $x_n$  de  $U \cap V$ . Soit  $f|_V$  la restriction de  $f$  à  $V$ . Alors, les  $f|_V^{-1}(f(x_n))$  convergent vers l'élément  $\bar{y} = f|_V^{-1}(f(\bar{x}))$  de  $V$ . Comme chaque  $x_n$  appartient à  $U \cap V$ ,  $f|_V^{-1}(f(x_n))$  est  $x_n$ . La limite  $\bar{y}$  est donc  $\bar{x}$ , qui appartient donc à  $V$ .  $\square$

Dans le lemme suivant, nous dirons qu'un sous-ensemble  $Y$  de  $X$  est *localement connexe dans  $X$*  si tout point de  $X$  adhérent à  $Y$  admet une base de voisinages ouverts dont l'intersection avec  $Y$  est connexe.

LEMME DE FERMETURE DES ASSIETTES. — *Soit  $U$  une assiette de  $f$  telle que son image  $f(U)$  est localement connexe dans  $X$ . Alors, la restriction de  $f$  à l'adhérence de  $U$  est injective.*

*Preuve.* — Soient  $\bar{x}_1$  et  $\bar{x}_2$  deux points adhérents à  $U$ , et de même image  $x$ . Soient  $\bar{W}_1$  et  $\bar{W}_2$  deux voisinages de  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  respectivement. Il s'agit de montrer que ces voisinages se rencontrent. Quitte à les diminuer, on peut supposer que ce sont des assiettes de  $f$ , qu'ils ont même image  $W$ , et que  $W \cap f(U)$  est connexe. Alors, pour chaque  $i = 1, 2$ , l'ensemble

$$U_i = \bar{W}_i \cap f^{-1}(W) \cap f^{-1}(f(U))$$

est une assiette (car ouvert dans  $\bar{W}_i$ ) connexe (car homéomorphe à son image  $W \cap f(U)$ ) rencontrant  $U$  (car contenant  $U \cap \bar{W}_i$ ) et d'image contenue dans  $f(U)$ . Par le lemme des assiettes emboîtées,  $U_1$  et  $U_2$  sont contenues dans  $U$ , et comme ils ont même image par  $f$ , ils coïncident. Ceci montre comme voulu que  $\bar{W}_1$  et  $\bar{W}_2$  se rencontrent.  $\square$

LEMME DE REMPLISSAGE DES DISQUES. — *Soit  $B$  un compact de  $M$  homéomorphe à une boule fermée de même dimension que  $M$ . On suppose que  $f(\partial B)$  borde dans  $X$  une boule fermée  $B'$  (mais on ne suppose pas que la restriction de  $f$  à  $\partial B$  soit injective). On suppose de plus que les points de  $B$  proches de  $\partial B$  ont leur image par  $f$  dans  $B'$ . Alors, la restriction de  $f$  à  $B$  est un homéomorphisme d'image  $B'$ .*

*Preuve.* — Soit  $\Delta$  l'intersection de  $f^{-1}(\partial B')$  avec  $B$ . C'est une sous-variété plongée de codimension 1 de  $B$ . Chaque composante connexe de  $\Delta$  déconnecte  $B$ . Soit  $B_0$  la composante connexe de  $B \setminus \Delta$  dont l'adhérence contient  $\partial B$ . Comme l'image de  $B_0$  par  $f$  rencontre  $B'$  mais pas  $\partial B'$ , elle est contenue dans  $B'$ . De plus, la frontière de  $f(B_0)$  est contenue dans  $f(\partial B_0) \subset \partial B'$ . Donc,  $f(B_0)$  est exactement l'intérieur de  $B'$ . La restriction de  $f$  à l'adhérence de  $B_0$  est un homéomorphisme local propre d'image  $B'$  : c'est donc un revêtement. Comme  $B'$  est simplement connexe, cette application est un homéomorphisme. On en déduit que  $B_0$  est l'intérieur de  $B$  tout entier. Ceci achève la preuve du lemme.  $\square$

## 2.2. Le flot radial.

Pour toute variété  $M$  munie d'une  $(G, X)$ -structure, tout tenseur sur  $X$  préservé par l'action du groupe d'holonomie de la structure induit un tenseur de même nature sur  $M$  : la construction s'effectue en tirant en arrière le tenseur sur  $\widetilde{M}$  par l'application développante. Ce tiré en arrière est alors préservé par les automorphismes de revêtement et passe donc au quotient en le tenseur annoncé sur  $M$ .

Nous utiliserons cette remarque essentiellement pour les feuilletages, étant clair que la condition d'intégrabilité pour les champs de plans est préservée par l'opération que nous venons de décrire. Dans ce rôle, le *flot radial* sera la vedette de notre étude. Il s'agit, dans le cas des structures affines radiales, du flot engendré par le champ de vecteurs induit sur  $M$  par le champ de vecteurs  $R$  de  $\mathbb{R}^3$ , où :

$$R = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Nous notons  $\Phi_R^t$  le flot radial, et  $\Phi_0^t$  le flot de  $\mathbb{R}^3$  engendré par  $R$ . Nous notons  $\Phi_R$  et  $\Phi_0$  les feuilletages de dimension 1 dont les feuilles sont les orbites de  $\Phi_R^t$  et de  $\Phi_0^t$ . Enfin, nous notons  $\widetilde{\Phi}_R^t$  le relevé dans  $\widetilde{M}$  de  $\Phi_R^t$ , et  $\widetilde{\Phi}_R$  le feuilletage de dimension 1 sous-tendu par  $\widetilde{\Phi}_R^t$ .

Il est à remarquer que la complétude de  $\Phi_R^t$ , et donc aussi celle de  $\widetilde{\Phi}_R^t$ , proviennent de la compacité de  $M$ . De manière plus générale, si un groupe de Lie connexe et simplement connexe  $L$  agit sur  $X$  en commutant avec chaque transformation d'holonomie, cette action se tire en arrière en une action de  $L$  sur  $M$ .

La terminologie «structure affine radiale» provient de l'existence du flot radial.

Nous notons  $Q_R$  le quotient de  $\widetilde{M}$  par la relation «être sur la même orbite de  $\widetilde{\Phi}_R^t$ ». Nous le munissons de la topologie quotient. Nous notons  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow Q_R$  l'application passage au quotient.

**PROPOSITION 2.4.** — *L'espace  $Q_R$  est homéomorphe au plan ou à la sphère. Dans le second cas,  $M$  est affinement isomorphe à une variété de Hopf affine.*

*Preuve.* — Nous notons  $p : \widetilde{M} \rightarrow M$  le revêtement universel de  $M$ . Soit  $\mathbb{D} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'application de revêtement.

Nous devons d'abord montrer que le flot est sans singularité. Ce fait est bien connu (cf. [18], [13]), mais nous en reproduisons ici la preuve, à titre d'illustration élémentaire de nos techniques.

Supposons *a contrario* que  $\Phi_R^t$  admet une singularité : ceci signifie que l'origine de  $\mathbb{R}^3$  admet une préimage  $x_0$  par  $\mathbb{D}$ . Soit  $U_0$  une assiette de  $\mathbb{D}$  contenant  $x_0$ . Soit  $U$  le saturé de  $U_0$  par  $\widetilde{\Phi}_R$ . Étant un homéomorphisme local d'une droite sur

une autre droite, la restriction de  $\mathbb{D}$  à chaque orbite de  $\tilde{\Phi}_R^t$  est injective. On en déduit que  $U$  est une assiette de  $\mathbb{D}$ . Étant saturé par  $\Phi_0^t$  l'ouvert  $\mathbb{D}(U)$  est  $\mathbb{R}^3$  tout entier. D'après le lemme de fermeture des assiettes,  $U$  est donc fermé. C'est donc  $\tilde{M}$  tout entier. On en déduit que  $x_0$  est l'unique préimage de l'origine par  $\mathbb{D}$ . À ce titre, il doit être fixé par tous les automorphismes de revêtement. On en déduit que  $M$  est simplement connexe, donc son propre revêtement universel. Or nous avons montré que  $\tilde{M}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . Ceci contredit la compacité de  $M$ .

Nous avons montré que le flot est régulier. Le difféomorphisme local  $\mathbb{D} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  est équivariant pour les actions de  $\mathbb{R}$  via les flots radiaux. Comme l'action de  $\Phi_0^t$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  est propre, il en est de même pour l'action de  $\tilde{\Phi}_R^t$  sur  $\tilde{M}$ . Donc, l'espace quotient  $Q_R$  est séparé. Comme l'action de  $\Phi_0^t$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  est errante (*i.e.* par chaque point passe l'image d'un plongement du disque ouvert dans  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  transverse au flot et qui rencontre chaque orbite du flot radial en au plus un point), il en est de même pour  $\tilde{\Phi}_R^t$ . Donc,  $Q_R$  est une variété de dimension 2, et la projection, une submersion. Comme l'action radiale sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  est libre, il en est de même pour l'action de  $\tilde{\Phi}_R^t$ . Donc, la projection est une fibration principale de groupe  $\mathbb{R}$ , d'espace total  $\tilde{M}$  et de base  $Q_R$ . La suite exacte d'homotopie de cette fibration montre alors que  $Q_R$  est simplement connexe. Il est donc homéomorphe au plan ou à la sphère.

Dans le second cas, l'application  $\mathbb{D}$  induit un homéomorphisme local de  $Q_R \simeq S^2$  sur l'espace des orbites de  $\Phi_0^t$  restreint à  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Ce dernier est lui aussi homéomorphe à la sphère. La sphère étant compacte et simplement connexe, cet homéomorphisme local doit être bijectif. Comme chaque orbite de  $\tilde{\Phi}_R^t$  est envoyée par  $\mathbb{D}$  sur une orbite de  $\Phi_0^t$ , il s'ensuit que  $\mathbb{D}$  est un homéomorphisme entre  $\tilde{M}$  et  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Comme  $M$  est compacte, le groupe d'holonomie doit contenir un automorphisme contractant. Le quotient de  $\mathbb{R}^3$  par cet automorphisme contractant est un revêtement fini de  $M$ . Ceci achève la preuve de la proposition.  $\square$

### 2.3. Notations.

*Dans le reste de cet article,  $M$  désigne une variété de dimension 3 fermée.*

Nous notons  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  le revêtement universel de  $M$ . Soit  $\Gamma$  le groupe fondamental de  $M$ .

Nous utiliserons fréquemment la terminologie suivante : pour tout sous-ensemble connexe par arcs  $S$  de  $M$ , nous appelons *relevé de  $S$*  toute composante connexe de  $p^{-1}(S)$  dans  $\tilde{M}$ . Nous noterons  $\pi_1(S)$  l'image du groupe fondamental du groupe fondamental de  $S$  dans  $\Gamma$  par l'application induite par l'inclusion. Pour chaque relevé  $\tilde{S}$  de  $S$ ,  $\pi_1(S)$  s'identifie au sous-groupe de  $\Gamma$ , vu comme groupe des automorphismes de revêtement, dont chaque élément envoie  $\tilde{S}$  sur

lui-même. Ainsi,  $S$  s'identifie au quotient de  $\widetilde{S}$  par l'action de  $\pi_1(S)$ . Le groupe  $\pi_1(S)$  n'est défini qu'à conjugaison près dans  $\Gamma$ ; cependant, nous le citerons toujours comme étant *le* groupe fondamental de  $S$ . Ce choix de terminologie peut sans doute amener à quelques ambiguïtés, mais les abus de langages que nous commettrons ainsi au cours de notre étude ne nous semble pas mener à confusion, et apportent une certaine fluidité à nos propos.

La variété  $M$  est équipée d'une structure affine radiale, dont nous notons  $\mathbb{D} : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  et  $\rho : \Gamma \rightarrow \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$  l'application développante et le morphisme d'holonomie, respectivement.

Nous reprenons les notations  $\Phi_R^t, \Phi_R, \Phi_0^t, \Phi_0, \widetilde{\Phi}_R^t, \widetilde{\Phi}_R$  introduites à la section 2.2 pour les divers flots radiaux et leurs feuilletages associés. Nous reprenons aussi la notation  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow Q_R$  pour l'espace des orbites de  $\Phi_R^t$ . Remarquons que l'action de  $\Gamma$  sur  $\widetilde{M}$  par automorphismes de revêtement induit une action de  $\Gamma$  sur  $Q_R$ . Un point fixe dans  $Q_R$  d'un élément  $\gamma$  de  $\Gamma$  correspond à une orbite périodique de  $\Phi_R^t$  dont une puissance est librement homotope à tout représentant de  $\gamma$  dans  $M$ . L'application développante induit deux applications ouvertes  $\mathbb{D} : Q_R \rightarrow \mathbb{R}P^2$  et  $\mathbb{D}^s : Q_R \rightarrow S^2$ , la première étant la composition de la seconde par le revêtement double du plan projectif par la sphère. L'application d'holonomie induit deux morphismes

$$\bar{\rho} : \Gamma \longrightarrow \mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SL}(3, \mathbb{R}), \quad \bar{\rho}^s : \Gamma \longrightarrow \mathrm{P}^+ \mathrm{GL}(3, \mathbb{R}).$$

Les groupes  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$  et  $\mathrm{P}^+ \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$  agissent naturellement sur le plan projectif et la sphère, et ces actions rendent équivariantes les applications  $\mathbb{D}$  et  $\mathbb{D}^s$ . Lorsque les  $\rho(\gamma)$  sont de déterminant positif, les  $\bar{\rho}^s(\gamma)$  sont dans le sous-groupe  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R}) \subset \mathrm{P}^+ \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ .

Nous dirons d'une surface  $T$  plongée dans  $M$  qu'elle est *affinement tangente au flot radial* si elle admet comme relevé une composante connexe de la préimage par  $\mathbb{D}$  d'un plan de  $\mathbb{R}^3$  passant par l'origine. Une telle surface est alors tangente au flot radial (au sens usuel) et est donc soit une bouteille de Klein, soit un tore. Nous appelons *trace de  $T$*  l'image par  $\pi$  d'un relevé de  $T$ . Une trace est une sous-variété plongée de  $Q_R$ . Elle est homéomorphe à la droite réelle si  $T$  est incompressible; elle est une courbe fermée simple sinon (rappelons que la surface est dite incompressible si l'application de  $\pi_1(T)$  dans  $\Gamma$  induite par l'inclusion est injective. Ceci équivaut à ce que tout relevé de  $T$  dans  $\widetilde{M}$  soit homéomorphe au plan).

Nous aurons besoin des conventions suivantes : un *plan affine* est le complémentaire dans  $\mathbb{R}P^2$  d'une droite projective. Un *demi plan affine* est une intersection de deux plans affines. Une partie de  $\mathbb{R}P^2$  est dite *affine* si elle est contenue dans un plan affine. Elle est dite *convexe* si elle est convexe au sens usuel dans un plan affine la contenant. Une *droite* est une droite projective de  $\mathbb{R}P^2$  privée

d'un point. Une composante connexe d'une droite projective privée de deux points est dite *segment* ou *demi droite*. Un *triangle convexe* est une composante connexe de  $\mathbb{R}P^2$  privé de trois droites projectives non concourantes. Nous étendons toutes ses notions à  $Q_R$  via  $\mathbb{D}$  : par exemple, une partie de  $Q_R$  est une droite si la restriction de  $\mathbb{D}$  à cette partie est injective, et si son image par  $\mathbb{D}$  est une droite de  $\mathbb{R}P^2$ . Nous ajoutons le préfixe  $\gamma$ - si l'objet de  $Q_R$  considéré est  $\gamma$  invariant, où  $\gamma$  est un élément de  $\Gamma$ . Nous étendons aussi ces notions à  $S^2$  via son revêtement double sur  $\mathbb{R}P^2$ .

Pour tout élément  $x$  de  $\mathbb{R}P^2$  — qui est une droite de  $\mathbb{R}^3$  — les plans de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $x$  définissent un feuilletage singulier de  $\mathbb{R}^3$ , que nous notons  $\mathbb{F}_x^0$ . Son tiré en arrière par  $\mathbb{D}$  est un feuilletage de  $\tilde{M}$  noté  $\tilde{\mathbb{F}}_x$ . Si  $x$  est  $\rho(\Gamma)$ -invariant,  $\tilde{\mathbb{F}}_x$  passe au quotient en un feuilletage  $\mathbb{F}_x$  de  $M$ . Le feuilletage singulier de  $\mathbb{R}P^2$  dont les feuilles sont les droites projectives passant par  $x$  est noté  $\mathbb{G}_x^0$ . Son tiré en arrière par  $\mathbb{D}$  est noté  $\mathbb{G}_x^0$ .

Dans  $GL(3, \mathbb{R})$ , tout élément  $A$  de  $GL(3, \mathbb{R})$  de déterminant positif est conjugué à l'une des matrices suivantes :

- Une matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}.$$

Si les valeurs absolues de  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  sont égales,  $A$  est dite *racine d'homothétie*. Si elles sont deux-à-deux distinctes,  $A$  est dite *hyperbolique*. Si de plus  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\nu$  sont tous positifs,  $A$  est *hyperbolique positif*. Enfin, si deux d'entre eux sont de même valeur absolue, mais pas la troisième,  $A$  est *diagonale double*.

- Une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda \cos \theta & \lambda \sin \theta & 0 \\ \lambda \sin \theta & -\lambda \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

C'est exactement le cas où  $A$  admet une valeur propre complexe (sauf lorsque le réel  $\theta$  est nul, auquel cas  $A$  est diagonale double). Dans le cas où  $\mu$  et  $\lambda$  ont même valeur absolue,  $A$  est une *similitude*. Une similitude est dite *rationnelle* ou *irrationnelle* selon que le rapport entre  $\theta$  et  $2\pi$  l'est ou non.

Lorsque  $\lambda$  et  $\mu$  n'ont pas même valeur absolue,  $A$  est un *siphon elliptique*. Nous parlons de siphon elliptique rationnel ou irrationnel selon une convention évidente.

- $A$  est un *siphon parabolique* si :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad |\lambda| \neq |\mu|.$$

- $A$  est *projectivement unipotent de première espèce* si :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad |\lambda| = |\mu|.$$

- $A$  est *projectivement unipotent de deuxième espèce* si :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

À conjugaison près, il n'y a que six sous-groupes de Lie abéliens connexes maximaux dans  $GL(3, \mathbb{R})$  :

- le groupe  $D$  de toutes les matrices diagonales ;
- le groupe  $T$  des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^u & 0 & s \\ 0 & e^u & t \\ 0 & 0 & e^u \end{pmatrix};$$

- le groupe  $P$  des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^u & t & 0 \\ 0 & e^u & 0 \\ 0 & 0 & e^v \end{pmatrix};$$

- le groupe  $U$  des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^u & s & t \\ 0 & e^u & 0 \\ 0 & 0 & e^u \end{pmatrix};$$

- le groupe  $C$  des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^u & s & t \\ 0 & e^u & s \\ 0 & 0 & e^u \end{pmatrix};$$

- le groupe  $S$  des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^u \cos \theta & e^u \sin \theta & 0 \\ -e^u \sin \theta & e^u \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & e^v \end{pmatrix}.$$

### 3. Exemples de variétés affines radiales

#### 3.1. Les exemples de Benzécri.

Dans cette section, nous montrons comment, à partir d'une structure projective sur une surface  $\Sigma$ , on peut construire une structure affine radiale sur le produit de  $\Sigma$  par le cercle. Cette famille d'exemples est due à Benzécri [3]. Nous reprenons la description de [6] (voir aussi [21]) en détaillant pour nos besoins futurs. Nous verrons aussi comment généraliser cette construction en partant d'une structure projective sur une orbifold et d'un automorphisme de cette structure.

Considérons tout d'abord une structure projective sur une surface  $\Sigma$ . Soient  $f_i : U_i \rightarrow V_i \subset S^2$  les cartes, et  $\bar{g}_{ij}$  les éléments de  $P^+GL(3, \mathbb{R})$  représentant les changements de carte. On peut supposer, quitte à diminuer les  $U_i$ , que chaque  $V_i$  est affine, au sens où il existe un grand cercle de  $S^2$  ne le rencontrant pas. Alors, l'intérieur de l'union des rayons de  $\mathbb{R}^3$  correspondant à  $V_i$  est un cône ouvert que nous notons  $W_i$ . Lorsque  $U_i \cap U_j$  est non-vide, nous choisissons un représentant  $g_{ij}$  dans  $GL(3, \mathbb{R})$  de  $\bar{g}_{ij}$ . Soit  $d_{ij}$  le déterminant de  $g_{ij}$ . Nous pouvons choisir librement la valeur absolue de  $d_{ij}$ , mais son signe est imposé.

Si l'intersection  $U_i \cap U_j \cap U_k$  est non vide, nous avons la relation de cocycle  $\bar{g}_{ij} \circ \bar{g}_{jk} \circ \bar{g}_{ki} = \text{id}$ . Le produit  $g_{ij} \circ g_{jk} \circ g_{ki}$  est donc une homothétie de déterminant positif  $d_{ij}d_{jk}d_{ki}$ . On en déduit qu'il est possible de choisir les divers  $g_{ij}$  de manière à ce que les  $g_{ij} \circ g_{jk} \circ g_{ki}$  soient triviaux lorsque  $U_i \cap U_j \cap U_k$  est non vide : il suffit par exemple d'imposer aux  $d_{ij}$  d'être de valeur absolue égale à 1.

Un tel choix étant effectué, sur l'union disjointe des  $W_i$  on identifie  $x$  à  $g_{ij}(x)$  à chaque fois que cela est possible. On obtient ainsi une variété  $\bar{W}$  de dimension 3, munie d'une structure affine radiale, qui fibre en droites sur  $\Sigma$ . Les fibres de cette fibration sont exactement les orbites du flot radial. Étant en droites, ce fibré admet une section  $S$ . Pour tout temps  $T$  non-nul, le temps  $T$  du flot radial est un difféomorphisme affine de  $\bar{W}$  agissant librement et proprement : en effet, ses grands itérés envoie l'image de la section  $S$  sur une autre section qui lui est disjointe. Le quotient de cette action est donc une variété affine radiale difféomorphe à  $\Sigma \times S^1$ . Nous appelons *exemple de Benzécri* toutes les variétés affines radiales construites de cette manière. Nous dirons aussi que ces structures affines radiales sont celles induites par la structure projective sur la surface  $\Sigma$ .

Dans cette construction, à structure projective sur  $\Sigma$  fixée, nous avons fait plusieurs choix : celui des relevés  $g_{ij}$  et du réel  $T$ . Le lecteur vérifiera aisément que ces choix sont paramétrés par  $H^1(\Sigma, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \simeq H^1(\Sigma \times S^1, \mathbb{R})$ . En fait, l'élément de  $H^1(\Sigma \times S^1, \mathbb{R})$  caractérisant la structure affine radiale, vu comme morphisme de  $H_1(\pi_1(\Sigma \times S^1), \mathbb{R})$ , s'interprète naturellement comme étant la composition du morphisme d'holonomie et de l'application déterminant de  $GL(3, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{R}$ .

En particulier, on en déduit que deux éléments différents de  $H^1(\Sigma \times S^1, \mathbb{R})$  définissent deux structures affines radiales différentes.

Nous pouvons résumer la discussion précédente par l'énoncé suivant :

**PROPOSITION 3.1.** — *L'espace de déformation des exemples de Benzécri sur la variété  $\Sigma \times S^1$  est isomorphe au produit de l'espace de déformation des structures projectives sur  $\Sigma$  et de  $H^1(\Sigma \times S^1, \mathbb{R})$ .*

Pour la définition de l'espace de déformations d'une  $(G, X)$ -structure, voir [15]. On déduit aussi de [14] et de la proposition précédente que l'espace de déformation des exemples de Benzécri est de dimension  $3 - 9\chi(\Sigma)$ .

La construction précédente se généralise de la manière suivante : nous devons tout d'abord définir la notion de tore affine radial  $\mathbb{T}(m, n, T)$  (avec  $0 \leq m < n$  et  $T > 0$ ), où  $m$  et  $n$  sont premiers entre eux. Il s'agit tout simplement des structures affines radiales sur le tore solide obtenu en suspendant la rotation d'angle  $2\pi m/n$  restreinte au disque de rayon 1 du plan euclidien, avec le temps de premier retour choisi constant égal à  $T/n$ . Pour cette structure, les orbites périodiques du flot radial sont toutes périodiques de période  $T$ , sauf une, dite singulière, qui est périodique de période  $T/n$ . Nous notons  $\mathbb{T}^*(m, n, T)$  la structure affine radiale sur le produit du tore par  $]0, 1[$  obtenue en enlevant l'orbite singulière.

Considérons une structure projective sur une orbifold  $O$ . Notons  $O^*$  la surface obtenue à partir de  $O$  en enlevant les singularités. La construction précédente équipe le produit  $M^*$  de  $O^*$  par le cercle d'une structure affine radiale à partir de la structure projective induite sur  $O^*$ , de sorte que les cercles  $\{x\} \times S^1$  sont des orbites périodiques du flot radial de même période  $T > 0$ . Soit  $x$  une singularité de  $O$  d'ordre  $n$ . Soit  $U$  un voisinage de  $x$  dans  $O^*$  projectivement isomorphe au quotient du disque de rayon un  $\tilde{U}$  de  $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}P^2$  quotienté par le groupe de rotation d'ordre  $n$  vu comme groupe de transformations projectives. Soit  $\mathbb{T}^*$  la partie de  $M^*$  au-dessus de  $U \setminus \{x\}$ . Il est aisé de voir que  $\mathbb{T}^*$  est affinement isomorphe à  $\mathbb{T}^*(m, n, T)$  ( $0 \leq m < n$ ). On peut donc recoller  $M^*$  et  $\mathbb{T}(m, n, T)$  le long de  $\mathbb{T}^*(m, n, T)$ . En effectuant de tels recollements au voisinage de chaque singularité, on obtient une structure affine radiale sur une variété de Seifert, dont le flot radial à toutes ses orbites périodiques. Pour cette structure affine, l'orbifold  $O$  s'identifie à l'espace des orbites du flot radial, et la structure projective initiale est celle induite par la structure projective transverse du flot radial.

Nous élargissons notre définition précédente en convenant de dire que la structure affine radiale sur le fibré de Seifert est induite par la structure projective de l'orbifold. Ces structures affines radiales sont elles aussi nommées *exemples de Benzécri*.

D'après la proposition 2.1, l'orbifold projective  $O$  est quotient fini d'une surface projective. On en déduit que les exemples de Benzécri provenant d'orbifolds

sont quotients finis de d'exemples de Benzécri provenant de surfaces projectives.

**PROPOSITION 3.2.** — *Les exemples de Benzécri obtenus à partir d'orbifolds projectives sont exactement les quotients affines finis d'exemples de Benzécri obtenus à partir de surfaces.*

*Preuve.* — Il s'agit de montrer que le quotient fini  $M_0$  d'un exemple de Benzécri  $M$  provenant d'une surface est un exemple de Benzécri provenant d'une orbifold. Or,  $M_0$  étant quotient de  $M$ , il est un fibré de Seifert, dont les fibres sont quotients de celles de  $M$ , i.e. les orbites de son propre flot radial. On vérifie que chacune de ses fibres singulières admet un voisinage affine de la forme  $\mathbb{T}(m, n, T)$ , puis qu'en dehors des fibres singulières,  $M_0$  est bien un exemple de Benzécri construit au-dessus d'une surface projective trouée. Nous laissons les détails au lecteur.  $\square$

En particulier, les variétés de Seifert supportant un exemple de Benzécri sont de classe d'Euler nulle. Le flot radial d'une telle structure admet une section totale.

**PROPOSITION 3.3.** — *Soit  $M$  une variété de dimension 3 munie d'une structure affine radiale. Cette structure est isomorphe à un exemple de Benzécri si et seulement si les orbites du flot radial associé à la structure sont toutes périodiques.*

*Preuve.* — D'après un théorème de Epstein [12] (qui est particulièrement simplifié dans notre cas de figure), si toutes les orbites du flot radial sont fermées, elles sont les fibres d'une fibration de Seifert sur une orbifold  $O$ . Comme le flot radial de  $\mathbb{R}^3$  est transversalement projectif, il en est de même pour le flot radial de  $M$  lui-même. L'orbifold  $O$  est ainsi naturellement munie d'une structure projective. C'est donc le quotient fini d'une surface projective  $\Sigma$  par un groupe fini d'automorphismes. On en déduit que  $M$  est finiment revêtu par un fibré en cercles  $M'$  au-dessus de  $\Sigma$ , dont les fibres sont les orbites du flot radial de la structure affine radiale relevée. D'après la proposition 3.2, il suffit donc d'établir la proposition dans le cas où  $O$  est une surface, et  $M$  un fibré en cercles.

Soit  $\delta$  l'élément de  $\Gamma$ , groupe fondamental de  $M$ , correspondant aux fibres. Soit  $e$  la classe d'Euler de la fibration. La puissance  $\delta^e$  est un élément du groupe dérivé de  $\Gamma$ . Donc, le déterminant de son image par le morphisme d'holonomie vaut 1. Or,  $\rho(\delta)$  doit préserver chaque orbite du flot radial de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . On en déduit que  $\rho(\delta)$  doit être une homothétie de rapport  $\exp(T)$  non nul. Il s'ensuit que  $e$  est nul. Ceci implique que le flot radial admet une section totale.

Considérons le groupe d'holonomie de la structure projective de  $O$ . Le groupe fondamental de  $O$  est le quotient de  $\Gamma$  par le sous-groupe central engendré par  $\delta$ . De plus, puisque  $e$  est nul, le groupe fondamental de  $O$  se relève dans  $\Gamma$ . Le groupe d'holonomie de  $O$  est la projection dans  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$  du groupe d'holonomie

$\rho(\Gamma)$  de  $M$ . Considérons les divers exemples de Benzécri associés à l'orbifold projective  $O$ , où les orbites du flot radial ont la période  $T$ . Puisque  $\rho(\Gamma)$  réalise dans  $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$  un relèvement du groupe d'holonomie de  $O$ , parmi ces exemples de Benzécri, il en existe un ayant le même groupe d'holonomie que  $M$ . Notons  $\mathbb{D}_0$  l'application développante de l'exemple de Benzécri. Il résulte facilement de la description précédente des exemples de Benzécri, et de la manière dont est construite la structure projective sur  $O$ , que  $\widetilde{\mathbb{D}}$  et  $\mathbb{D}_0$  ne diffèrent que le long du flot radial, *i.e.* il existe une fonction  $\tilde{f}$  sur  $\widetilde{M}$  à valeurs réelles telle que :

$$\forall \tilde{x} \in \widetilde{M}, \quad \mathbb{D}_0(\tilde{x}) = e^{\tilde{f}(\tilde{x})} \widetilde{\mathbb{D}}(\tilde{x}).$$

Cette fonction  $\tilde{f}$  est manifestement  $\Gamma$ -invariante. Elle passe donc au quotient en une application  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . De plus, la restriction de  $\tilde{f}$  à une orbite de  $\widetilde{\Phi}_R^t$  est manifestement constante :  $f$  est constante le long des orbites du flot radial. On en déduit que l'application  $F$  de  $M$  dans lui-même, qui envoie  $x$  sur  $\Phi_R^{f(x)}(x)$ , est un homéomorphisme qui envoie la structure initiale sur  $M$  sur celle induite par  $O$ .  $\square$

Pour construire les exemples de Benzécri, nous avons quotienté la variété  $\overline{W}$  par le temps  $T$  du flot radial. On peut quotienter par tout autre automorphisme affine agissant proprement et librement. Soit  $\tilde{\varphi}$  un automorphisme de l'orbifold projective  $O$ . Pour certains choix de la variété  $\overline{W}$ , *i.e.* des relevés  $g_{ij}$  des cocycles  $\tilde{g}_{ij}$ , il est possible (mais pas toujours !) de relever  $\tilde{\varphi}$  en un automorphisme affine  $\varphi$  de  $\overline{W}$ . Par exemple, il n'y a pas d'obstruction lorsqu'on a choisi les  $g_{ij}$  de déterminants  $\pm 1$ . Nous ne tenons pas à discuter davantage ici cette condition de relèvement. L'automorphisme relevé  $\varphi$  n'est défini qu'à translation près par le flot radial. Le flot radial sur  $\overline{W}$  admet une section totale compacte  $S$ . Quitte à composer  $\varphi$  par le temps  $T$  du flot radial, pour  $T$  assez grand,  $S$  est disjoint de son image par  $\varphi$ . On en déduit comme voulu que  $\varphi$  agit librement et proprement sur  $\overline{W}$ . Les variétés affines radiales fermées obtenues en quotientant par des  $\varphi$  convenables, *i.e.* relevés de  $\tilde{\varphi}$  agissant librement et proprement, puis par des groupes finis, sont appelées *les suspensions affines généralisées induites par le couple  $(O, \tilde{\varphi})$* . Remarquons que les variétés de Hopf affines ne sont que des cas particuliers de suspensions affines généralisées : elles correspondent au cas où l'orbifold sous-jacent est elliptique.

**PROPOSITION 3.4.** — *Les variétés affines radiales de dimension 3 dont le flot radial admet une section totale connexe sont précisément les suspensions affines généralisées.*

*Preuve.* — L'existence d'une section totale pour le flot radial est stable par revêtements finis. Les suspensions affines généralisées sont quotients finis de ceux obtenus en quotientant une variété affine radiale  $\overline{W}$  qui fibre sur une surface

projective. La section  $S$  déjà évoquée précédemment induit sur les quotients des sections au flot radial immergées. Ces sections peuvent être remplacées par des sections plongées par des techniques de couper-coller. Ceci établit que le flot radial d'une suspension affine généralisée admet toujours une section totale.

Inversement, soit  $M$  une variété affine radiale de dimension 3 dont le flot radial admet une section totale  $S$ . Soit  $\bar{\varphi}_0$  l'application de premier retour sur  $S$  le long du flot radial. La variété  $M$  est un fibré sur le cercle de fibre  $S$ . Soit  $\bar{W}_0$  le revêtement galoisien cyclique de  $M$  associé au noyau de la projection du groupe fondamental de  $M$  dans celui du cercle image de la fibration : il est homéomorphe à  $S \times \mathbb{R}$ . Le quotient de  $\bar{W}_0$  par le temps  $T$  du flot radial est une variété affine radiale dont le flot radial a toutes ses orbites périodiques. D'après la proposition 3.3,  $\bar{W}_0$  est affinement isomorphe au revêtement cyclique  $\bar{W}$  d'un exemple de Benzécri construit à partir d'une orbifold  $O$  (attention :  $O$  n'est pas nécessairement la surface  $S$ ). Comme  $\varphi$  échange les orbites du flot radial, il induit un automorphisme projectif  $\bar{\varphi}$  de  $O$ , dont il est un relevé. La variété  $M$ , qui est le quotient de  $\bar{W}_0$  par  $\varphi$  est donc une suspension affine généralisée.  $\square$

LEMME 3.5. — *Soit  $S$  une surface fermée de caractéristique d'Euler négative, munie d'une structure projective. Le groupe des automorphismes de  $S$  est alors fini.*

*Preuve.* — Parmi les structures projectives sur les surfaces, se distinguent celles dites *convexes* (cf. [14]) : ce sont celles pour lesquelles l'application développante est un homéomorphisme sur son image, cette image étant un ouvert convexe du plan projectif. Le groupe d'holonomie de la structure préserve alors une métrique sur l'ouvert convexe (la métrique de Hilbert, cf. [4, ch. IV, 28]). La surface projective admet donc une métrique préservée par tous ses automorphismes affines. On en déduit que le groupe des automorphismes affines est fini.

Dans le cas général, toute surface se décompose en un nombre fini de surfaces projectives convexes à bord géodésique et des anneaux (cf. [7], [8], [9]). De plus, si les surfaces convexes sont choisies maximales, cette décomposition est unique. Pour les surfaces à caractéristique d'Euler négative, il existe au moins un morceau convexe qui n'est pas un anneau. Les automorphismes projectifs permutent les morceaux convexes qui ne sont pas des anneaux. Soit  $G_0$  le groupe des transformations projectives qui préservent chaque morceau convexe : c'est un sous-groupe d'indice fini du groupe de toutes les transformations projectives. La restriction à chaque morceau projectif convexe des éléments de  $G_0$  forment un groupe fini, toujours en raison de l'existence de la métrique de Hilbert. Le lemme s'en déduit immédiatement.  $\square$

COROLLAIRE 3.6. — *Une suspension affine généralisée dont l'orbifold sous-jacente est de caractéristique d'Euler négative est un exemple de Benzécri, i.e. son flot radial n'a que des orbites périodiques.*

COROLLAIRE 3.7. — *Tout quotient affine fini d'une suspension affine généralisée est aussi une suspension affine généralisée.*

PROPOSITION 3.8. — *Soit  $M$  une variété affine radiale fermée de dimension 3. On suppose qu'il existe un plan de  $\mathbb{R}^3$  passant par l'origine globalement préservé par le groupe d'holonomie et qui évite l'image de l'application développante. Alors,  $M$  est une suspension de Benzécri induite par une un automorphisme affine d'une orbifold affine.*

*Preuve.* — On peut supposer que le plan  $\rho(\gamma)$ -invariant est le plan  $\{z = 0\}$ , et que l'image de  $\mathbb{D}$  est contenue dans le demi-espace  $\{z > 0\}$ . Considérons la 1-forme  $dz/z$  sur  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z = 0\}$ . Son tiré en arrière par l'application développante passe au quotient en une 1-forme fermée  $\omega$  sur  $M$ . Cette 1-forme évaluée sur le champ de vecteurs engendrant le flot radial prend partout la valeur 1. On peut approximer  $\omega$  par des 1-formes du type  $q^*(d\theta)$ , où  $q$  est une fibration de  $M$  sur le cercle, et où  $d\theta$  est la forme de volume canonique sur le cercle. Si l'approximation est suffisamment bonne, les fibres de  $q$  sont transverses au flot radial. Ce sont alors des sections totales du flot radial. On conclut grâce à la proposition 3.4 que  $M$  est une suspension affine généralisée. Remarquons que l'orbifold projective sous-jacente est telle que son groupe d'holonomie préserve une droite projective qui ne rencontre pas l'image de son application développante. Ceci entraîne qu'elle est projectivement isomorphe à une orbifold affine.  $\square$

3.2. Variétés affines diagonales exceptionnelles.

Dans cette section, nous étudions un cas particulier de suspensions de Benzécri. Cette étude nous sera utile lors de la preuve du théorème B.

Nous notons  $(x_1, x_2, x_3)$  les coordonnées dans  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $G$  le groupe des matrices diagonales d'ordre 3 à coefficients positifs; il est isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . Nous notons  $G_i$  le sous-groupe de  $G$  des matrices dont le coefficient  $(i, i)$  vaut 1 ( $i = 1, 2, 3$ ). Soit  $\Lambda$  un sous-groupe de  $G$  isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , et  $\mathbb{E}(\Lambda)$  le plus petit sous-groupe de Lie connexe de  $G$  contenant  $\Lambda$ . C'est l'espace vectoriel engendré par  $\Lambda$  dans  $\mathbb{R}^3 \simeq G$ . Pour tout indice  $i$ , nous notons  $\mathbb{E}_i(\Lambda)$  la projection de  $\mathbb{E}(\Lambda)$  dans  $G_i$  (i.e., on garde les mêmes coefficients des matrices, sauf le coefficient  $(i, i)$  qu'on remplace par 1).

Dans ce qui suit, les  $\epsilon_i$  désigne des éléments de  $\{+1, -1\} = \{+, -\}$ . Les orbites bidimensionnelles et tridimensionnelles de l'action de  $G$  sur  $\mathbb{R}^3$  sont :

$$\begin{aligned} P_1^{\epsilon_1 \epsilon_2} &= \{ \epsilon_1 x_2 > 0, \epsilon_2 x_3 > 0 \}, \\ P_2^{\epsilon_1 \epsilon_2} &= \{ \epsilon_1 x_1 > 0, \epsilon_2 x_3 > 0 \}, \\ P_3^{\epsilon_1 \epsilon_2} &= \{ \epsilon_1 x_1 > 0, \epsilon_2 x_1 > 0 \}, \\ C^{\epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon_3} &= \{ \epsilon_1 x_1 > 0, \epsilon_2 x_2 > 0, \epsilon_3 x_3 > 0 \}. \end{aligned}$$

Les conditions pour que l'action de  $\Lambda$  sur chacune de ces orbites soit libres et proprement discontinues sont simples :

- L'action sur  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  est libre si et seulement si  $\mathbb{E}(\Lambda)$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ , le quotient étant alors homéomorphe à  $T \times ]0, 1[$ .
- L'action sur  $P_i^{\epsilon_1\epsilon_2}$  est libre si et seulement si  $\mathbb{E}_i(\Lambda)$  est  $G_i$  tout entier. Si cette condition est vérifiée, nous avons alors mieux : l'action de  $\Lambda$  sur l'union de  $P_i^{\epsilon_1\epsilon_2}$  et d'un quadrant  $C^{\epsilon'_1\epsilon'_2\epsilon'_3}$  contenant  $P_i^{\epsilon_1\epsilon_2}$  dans son adhérence est libre et proprement discontinue, le quotient de cette action étant alors homéomorphe à  $T \times ]0, 1[$ .

Nous notons  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  l'union d'un quadrant  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  et de deux quarts de plan  $P_i^{\epsilon'_1\epsilon'_2}$  et  $P_j^{\epsilon''_1\epsilon''_2}$  contenus dans son adhérence. La question qui nous intéresse ici est la suivante : à quelle condition  $\Lambda$  agit-il librement et proprement discontinument sur  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  ?

Pour que cette question admette des réponses intéressantes, il faut pour le moins que  $\mathbb{E}(\Lambda)$  vérifie les critères mentionnés ci-dessus, *i.e.* que  $\mathbb{E}_i(\Lambda)$  et  $\mathbb{E}_j(\Lambda)$  soient de dimension 2, ce que nous supposons être. L'action de  $\mathbb{E}(\Lambda)$  sur  $\mathbb{R}^3$  privée de l'origine est alors libre. Fixons une orientation de  $\mathbb{E}(\Lambda)$ , et munissons  $\mathbb{R}^3$  de son orientation usuelle. Ceci munit naturellement d'une orientation transverse l'action de  $\mathbb{E}(\Lambda)$ . Nous disons alors, selon des conventions évidentes, que  $P_i^{\epsilon_1\epsilon_2}$  est  $\Lambda$ -rentrant dans  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  si son orientation transverse induite par celle de  $\mathbb{E}(\Lambda)$  est rentrante dans  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ , et  $\Lambda$ -sortant de  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  sinon.

LEMME 3.9. — *L'action de  $\Lambda$  sur  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  est libre et proprement discontinue si et seulement si  $P_i^{\epsilon'_1\epsilon'_2}$  et  $P_j^{\epsilon''_1\epsilon''_2}$  ne sont pas simultanément  $\Lambda$ -rentrant dans  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  ou  $\Lambda$ -sortant de  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ .*

*Preuve.* — Si l'action de  $\Lambda$  est libre et proprement discontinue, son espace quotient est une variété à bord, que nous notons  $W$ . L'action de  $\mathbb{E}(\Lambda)$  passe au quotient en une action libre du tore  $\mathbb{E}(\Lambda)_{|\Lambda}$  sur  $W$ . Donc,  $W$  est homéomorphe à  $T \times [0, 1]$ , chaque facteur  $T \times \{t\}$  étant une orbite de  $\mathbb{E}_\Lambda$ . Si l'orientation transverse de  $T \times \{0\}$  est rentrante dans  $W$ , celle de  $T \times \{1\}$  doit être sortante de  $W$ , et vice-versa. Cette observation se relève en le critère nécessaire annoncé.

Inversement, supposons que  $P_i^{\epsilon'_1\epsilon'_2}$  est  $\Lambda$ -rentrant dans  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ , et que  $P_j^{\epsilon''_1\epsilon''_2}$  est  $\Lambda$ -sortant de  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ . Alors, ceci implique que chaque orbite de  $\mathbb{E}(\Lambda)$  contenue dans  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  déconnecte  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ . Nous savons déjà que les actions de  $\Lambda$  sur  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \setminus P_i^{\epsilon'_1\epsilon'_2}$  et  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \setminus P_j^{\epsilon''_1\epsilon''_2}$  sont libres et propres. Il s'agit donc de montrer que pour tout compact  $K$  de  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$ , l'ensemble des éléments  $\lambda$  de  $\Lambda$  pour lesquels  $K$  rencontre  $\lambda K$  est fini. Soit  $F$  une orbite de  $\mathbb{E}(\Lambda)$  contenue dans  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  :  $K$  est l'union de deux compacts  $K_i$  et  $K_j$ ,  $K_i$  (resp.  $K_j$ ) étant l'adhérence de la composante connexe de  $K \setminus F$  contenue dans la même

composante connexe de  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \setminus F$  que  $P_i^{\epsilon'_1\epsilon'_2}$  (resp.  $P_j^{\epsilon''_1\epsilon''_2}$ ). Un  $\lambda K_i$  (resp.  $\lambda K_j$ ) ne peut rencontrer  $K$  qu'en  $K_i$  (resp.  $K_j$ ). L'action de  $\Lambda$  sur  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  est donc bien proprement discontinue puisqu'elle l'est sur  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \setminus P_i^{\epsilon'_1\epsilon'_2}$  et  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \setminus P_j^{\epsilon''_1\epsilon''_2}$ .  $\square$

Le quotient de  $W_{ij}^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  par  $\Lambda$  est muni d'une  $(G, \mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ -structure, qui est un cas particulier de structure affine radiale. Nous l'appelons  *$\Lambda$ -morceau diagonal élémentaire*. Chaque morceau élémentaire est homéomorphe à  $T \times [0, 1]$  et naturellement muni d'une action libre du tore, qui de plus est transverse au flot radial à l'intérieur. Il est naturel d'espérer recoller ces morceaux pour obtenir une variété affine radiale sur un fibré en tores sur le cercle. Nous expliquons à suivre comment effectuer ces recollements.

Le cas où tous les quarts de plans  $P_i^{\epsilon'_1\epsilon'_2}$  contenus dans l'adhérence d'un quadrant  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  sont simultanément  $\Lambda$ -rentrants dans  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  ou  $\Lambda$ -sortants de  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3}$  ne nous intéresse pas : on ne peut pas dans ce cas effectuer un seul passage au quotient. On peut supposer, quitte à échanger les coordonnées de  $\mathbb{R}^3$  (mais sans effectuer la conjugaison dans  $G$  correspondante), que  $P_2^{++}$  est  $\Lambda$ -rentrant dans  $C^{+++}$ , et que  $P_1^{++}$  et  $P_3^{++}$  sont  $\Lambda$ -sortants de  $C^{+++}$ . La situation est alors représentée par la figure 1.

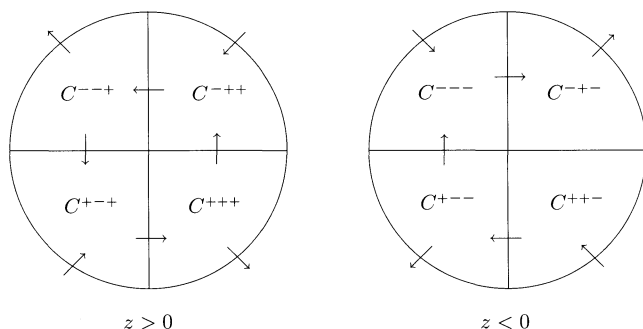


Figure 1. Orientation transverse des quarts de plans.

Celle-ci s'interprète de la manière suivante : chaque disque est la projection stéréographique d'une hémisphère de  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ , le premier étant la projection de  $S^2 \cap \{z \geq 0\}$ , le second celle de  $S^2 \cap \{z \leq 0\}$ . Nous y indiquons les intersections  $C^{\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_3} \cap S^2$  qui sont bordées par des segments correspondants aux  $S^2 \cap P_i^{\epsilon'_1\epsilon'_2}$ . L'orientation transverse des  $P_i^{\epsilon'_1\epsilon'_2}$  sont indiquées sur la figure.

Nous indiquons une suite de quadrants successifs par un chemin orienté  $\tau$  visitant les quadrants successifs, et passant de l'un à l'autre à travers un segment. Nous interdisons les demi-tours : si  $\tau$  pénètre dans un quadrant par un certain segment, il doit en ressortir par un autre segment. Nous pouvons considérer  $\tau$

comme étant un chemin dans  $\mathbb{R}^3$  privé des axes de coordonnées et transverse aux  $P_i^{\epsilon'_1 \epsilon'_2}$ . Nous notons également  $\tau$  ce chemin dans  $\mathbb{R}^3$ . Quitte à effectuer une nouvelle permutation des coordonnées, nous pouvons supposer que  $\tau$  part du quart de plan  $P_2^{++}$ , se termine en un autre quart de plan, et que  $C^{+++}$  est le premier quadrant qu'il traverse.

La condition nécessaire et suffisante pour que le chemin orienté  $\tau$  représente une suite de recollements de  $\Lambda$ -morceaux élémentaires est la suivante : les orientations transverses qu'il induit sur les  $P_i^{\epsilon'_1 \epsilon'_2}$  doivent être les mêmes que celles induites par une orientation de  $\mathbb{E}(\Lambda)$ . En d'autres termes, les flèches indiquées dans la figure 1 indiquent la seule direction par laquelle  $\tau$  doit traverser le segment. La figure montre alors qu'on peut paramétrer les recollements successifs possibles par une suite d'entiers positifs  $k_1, k_2, \dots, k_p$ , où  $k_1$  est le nombre de demi-tours autour de  $(0, 0, 1)$  effectués par  $\tau$  dans l'hémisphère  $\{z > 0\}$  avant de pénétrer dans l'hémisphère  $\{z < 0\}$ ;  $k_2$  le nombre de demi-tours autour de  $(0, 0, -1)$  effectués par  $\tau$  dans l'hémisphère  $\{z < 0\}$  avant de pénétrer à nouveau dans l'hémisphère  $\{z > 0\}$ , etc.

Notons  $C_1, C_2, \dots, C_n$  les quadrants successivement visités par  $\tau$ . Notons  $P_i$  le quart de plan commun aux adhérences de  $C_i$  et de  $C_{i+1}$ , et notons enfin  $P_0$  et  $P_n$  les quarts de plans initial et final de  $\tau$ . Soit  $W_i$  l'union de  $C_i$ , de  $P_{i-1}$  et de  $P_i$ . Sur l'union disjointe des  $\{i\} \times W_i$  nous identifions  $\{i\} \times \{x\}$  et  $\{i+1\} \times \{x\}$  lorsque  $x$  appartient à  $P_i$ . On obtient alors une variété à bord  $\widehat{W}_\tau$ , homéomorphe à  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ , munie d'une application ouverte  $\widehat{\mathbb{D}} : \widehat{W}_\tau \rightarrow \mathbb{R}^3$  et d'une action libre de  $\mathbb{E}(\Lambda)$ . Notons  $W_\Lambda^\tau$  le quotient de l'action de  $\Lambda$  sur  $\widehat{W}_\tau$  : c'est une variété à bord homéomorphe à  $T \times [0, 1]$  union de  $\Lambda$ -morceaux diagonaux élémentaires. Soit enfin  $A$  un élément de  $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$  envoyant  $W_n$  sur  $W_1$ ,  $P_{n-1}$  sur  $P_0$  et  $P_n$  sur  $P_1$ . Remarquons qu'une puissance de la matrice  $A$  commute avec chaque élément de  $G$  (car elle préserve l'union des axes de coordonnées), et que  $A$  elle-même normalise  $G$  dans  $\mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ . Elle passe donc au quotient  $W_\Lambda^\tau$  en un recollement du dernier morceau élémentaire sur le premier.

On obtient ainsi une variété affine radiale finiment revêtue par le tore tridimensionnel, dont le groupe d'holonomie est engendré par  $A$  et  $\Lambda$ . L'application développante se décrit aisément, nous laissons au lecteur le soin de cette description. Les variétés affines radiales obtenues de cette manière, ainsi que leurs quotients finis, sont appelées *variétés affines diagonales exceptionnelles*.

La dynamique du flot radial se décrit aisément : chaque composante de bord d'un morceau élémentaire est un tore sur lequel le flot radial se restreint un flot linéaire dont toutes les orbites sont denses, ou dont toutes les orbites sont périodiques. Chaque orbite contenue à l'intérieur d'un morceau élémentaire s'accumule sur chacune des composantes de bord.

Il existe toujours un élément  $\lambda$  de  $\Lambda$  de type hyperbolique, i.e. dont l'action sur  $\mathbb{R}P^2$  n'admet pas de ligne de points fixes. Quitte à prendre un revêtement

fini de la variété diagonale, on peut supposer que  $A$  commute avec  $\lambda$ . Au lieu de considérer les quotients des  $C_i$  par  $\Lambda$ , considérons leurs quotients par les puissances de  $\lambda$ . Ce sont des copies du produit de l'anneau par  $\mathbb{R}$ . Recollons ces copies le long du chemin  $\tau$ , et identifions la dernière copie à la première par le passage au quotient de  $A$ . On obtient alors une variété affine radiale ouverte de dimension 3, revêtement cyclique de la variété affine diagonale exceptionnelle. Nous la notons  $\widehat{W}$ . Remarquons aussi que le quotient de chaque  $C_i \cap S^2$  par l'action de  $\lambda$  est un anneau. Recollons ces anneaux le long de  $\tau$ , et identifions le dernier anneau au premier par  $A$  : on obtient un tore projectif réel  $T$ . Il est clair que  $\widehat{W}$  fibre sur  $T$ , les fibres étant les orbites du flot radial. Cette fibration est nécessairement triviale : il existe donc un plongement du tore dans  $\widehat{W}$  transverse au flot radial. Ce plongement donne lieu à une immersion du tore dans la variété diagonale. Par des techniques de «couper-coller», on obtient une surface compacte plongée dans la variété diagonale qui est une section totale du flot radial. Les variétés diagonales sont donc toutes des suspensions affines généralisées. Cette surface est un tore ou une bouteille de Klein, munie d'une structure projective réelle (celle induite par la structure transverse au flot radial).

On obtient de cette manière toutes les structures projectives non affines sur le tore ou la bouteille de Klein, au sens où pour chacune de ces structures projectives, il existe une variété diagonale dans laquelle la surface se plonge en une section totale du flot radial, de telle sorte que la structure projective induite par le flot coïncide avec la structure projective initiale (comparer avec la description de ces structures dans [21] ou [11]).

#### 4. Orbites périodiques du flot radial

Dans cette section, nous prouvons la proposition suivante :

**PROPOSITION 4.1.** — *Soit  $M$  une variété affine radiale. On suppose que  $M$  n'est ni une variété de Hopf affine, ni un exemple de Benzécri. Alors, l'union des orbites périodiques du flot radial est une union finie, éventuellement vide, d'orbites périodiques de type selle, et de surfaces affinement tangentes au flot radial plongées dans  $M$  de manière incompressible.*

Quitte à prendre des revêtements finis, on suppose dans ce qui suit que  $M$  est orientable, et que tous les feuilletages intervenant dans l'étude sont orientés et transversalement orientés. Nous supposons que  $M$  n'est ni une variété de Hopf, ni un exemple de Benzécri. D'après la proposition 2.4,  $Q_R$  est homéomorphe au plan. Soit  $\theta_0$  une orbite périodique de  $\Phi_R^t$ . Nous en choisissons un relevé  $\tilde{\theta}_0$  dans  $\tilde{M}$ . Soit  $\gamma_0$  un générateur du groupe des éléments de  $\Gamma$  préservant  $\tilde{\theta}_0$ . Remarquons que  $\gamma_0$  est d'ordre infini dans  $\Gamma$ . Notons  $x_0 = \pi(\tilde{\theta}_0)$ ,  $y_0 = \mathbb{D}(x_0)$  et  $y_0^s = \mathbb{D}^s(x_0)$ . Nous étudions une par une toutes les possibilités.

#### 4.1. Premier cas : $\rho(\gamma_0)$ est une racine d'homothétie.

Alors, quitte à remplacer  $\gamma_0$  par une de ses puissances, l'action de  $\bar{\rho}(\gamma_0)$  sur  $\mathbb{R}P^2$  est triviale. Soit  $x$  un point fixe quelconque de  $\gamma_0$ , soit  $U$  une assiette connexe de  $\mathbb{D}$  contenant  $x$ . Alors,  $U$  et  $\gamma_0 U$  sont deux assiettes ayant la même image par  $\mathbb{D}$  et contenant  $x$ . D'après le lemme des assiettes emboîtées elles sont donc égales. On en déduit que  $U$  est contenu dans l'ensemble des points fixes de  $\gamma_0$ . Cet ensemble est donc ouvert. Étant manifestement fermé, cet ensemble doit être  $Q_R$  tout entier par connexité de celui-ci. L'action de  $\gamma_0$  est donc triviale. D'après la proposition 3.3,  $M$  est affinement isomorphe à un exemple de Benzécri. Contradiction.

#### 4.2. Deuxième cas : $y_0$ est point fixe attractif ou répulsif de $\rho(\gamma_0)$ .

Quitte à inverser  $\gamma_0$ , on peut supposer que  $y_0$  est un point fixe répulsif. Soit  $V_0$  le bassin de répulsion de  $y_0$  pour  $\rho(\gamma_0)$  : c'est un plan affine. Soit  $U_0$  une assiette de  $\mathbb{D}$  contenant  $x_0$ , contenue dans le bassin de répulsion de  $x_0$ . L'union des  $\gamma_0$ -itérés de  $U_0$  est elle aussi une assiette de  $\mathbb{D}$  : on peut donc supposer que  $U_0$  est le bassin de répulsion tout entier. Son image par  $\mathbb{D}$  est le plan affine  $V_0$  tout entier. Par ailleurs, l'ouvert  $W = p(\pi^{-1}(U_0))$  s'interprète comme étant le saturé par  $\Phi_R^t$  d'un petit disque transverse à  $\theta_0$ . L'ouvert  $W$  est homéomorphe à un tore solide ouvert. On en déduit que les itérés  $\gamma U_0$  ( $\gamma \in \Gamma$ ) sont deux-à-deux disjoints ou confondus, et  $\gamma U_0 = U_0$  si et seulement si  $\gamma$  est une puissance de  $\gamma_0$ . Considérons un point de l'adhérence de  $W$  dans  $M$ . Soit  $x$  la projection dans  $Q_R$  d'un relevé dans  $\tilde{M}$  de ce point : il existe une suite de points  $x_n$  dans  $U_0$ , et une suite d'éléments  $\gamma_n$  dans  $\Gamma$  tels que les  $\gamma_n x_n$  convergent vers  $x$ . Soit  $U$  une assiette convexe de  $\mathbb{D}$  contenant  $x$  : à partir d'un certain rang, les  $U_n = \gamma_n U_0$  rencontrent tous  $U$ . Notons  $d_n$  la frontière de  $U_n$ . D'après le lemme des assiettes emboîtées, comme  $\mathbb{D}(U)$  est convexe et que  $\mathbb{D}(U_n)$  est un plan affine,  $d_n \cap U_n$  est connexe et l'intersection entre  $U$  et  $U_n$  est une des deux composantes connexes de  $U \setminus d_n$  (dans le cas où  $d_n$  ne rencontre pas  $U$ ,  $U$  est entièrement contenu dans  $U_n$ ). Comme les  $U \cap U_n$  sont deux-à-deux disjoints ou confondus, on en déduit que l'union de leurs adhérences est fermée dans  $U$ . Donc,  $x$  appartient à l'adhérence d'un des  $U_n$ . En d'autres termes, l'adhérence de  $W$  dans  $M$  est  $p(\pi^{-1}(\bar{U}))$ , où  $\bar{U}$  est l'adhérence de  $U$ . On en déduit que  $\partial W$  est  $p(\pi^{-1}(\partial U))$ , et est donc une sous-variété plongée de  $M$  de dimension 2. Cette surface est compacte et affinement tangente au flot radial : c'est donc une union finie de tores et de bouteilles de Klein (cf. section *notations*). Soit  $T$  une ses composantes connexes, et  $\tilde{T}$  un relevé de  $T$  contenu dans  $\pi^{-1}(\partial U)$ .  $\mathbb{D}(\tilde{T})$  est contenu dans la droite projective  $\partial V_0$ . Donc,  $\rho(\pi_1(T))$  contient un sous-groupe d'indice deux qui préserve  $V_0$ . On en déduit que  $\pi_1(T)$  contient un sous-groupe d'indice deux qui préserve  $U_0$ . Donc,  $T$  n'est pas plongé de manière incompressible. Il s'ensuit que la trace  $\pi(\tilde{T})$  n'est pas une droite immergée dans  $Q_R$ , mais une courbe fermée simple. Devant être

contenue dans  $\partial U_0$ , cette courbe doit être  $\partial U_0$  tout entier. L'adhérence de  $W$  dans  $M$  est donc un tore solide. D'après le lemme de fermeture des assiettes, la restriction de  $\mathbb{D}^s$  à l'adhérence de  $U_0$  est un homéomorphisme sur son image, qui est une hémisphère fermée de  $S^2$ . On peut élargir légèrement cette assiette en une autre assiette de  $\mathbb{D}^s$  contenant strictement l'adhérence de  $U_0$ . Soit  $U_1$  l'union des  $\gamma_0$ -itérés d'une telle assiette : c'est aussi une assiette, et l'image par  $\mathbb{D}^s$  de  $U_1$  est la sphère privée d'un point  $y_1^s$  (l'opposé de  $y_0^s$ ). D'après le lemme de fermeture des assiettes, la frontière de  $U_1$  est soit vide, soit réduite à un singleton (une préimage de  $y_1^s$ ). D'après la proposition 2.4, le second cas ne se produit que si  $M$  est une variété de Hopf affine. Dans le premier cas, par connexité de  $Q_R$ ,  $U_1$  est  $Q_R$  tout entier. L'image de  $\mathbb{D}^s$  est donc le complémentaire de  $y_1^s$  dans  $S^2$ . Donc,  $\rho^s(\Gamma)$  fixe  $y_1^s$  et  $y_0^s$ . On en déduit que  $\Gamma$  fixe  $x_0$ , et est donc cyclique (il est le groupe engendré par  $\gamma_0$ ). Or,  $\widetilde{M}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}^3$  puisqu'il fibre en  $\mathbb{R}$  sur le plan : comme  $M$  est compacte, il est absurde que son groupe fondamental soit cyclique. Le deuxième cas est donc impossible. Remarquons que nous avons ainsi montré que la matrice  $\rho(\gamma_0)$  ne peut être un siphon elliptique que si elle est diagonale double.

### 4.3. Troisième cas : $\rho(\gamma_0)$ est une similitude.

Dans ce cas,  $\bar{\rho}^s(\gamma_0)$  (ou son carré) préserve la structure conforme de la sphère ronde  $S^2$ . On peut identifier la sphère au plan projectif complexe  $\widehat{\mathbb{C}}$ , ce qui identifie  $\bar{\rho}^s(\gamma_0)$  à la transformation qui à  $z$  associe  $e^{i\theta}z$ . Remarquons que comme le premier cas (section 4.1) a été exclu, et que  $\gamma_0$  est d'ordre infini dans  $\Gamma$ , le rapport entre  $\theta$  et  $2\pi$  est irrationnel. Munissons  $Q_R$  de la structure conforme obtenue en tirant en arrière par  $\mathbb{D}$  celle de  $S^2$  : il est alors conformément isomorphe au plan complexe  $\mathbb{C}$  ou au disque de Poincaré  $D$ . De plus, l'action de  $\gamma_0$  sur  $Q_R$  est celle d'une transformation de Möbius. Comme cette transformation admet un point fixe, elle est (à conjugaison près) de la forme  $z \mapsto \lambda z$  (on a alors identifié  $x_0$  avec l'origine de  $D$  ou de  $\mathbb{C}$ ). Comme la différentielle de  $\mathbb{D}$  envoie celle de  $\gamma_0$  en  $x_0$  sur celle de  $\bar{\rho}^s(\gamma_0)$  en  $y_0$ ,  $\lambda$  est égal à  $e^{i\theta}$ . Soit  $x$  un point de  $Q_R$  autre que  $x_0$ . Comme le rapport entre  $\theta$  et  $2\pi$  est irrationnel, l'orbite de  $x$  par les itérés de  $\gamma_0$  admet plusieurs accumulations non-triviales sur  $x$ . On en déduit que l'orbite de  $\Phi_R^t$  correspondant à  $x$  n'est pas périodique. Donc, cette orbite ne peut pas être  $\theta_0$ . Ceci implique que  $\Gamma$  tout entier doit fixer  $x_0$ , et donc être cyclique. Nous avons vu lors du second cas (section 4.2) que ceci est absurde. Le troisième cas est donc impossible.

### 4.4. Quatrième cas : $\rho(\gamma_0)$ est projectivement unipotent de deuxième espèce.

Dans des coordonnées correctes, l'élément  $\bar{\rho}^s(\gamma_0)$  (ou son carré) de  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$

est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il admet un unique point fixe  $y_0$  dans  $\mathbb{R}P^2$ , et une unique droite projective globalement invariante  $\ell_0$  (celle correspondant au plan  $\{z = 0\}$ ). Il est plus aisé de visualiser la dynamique de  $\bar{\rho}^s(\gamma_0)$  sur la sphère : elle admet deux points fixes  $y_0^s$  et  $y_1^s$  opposés l'un à l'autre, préserve un unique grand cercle  $\ell_0^s$  contenant les deux points fixes. La sphère privée de  $\ell_0^s$  est formée de deux hémisphères. L'une, que nous notons  $V_0^0$ , est formée de points dont la  $\bar{\rho}^s(\gamma_0)$ -orbite s'accumule à la fois dans le futur et dans le passé vers  $y_0^s$ . L'autre, notée  $V_0^1$ , est formée de points dont la  $\bar{\rho}^s(\gamma_0)$ -orbite s'accumule à la fois dans le futur et dans le passé vers  $y_1^s$ . Nous notons enfin  $\mathbb{G}_0$  le feuilletage de la sphère dont les feuilles sont les trajectoires du flot défini par :

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t(t-1) \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Le temps un de ce flot est précisément  $\bar{\rho}^s(\gamma_0)$ , chacune de ses feuilles est donc  $\bar{\rho}^s(\gamma_0)$ -invariante. On note  $\mathbb{G}$  le tiré en arrière de  $\mathbb{G}_0$  sur  $Q_R$ . Comme chaque feuille non singulière de  $\mathbb{G}$  est homéomorphe à la droite réelle, la restriction de  $\mathbb{D}$  à cette feuille est injective. De plus, si cette feuille est préservée par une puissance de  $\gamma_0$ , son image par  $\mathbb{D}$  est une feuille entière de  $\mathbb{G}_0$ .

Notons  $c_0$  la composante connexe de  $(\mathbb{D}^s)^{-1}(\ell_0^s)$  contenant  $x_0$  : c'est une sous-variété plongée dans  $Q_R$  de dimension 1. Soit  $U$  une assiette de  $\mathbb{D}^s$  contenant  $x_0$ . Nous la choisissons suffisamment petite pour que toute feuille de  $\mathbb{G}$  qui la rencontre soit  $\gamma_0$ -invariante. Soit  $U_0^0$  la composante connexe de  $Q_R$  privé de  $(\mathbb{D}^s)^{-1}(\ell_0^s)$  contenant  $U \cap (\mathbb{D}^s)^{-1}(V_0^0)$ . Soit enfin  $\Omega$  l'union des feuilles de  $\mathbb{G}$  dont les ensembles  $\alpha$ -limite et  $\omega$ -limite sont  $\{x_0\}$ , mais qui ne sont pas contenues dans  $c_0$ . Les feuilles de  $\mathbb{G}$  contenues dans  $U \cap U_0^0$  suffisamment proches de  $x_0$  sont contenues dans  $\Omega$ . Vu notre choix de  $U$ , chaque feuille de  $\mathbb{G}$  contenue dans  $\Omega$  est  $\gamma_0$ -invariante. Notre discussion sur les propriétés de  $\mathbb{G}$  montre donc que  $\Omega$  est une assiette de  $\mathbb{D}^s$ . Son image par  $\mathbb{D}^s$  est contenue dans  $V_0^0$ . On peut même décrire cette image : c'est soit  $U_0^0$  tout entier, soit un domaine convexe de  $U_0^0$  bordé par l'union de  $y_0^0$  et d'une feuille régulière  $g_0$  de  $\mathbb{G}_0$  (ceci provient du fait que cette image est saturée par  $\mathbb{G}_0$ ). Supposons que nous soyons dans le deuxième cas. Soient  $g_1$  et  $g_2$  les deux composantes connexes de la préimage de  $g_0$  par la restriction à  $U$  de  $\mathbb{D}^s$  : elles sont contenues dans la frontière de  $\Omega$ . Soient  $f_1$  et  $f_2$  les feuilles de  $\mathbb{G}$  contenant respectivement  $g_1$  et  $g_2$ . Ces deux feuilles sont distinctes puisque  $g_1$  et  $g_2$  n'appartiennent pas à  $\Omega$ . Elles sont contenues dans la frontière de l'assiette  $\Omega$ . Enfin, elles sont chacune  $\gamma_0$ -invariante. Elles doivent donc toutes les deux avoir la même image par  $\mathbb{D}^s$ , à savoir la feuille  $g_0$ . Ceci

contredit le lemme de fermeture des assiettes. Donc,  $\overline{\mathbb{D}}^s(\Omega)$  est le  $V_0^0$  tout entier. En particulier,  $\overline{\mathbb{D}}(\Omega)$  est un plan affine.

Nous donnons maintenant la description dynamique de  $\Omega$  : soit  $W$  l'intérieur dans  $M$  de l'union des orbites de  $\Phi_R^t$  admettant  $\theta_0$  comme ensemble  $\alpha$  et  $\omega$ -limite. Alors,  $\Omega$  est la projection dans  $Q_R$  d'un relevé dans  $\widetilde{M}$  de  $W$ . De cette observation, on obtient l'analogie du fait établi pour  $U_0$  lors du second cas : les  $\Gamma$ -itérés de  $\Omega$  sont deux-à-deux disjoints ou confondus. De plus, on montre comme lors de la section 4.2 que la frontière de  $W$  dans  $M$  est  $p(\pi^{-1})(\partial\Omega)$ , et que la trace de cette frontière est une courbe fermée simple dont l'image par  $\overline{\mathbb{D}}^s$  est  $l_0^s$ . En particulier, cette trace doit contenir une préimage  $x_0^1$  de  $y_0^1$  fixée par  $\gamma_0$ . On construit alors de manière analogue une assiette  $\Omega'$  associé à  $x_0^1$  dont l'image par  $\overline{\mathbb{D}}^s$  est  $V_0^1$ . L'assiette  $\Omega'$  a manifestement même frontière que  $\Omega$ . L'union des adhérences de ces deux assiettes est donc une sphère plongée dans le plan  $Q_R$ . Cette absurdité montre que le quatrième cas est impossible.

#### 4.5. Cinquième cas : $\rho(\gamma_0)$ est un siphon parabolique.

Quitte à remplacer  $\gamma_0$  par une de ses puissances, l'action de  $\rho(\gamma_0)$  sur  $S^2$  ou  $\mathbb{R}P^2$  est la même que celle de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où  $\lambda$  est un réel supérieur strictement à 1.

Soient  $y_0^s = (1, 0, 0)$  et  $y_1^s = (-1, 0, 0)$  les points fixes de type selle-nœud de  $\rho(\gamma_0)$ , et  $z_0^s = (0, 0, 1)$ ,  $z_1^s = (0, 0, -1)$  ses points fixes contractants. D'après la section 4.2, nous pouvons supposer que  $y_0^s$  est l'image de  $x_0$  par  $\overline{\mathbb{D}}^s$ . Soit  $\ell_0^s$  la trace sur  $S^2$  du plan  $\{z = 0\}$ . L'une des composantes connexes de  $S^2 \setminus \ell_0^s$  est l'intérieur du bassin de répulsion de  $y_0^s$  pour  $\rho(\gamma_0)$  : nous la notons  $V_0^s$ . L'autre composante connexe est l'intérieur du bassin de répulsion de  $y_1^s$ . Nous la notons  $V_1^s$ . Comme lors de l'étude du second cas, la comparaison avec l'intérieur du bassin d'attraction  $W$  de  $\theta$  dans  $M$  pour le flot radial montre que les  $\Gamma$ -itérés de l'intérieur du bassin de répulsion  $U_0$  pour  $\gamma_0$  de  $x_0$  sont deux-à-deux disjoints ou confondus. En poursuivant le même raisonnement, on montre que  $\partial W$  admet comme trace une courbe fermée simple bordant  $U_0$  se projetant sur  $\ell_0^s$ . On obtient alors une préimage de  $z_1^s$  fixée par  $\gamma_0$ . On est ramené au second cas, que nous avons déjà exclu.

#### 4.6. Sixième cas : $\rho(\gamma_0)$ est hyperbolique.

Comme le deuxième cas est impossible (section 4.2),  $y_0$  doit correspondre au vecteur propre associé à la valeur propre de  $\rho(\gamma_0)$  de valeur absolue intermédiaire. Donc,  $\theta_0$  est une orbite périodique de type selle. Le sixième cas est l'un des cas tolérés par l'énoncé de la proposition.

#### 4.7. Septième (et dernier) cas : $\rho(\gamma_0)$ admet une ligne de points fixes dans $\mathbb{RP}^2$ .

Ce cas en regroupe en fait deux, que nous allons traiter simultanément. La matrice  $\rho(\gamma_0)$  est soit racine d'une matrice diagonale double, soit une matrice projectivement unipotente de première espèce. Quitte à remplacer  $\gamma_0$  par une de ses puissances,  $\rho(\gamma_0)$  est l'une des deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & e^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & e^\beta \end{pmatrix} (\beta \neq \alpha > 0), \quad \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & e^\alpha & 1 \\ 0 & 0 & e^\alpha \end{pmatrix}.$$

Nous notons  $\ell_0$  la droite projective  $\{z = 0\}$ ,  $\ell_0^s$  son relevé dans  $S^2$ . Soit  $L_0$  l'ensemble des points fixes de  $\gamma_0$  dans  $Q_R$ . Comme le second cas est impossible,  $\mathbb{D}(L_0)$  est contenu dans  $\ell_0$ . Nous notons  $y_0^s$  et  $y_1^s$  les points fixes  $(0, 1, 0)$  et  $(0, -1, 0)$  de  $\rho(\gamma_0)$ .

Notons  $\tilde{L}_0$  la préimage par  $\pi$  de  $L_0$ , et  $L$  l'image par  $p$  de  $\tilde{L}_0$ . La description dynamique de  $L$  est la suivante : c'est l'union des orbites périodiques du flot radial, qui, en tant que lacets orientés, ont une puissance librement homotope dans  $M$  aux lacets représentant  $\gamma_0$ . Soit  $T$  la période d'un élément  $x$  de  $L$  :  $x$  admet un relevé  $\tilde{x}$  dans  $\tilde{M}$  pour lequel il existe un entier  $k$  vérifiant :

$$\tilde{\Phi}_R^{kT}(\tilde{x}) = \gamma_0 \tilde{x}$$

Donc :

$$e^{kT} \mathbb{D}(\tilde{x}) = \rho(\gamma_0) \mathbb{D}(\tilde{x}) = e^\alpha \mathbb{D}(\tilde{x}).$$

Donc :

$$\Phi^\alpha(x) = x.$$

On en déduit que les périodes des éléments de  $L$  sont en nombre fini. Il s'ensuit que  $L$  est un fermé de  $M$ . De plus, l'application de premier retour le long d'une orbite périodique contenue dans  $L$  admet une puissance conjuguée à l'action de  $\rho^{-1}(\gamma_0)$  au voisinage d'un point de  $\ell_0$ . On en déduit que l'intersection entre  $L$  et un petit disque transverse est un segment de droite. Ceci montre,  $L$  étant fermé, que  $L$  est une surface affinement tangente au flot radial.

Supposons qu'une des composantes de  $L$  est compressible, *i.e.* admet une trace  $c$  dans  $Q_R$  qui soit une courbe fermée simple. Alors, l'image par  $\mathbb{D}^s$  est le grand cercle  $\ell_0^s$ . De plus, comme  $Q_R$  est homéomorphe au plan,  $c$  borde un domaine de Jordan  $D$  dans  $Q_R$ . D'après le lemme de remplissage des disques, l'adhérence de  $D$  est une assiette de  $\mathbb{D}^s$ . Comme le second cas est impossible, ceci écarte d'ores et déjà le cas où  $\rho(\gamma_0)$  est diagonale double, puisque sinon le disque  $D$  devrait contenir un point fixe contractant de  $\gamma_0$ .

Nous supposons donc ici que  $\rho(\gamma_0)$  est projectivement unipotent de première espèce. Soient  $z_0$  et  $z_1$  les préimages par  $\bar{\mathbb{D}}^s$  de  $y_0^s$  et de  $y_1^s$  contenues dans  $\partial D$ . Considérons le feuilletage  $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{y_0}$  de  $Q_R$ . Toutes les feuilles régulières de ce feuilletage contenues dans  $D$  vont de  $z_0$  vers  $z_1$ . Soit  $\Omega$  l'union des feuilles régulières de  $\mathbb{G}$  allant de  $z_0$  vers  $z_1$  : c'est un ouvert qui contient  $D$ . Chaque feuille contenue dans  $\Omega$  est  $\gamma_0$ -invariante. On en déduit que  $\Omega$  est une assiette de  $\bar{\mathbb{D}}^s$ . Son image par  $\bar{\mathbb{D}}^s$  est un ouvert connexe de  $S^2$  contenant  $\bar{\mathbb{D}}^s$ , bordé par l'union de de  $y_0^s$ , de  $y_1^s$  et de deux feuilles régulières  $g$  et  $g'$  de  $\mathbb{G}_{y_0}^0$ . Remarquons que d'après le lemme de fermeture des assiettes, ces deux feuilles sont différentes. Remarquons aussi que l'image de  $\Omega$  ne peut pas être la sphère privée de  $y_0^s$  et de  $y_1^s$  puisque  $Q_R$  n'est pas homéomorphe à la sphère. Soit  $f_1$  la feuille de  $\mathbb{G}$  issue de  $z_1$  dont l'image est contenue dans  $g$ , et soit  $f_2$  celle issue de  $z_2$  dont l'image est elle aussi contenue dans  $g$ . L'une et l'autre de ces feuilles est contenue dans la frontière de  $\Omega$ . D'après le lemme de fermeture des assiettes, leurs images par  $\bar{\mathbb{D}}^s$  doivent être disjointes. Or, elles ont la même image, à savoir la feuille  $g$ , car elles sont toutes les deux  $\gamma_0$ -invariantes. La contradiction que nous venons d'obtenir montre que chaque composante de  $L$  est incompressible.

Nous avons achevé la preuve de la proposition.  $\square$

## 5. Surfaces affinement tangentes au flot radial

LEMME 5.1. — *Si une variété affine radiale admet une surface compressible affinement tangente au flot radial, alors elle est affinement isomorphe à une variété de Hopf affine ou à un exemple de Benzécri.*

À titre de réciproque partielle, observons que les variétés de Hopf affines admettent des surfaces affinement tangentes au flot radial compressibles (ceci parce que toute transformation linéaire de  $\mathbb{R}^3$  admet un plan invariant).

Le lemme 5.1 est un corollaire du lemme suivant :

LEMME 5.2. — *Si  $Q_R$  contient une courbe fermée simple, dont l'image par  $\bar{\mathbb{D}}^s$  est un grand cercle de  $S^2$ , et qui est préservée par un élément non trivial de  $\Gamma$ , alors  $M$  est une variété de Hopf affine ou un exemple de Benzécri.*

*Preuve.* — Soit  $c$  la courbe fermée simple, et  $\gamma_0$  l'élément non trivial de  $\Gamma$  qui la préserve. Si  $M$  n'est pas une variété de Hopf,  $Q_R$  est homéomorphe au plan, et  $c$  borde un domaine  $D$  homéomorphe au disque. D'après le lemme de remplissage des sphères, l'adhérence de  $D$  est une assiette de  $\bar{\mathbb{D}}^s$ . Soit  $D_0$  son image par  $\bar{\mathbb{D}}$ . C'est un plan affine de  $\mathbb{R}P^2$ . Comme  $\gamma_0$  préserve  $\bar{D}$ , toute direction propre de  $\bar{\rho}(\gamma_0)$  (et il en existe!) est image d'un point fixe de  $\gamma_0$  dans l'adhérence de  $D$ . D'après la proposition 4.1,  $\bar{\rho}(\gamma_0)$  est soit hyperbolique, soit diagonale double, soit projectivement unipotent de première espèce. Dans les deux premiers cas,

$\bar{\rho}(\gamma_0)$  admettrait un point fixe contractant ou répulsif : ils sont donc impossibles. Dans le troisième cas,  $c$  doit être fixée point par point par  $\gamma_0$ . Elle doit donc être trace d'une surface incompressible d'après 4.1 : contradiction.  $\square$

**PROPOSITION 5.3.** — *Soit  $c$  une sous-variété de  $Q_R$  de dimension 1 dont l'image par  $\bar{\mathbb{D}}$  est contenue dans une droite projective de  $\mathbb{R}P^2$ . On suppose qu'il existe un sous-groupe  $H$  de  $\Gamma$  isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  qui préserve  $c$ . Alors,  $c$  est trace d'une surface affinement tangente au flot radial, plongée de manière incompressible dans  $M$ , et dont le groupe fondamental contient  $H$ . De plus, la restriction de  $\bar{\mathbb{D}}$  à  $c$  est injective.*

*Preuve.* — D'après 5.2,  $c$  n'est pas une courbe fermée simple : elle est homéomorphe à la droite réelle.

*Premier cas : l'action de  $H$  sur  $c$  n'est pas libre.* — Supposons qu'il existe un élément  $h$  de  $H$  fixant un élément  $x$  de  $c$ . Soit  $h'$  un élément de  $H$  qui n'a pas de puissance commune avec  $h$  : alors,  $h'(x)$  est un autre point fixe de  $h$  sur  $c$ . Considérons le segment  $I$  contenu dans  $c$  qui relie  $x$  à  $h'(x)$ . Il est compact ; la restriction de  $\mathbb{D}$  à  $I$  est donc un revêtement sur son image. Cette image est contenue dans une droite projective  $\ell$  de  $\mathbb{R}P^2$   $\bar{\rho}(h)$ -invariante. L'union des itérés de  $I$  par  $h'$  est un sous-intervalle de  $c$ . Une extrémité de cet intervalle dans  $c$  serait un point fixe de  $H$ , ce qui est absurde. Donc, l'union des  $h'$ -itérés de  $I$  est  $c$  tout entier. On en déduit que la restriction de  $\mathbb{D}$  à  $c$  est un revêtement sur son image.

Dans le cas où  $x$  est un point fixe de type selle de  $h$ , l'image de  $I$  doit contenir un point fixe contractant ou répulsif de  $\bar{\rho}(\gamma)$ . Toute préimage dans  $I$  de ce point fixe devrait être point fixe contractant ou répulsif de  $h$ . Ceci contredit la proposition 4.1. Donc, d'après la proposition 4.1,  $h$  admet une ligne de points fixes  $c'$  passant par  $x$ . Cette ligne de point fixe  $c'$  est la trace d'une surface incompressible  $T'$ . De plus,  $\rho(h)$  est soit diagonale double, soit unipotente de première espèce.

*Premier sous-cas :  $c$  et  $c'$  sont transverses en  $x$ .* — Le cas où  $\rho(h)$  est diagonal double se traite de manière analogue à ce qui précède : l'intervalle  $I$  devrait contenir un point fixe attractif ou répulsif, ce qui est absurde. Le cas unipotent de première espèce se traite par un argument analogue à celui utilisé lors de la section 4.7 : l'intervalle  $I$  doit contenir d'autres points fixes de  $h$ . Soit  $x'$  celui qui est le plus proche de  $x$  : l'intervalle  $[x, x']$  ne contient pas d'autre point fixe de  $h$ . On considère le feuilletage  $\mathbb{G} = \mathbb{G}_{\bar{\mathbb{D}}(x)}$  de  $Q_R$ , et  $\Omega$  l'ensemble des feuilles régulières de  $\mathbb{G}$  qui relient  $x$  à  $x'$  : c'est un ouvert  $h$ -invariant, saturé par  $\mathbb{G}$ , qui est une assiette de  $\bar{\mathbb{D}}$ . Soit  $f$  une feuille de  $\mathbb{G}$  issue de  $x$  contenue dans la frontière de  $\Omega$ . Il existe alors une autre feuille  $f'$  de  $\mathbb{G}$ , issue de  $x'$ , contenue dans la frontière de  $\Omega$ , et dont l'image par  $\bar{\mathbb{D}}$  est contenue dans la même feuille régulière de  $\mathbb{G}_{\bar{\mathbb{D}}(x)}^0$ . Les feuilles  $f$  et  $f'$  sont chacune  $h$ -invariante. Grâce au lemme

de fermeture des assiettes, on en déduit que  $f$  et  $f'$  sont chacune constituée de points fixes de  $h$ , i.e. que  $f$  est contenue dans  $c$ . Il s'ensuit, toujours par le lemme de fermeture des assiettes, que la restriction de  $\mathbb{D}^s$  à  $c'$  est injective. En particulier,  $c'$  ne contient qu'une seule préimage de  $\mathbb{D}^s(x)$ . Or,  $c'$  est la trace transverse d'un tore incompressible. Chaque élément du groupe fondamental de ce tore, qui est isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  doit préserver  $x$ . Ceci est absurde.

*Deuxième sous-cas :  $c$  et  $c'$  sont tangents en  $x$ .* — Dans ce cas,  $c$  et  $c'$  sont confondus. La courbe  $c$  est donc la trace de  $T'$ , et comme  $\pi^{-1}(c)$  est  $H$ -invariant, le groupe fondamental de  $T'$  contient  $H$ . Pour achever la preuve du lemme dans ce sous-cas, nous devons montrer que la restriction de  $\mathbb{D}$  à  $c$  est injective. Supposons par l'absurde que ce ne soit pas le cas :  $\mathbb{D}$  est alors un revêtement cyclique de  $c$  sur  $\ell$ .

Le cas où  $\bar{\rho}(h)$  est unipotent de première espèce se traite par un argument analogue à celui utilisé ci-dessus : on considère à nouveau le feuilletage  $\mathbb{G}$  de  $Q_R$  induit par le feuilletage de  $\mathbb{R}P^2$  dont toutes les feuilles sont  $\rho(\bar{H})$ -invariantes. Comme la restriction de  $\mathbb{D}$  à  $c$  est un revêtement sur la ligne de points fixes de  $\bar{\rho}(h)$  il existe deux singularités successives de  $\mathbb{G}$  sur  $c$ . On obtient une contradiction en considérant l'union des feuilles régulières de  $\mathbb{G}$  reliant ces deux singularités.

Donc,  $\bar{\rho}(h)$  est diagonale double. Comme la restriction de  $\mathbb{D}$  à  $c$  est un revêtement, on peut collectionner des assiettes le long de  $c$  dont l'union  $U_0$  aura la propriété suivante : la restriction de  $\mathbb{D}^s$  à  $U_0$  est un revêtement sur son image  $V_0^s$ . On peut de plus supposer que l'image  $V_0^s$  ne contient pas les points fixes  $z_1$  et  $z_2$  contractants (ou répulsifs) de  $\bar{\rho}(h)$ . Soit  $U'_0$  l'union des  $h$ -itérés de  $U_0$  : la restriction de  $\mathbb{D}^s$  à  $U'_0$  est un revêtement sur son image, et son image est le complémentaire de  $z_1$  et de  $z_2$  dans  $S^2$ . Le lemme de fermeture des assiettes montre que la frontière de  $U'_0$  dans  $Q_R$  n'est constituée que d'au plus deux points, préimages de  $z_1$  et de  $z_2$ . Comme  $Q_R$  n'est pas homéomorphe à la sphère, cette frontière contient au plus un point, et comme aucun élément de  $Q_R$  ne saurait être fixé par tous les éléments de  $\Gamma$ , cette frontière doit finalement être vide. Donc,  $U'_0$  est  $Q_R$  tout entier, et  $\mathbb{D}^s$  est un revêtement cyclique sur la sphère privée de deux points. Chaque élément de  $\rho(\Gamma)$  envoie soit  $\mathbb{D}^s(c)$  sur lui-même, soit sur une courbe la rencontrant transversalement. On en déduit que  $\gamma c$  est soit  $c$ , soit rencontre  $c$  transversalement. Or,  $c$  est la trace de la surface plongée  $T$  : le deuxième cas de figure est impossible. Donc,  $\Gamma$  préserve  $c$ . Ceci signifie que  $\Gamma$  est contenu dans le groupe fondamental de  $T$ . Ceci est absurde puisque  $M$  est une variété de dimension 3 compacte : elle ne peut pas contenir un sous-groupe libre abélien de rang deux qui soit d'indice fini. Cette contradiction achève la preuve de la proposition dans le cas où  $H$  n'agit pas librement sur  $c$ .

*Deuxième cas :  $H$  agit librement sur  $c$ .* — Soit  $\tilde{T}$  la préimage par  $\pi$  de  $c$ . Nous notons  $\hat{p} : \tilde{M} \rightarrow M$  le revêtement (non galoisien) associé au groupe  $H$  :

c'est le quotient de  $\widetilde{M}$  par  $H$ . La projection de  $\widehat{T}$  est un tore plongé dans  $\widehat{M}$ . La restriction de  $\hat{p}$  dans  $M$  est une immersion du tore dans  $M$ , affinement tangente au flot radial. Pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma$ , si  $\gamma\widehat{T}$  est tangent en un point à  $\widehat{T}$ , alors il lui est confondu. On en déduit que les autointersections de  $\hat{p}(\widehat{T})$  sont transverses, et sont des orbites périodiques du flot radial. Une telle autointersection se relève en une orbite périodique du flot radial sur  $\widehat{M}$  contenue dans  $\widehat{T}$ . Elle correspond donc à un point fixe d'un élément de  $H$  sur  $c$ . Or  $H$  agit librement sur  $c$ . Donc, il n'y a pas d'autointersection transverse. La restriction de  $\hat{p}$  à  $\widehat{T}$  est donc un revêtement sur une surface plongée affinement transverse au flot radial, dont  $c$  est une trace.

Il ne reste plus qu'à montrer l'injectivité de  $\mathbb{D}$  sur  $c$ . Soit  $h$  un élément quelconque de  $H$ ,  $x$  un élément de  $c$ , et  $I$  l'intervalle  $[x, h(x)]$  de  $c$ . L'union des itérés par  $h$  de  $I$  recouvre  $c$  tout entier. Par ailleurs, chacun de ses itérés ne rencontre qu'un nombre fini de préimages par  $\mathbb{D}$  d'un élément de  $\mathbb{R}P^2$ , et ce nombre est uniformément borné pour tous les éléments de  $\mathbb{R}P^2$ . On en déduit que la restriction de  $\mathbb{D}$  à  $c$  est un revêtement. Si elle n'est pas injective, son image est une droite projective  $\ell$  toute entière, ce que nous supposons donc être. Comme l'action de  $H$  sur  $c$  est libre, elle est semi-conjugée à une action par translations. On en déduit qu'aucun élément de  $\bar{\rho}(H)$  ne fixe de point dans  $\ell$ . Donc, les éléments de  $\rho(H)$  sont tous des siphons elliptiques irrationnels où des similitudes. Ces éléments ont chacun deux points fixes dans  $S^2$ , opposés l'un à l'autre, et ces points fixes sont communs à tous les éléments de  $\rho(H)$ . Nous les notons  $z_1$  et  $z_2$ .

Supposons que  $\bar{\rho}(H)$  contient un siphon irrationnel. Comme la restriction de  $\mathbb{D}$  est à  $c$  est un revêtement, on en déduit comme auparavant qu'il existe un ouvert sur lequel  $\mathbb{D}^s$  se restreint en un revêtement cyclique sur le complémentaire de  $z_1$  et de  $z_2$  dans  $S^2$ , que cet ouvert est  $Q_R$  tout entier, et que  $\Gamma$  préserve  $c$ .

Cette contradiction signifie donc que tous les éléments de  $H$  sont des similitudes. Comme lors de la section 4.3, on munit  $Q_R$  d'une structure conforme en tirant en arrière celle de  $S^2$ . L'espace des orbites  $Q_R$  s'identifie alors au plan complexe ou au demi-plan de Poincaré. La sphère  $S^2$  s'identifie à  $\widehat{\mathbb{C}}$ , sur lequel  $H$  agit selon des transformations de la forme  $z \mapsto e^{i\theta}z$ , où  $\theta$  est en rapport irrationnel avec  $2\pi$ . L'application  $\mathbb{D}$  peut être vue comme une application méromorphe équivariante pour les actions de  $H$ . L'action de  $H$  sur  $Q_R$  s'identifie à une action par transformations de Möbius. De plus, d'après 4.3, aucun élément de  $H$  n'admet de point fixe dans  $Q_R$ . On en déduit que  $H$  est contenu dans un groupe à un paramètre de transformations de Möbius de la forme  $z \mapsto z + t$ , ou bien  $z \mapsto e^{it\alpha}z$  où le nombre complexe  $\alpha$  ne peut être non-réel que si  $Q_R$  est conformément isomorphe au plan complexe. Ce groupe à un paramètre est envoyé par  $\mathbb{D}$  sur le groupe de transformation  $z \mapsto e^{it}$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . On en déduit que  $\mathbb{D}$  est un revêtement cyclique de  $Q_R$  sur  $S^2$  privé de deux disques, chacun de ces

disques pouvant être réduit à un point. Ceci est absurde, pour les mêmes raisons que celles invoquées précédemment.  $\square$

Nous sommes en mesure de démontrer le théorème B :

*Démonstration de du théorème B.* — Nous allons supposer ici que  $M$  n'est ni une variété de Hopf, ni un exemple de Benzécri. Nous allons alors montrer que  $M$  est une suspension affine généralisée. D'après le lemme 5.1,  $T$  est incompressible. Notons  $H$  un sous-groupe de son groupe fondamental isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ,  $\tilde{T}$  un relevé  $H$ -invariant de  $T$ , et  $c$  la projection par  $\pi$  de  $\tilde{T}$ . On peut supposer que l'image par  $\mathbb{D}$  de  $\tilde{T}$  est contenue dans le plan  $\{z = 0\}$ . D'après la proposition 5.3, et comme  $\mathbb{D}$  est injective le long des orbites de  $\tilde{\Phi}_R^t$  la restriction de  $\mathbb{D}$  à  $\tilde{T}$  est un homéomorphisme sur son image, qui est un cône ouvert  $C$  contenu dans le plan  $\{z = 0\}$ . Comme  $\mathbb{D}$  restreint à  $\tilde{T}$  est un homéomorphisme sur son image, l'action de  $\rho(H)$  sur  $C$  est libre et proprement discontinue. De plus, aucun élément de  $\rho(H)$  ne peut être une homothétie : il fixerait sinon une orbite dans  $\tilde{T}$  ce qui d'après la section 4.1 impliquerait que  $M$  est un exemple de Benzécri. Le groupe  $\rho(H)$  est donc isomorphe à sa projection dans  $\mathrm{PGL}(3, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ . Nous notons  $\Lambda$  cette projection.

Soit  $G$  la composante neutre de l'adhérence Zariski de  $\Lambda$  dans  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$ . Il n'y a que six cas possibles (à conjugaison près) :

- Le cas  $D$  :  $G$  est exactement le groupe de toutes les matrices diagonales.
- Le cas  $P$  :  $G$  est le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^u & t & 0 \\ 0 & e^u & 0 \\ 0 & 0 & e^v \end{pmatrix}, \quad 2u + v = 0.$$

- Le cas  $U$  :  $G$  est le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Le cas  $C$  :  $G$  est le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & s & t \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Le cas  $S$  :  $G$  est le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^u \cos \theta & e^u \sin \theta & 0 \\ -e^u \sin \theta & e^u \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & e^v \end{pmatrix}, \quad 2u + v = 0.$$

- Le cas  $T : G$  est le groupe des translations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que le groupe  $S$ , contenant des siphons elliptiques irrationnels, est exclu d'après la proposition 5.3. Le cas  $T$  est lui aussi exclu, car il n'admet aucune orbite de dimension 1. Chaque orbite de  $\tilde{\Phi}_R^t$  contenue dans  $\tilde{T}$  devrait être  $H$ -invariante, ce qui est absurde.

Nous aurons besoin de connaître la forme des orbites de  $G$  sur  $\mathbb{R}P^2$  :

- Le cas  $D : G$  admet trois points fixes, six orbites de dimension 1 (celles allant d'un point fixe à un autre), et quatre orbites de dimension 2 : ce sont les triangles convexes dont les sommets sont des points fixes.
- Le cas  $P : G$  admet deux orbites de dimension nulle, trois orbites de dimension 1, dont une est une droite affine et les deux autres des demi-droites affines, et deux orbites ouvertes.
- Le cas  $U : G$  admet un seul point fixe, n'admet aucune orbite de dimension 2, et toutes les droites affines contenues dans les droites projectives passant par le point fixe sont des orbites de dimension 1.
- Le cas  $C : G$  admet un seul point fixe, une seule orbite de dimension 1 qui est une droite affine, et une seule orbite de dimension 2.

Remarquons que dans tous les cas  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ . Son action sur les orbites ouvertes est libre. Enfin, aucune orbite de dimension 1 n'est un cercle. Quitte à remplacer  $H$  par un sous-groupe d'indice fini, on peut supposer que  $\Lambda$  est contenu dans  $G$ . Comme l'action de  $\rho(H)$  sur  $C$  est proprement discontinûe,  $\Lambda$  est un réseau dans  $G$ . Remarquons aussi le fait fondamental suivant : *l'adhérence d'une orbite par  $\Lambda$  de n'importe quel point d'une  $G$ -orbite de dimension 2 rencontre chaque orbite de dimension 1 contenue dans la frontière de la  $G$ -orbite de dimension 2.*

Nous allons montrer que le fait que  $\Lambda$  soit un réseau de  $G$  implique que son action sur  $Q_R$  s'étend en une action de  $G$ . Chaque élément de l'algèbre de Lie de  $G$  induit un champ de vecteurs sur  $\mathbb{R}P^2$  : le champ dont l'intégration donne le flot induit par le sous-groupe à un paramètre de  $G$  correspondant. Le tiré en arrière de ce champ de vecteurs est un champ de vecteurs sur  $Q_R$ . Ce champ de vecteurs définit un flot local sur  $Q_R$ . Cependant, il n'est pas clair que ce flot soit complet.

Nous considérons l'ensemble des points  $\mathbb{U}$  de  $Q_R$  en lesquels ces flots locaux sont tous définis pour tous les temps réels, et où l'action de ces flots prolonge celle de  $\Lambda$ . Nous précisons cette définition : pour tout élément  $g$  de  $G$ , soit  $g^t$  le sous-groupe à un paramètre de  $G$  tel que  $g^1 = g$ . Nous disons que  $g$  est défini au

point  $x$  de  $Q_R$  si le chemin  $t \mapsto g_i^t \bar{\mathbb{D}}(x)$  pour les temps réels  $t$  compris entre 0 et 1 se relève en un chemin  $t \mapsto c(t)$  pour lequel  $c(0) = x$ . On demande de plus qu'à chaque fois que  $g^s$  appartient à  $\Lambda$ , *i.e.* est de la forme  $\bar{\rho}(h)$  où  $h$  appartient à  $h$ , on ait l'égalité  $c(s) = hx$ . On note alors  $g * x$  l'extrémité  $c(1)$  de  $c$ . Soit  $\mathbb{U}'$  l'ensemble des points de  $Q_R$  où tous les éléments de  $G$  sont définis. Enfin, soit  $\mathbb{U}$  l'ensemble des points  $x$  de  $\mathbb{U}'$  où est satisfaite l'égalité  $hx = \bar{\rho}(h) * x$  pour tout élément  $h$  de  $H$ .

Soient  $g_1^t$  et  $g_2^t$  deux sous-groupes à un paramètre de  $G$  dont tous les temps entiers appartiennent à  $\Lambda$ . On note  $h_1$  et  $h_2$  les éléments de  $H$  dont les  $\bar{\rho}$ -images sont  $g_1^1$  et  $g_2^1$ . Soit  $\mathbb{U}_1$  le lieu des points de  $Q_R$  où tous les  $g_1^t g_2^s$  sont définis pour les temps  $(t, s) \in [0, 1] \times [0, 1]$ . Nous affirmons que  $\mathbb{U}$  et  $\mathbb{U}_1$  sont confondus. Cette affirmation provient de l'abélianité de  $G$ , et du fait que  $\Lambda$  est un réseau cocompact de  $G$ . Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les détails.

Il est clair que  $\mathbb{U} = \mathbb{U}_1$  est un ouvert de  $Q_R$ . Remarquons aussi qu'il est non vide, car il contient  $\pi(\tilde{T})$ . Par définition même de  $\mathbb{U}$ , le groupe  $G$  agit sur  $\mathbb{U}$  de sorte que la restriction de  $\bar{\mathbb{D}}$  à  $\mathbb{U}$  est équivariante : il s'agit de l'action  $*$ . On en déduit :

- les orbites de  $G$  sur  $\mathbb{U}$  sont soit de dimension 1, soit de dimension 2 (une orbite de dimension 0 correspondrait à une orbite de  $\tilde{\Phi}_R^t$  préservée par  $H$ ) ;
- les  $G$ -orbites de dimension 2 sont des assiettes de  $\bar{\mathbb{D}}$  ;
- les  $G$ -orbites de dimension 1 sont les traces de surfaces affinement tangentes au flot radial, dont le groupe fondamental contient  $H$  (*cf.* lemme 5.3).

Soit  $x$  un point dans l'adhérence de  $\mathbb{U}$ . Nous allons montrer qu'il appartient à  $\mathbb{U}$ , ce qui, par connexité de  $Q_R$ , implique que  $\mathbb{U}$  est  $Q_R$  tout entier. Si  $\bar{\mathbb{D}}(x)$  est un point fixe de  $G$  dans  $\mathbb{R}P^2$ ,  $x$  est un point fixe de  $H$  ce qui est absurde. Si  $\bar{\mathbb{D}}(x)$  appartient à une orbite de  $G$  de dimension 2, il existe une assiette le contenant dont l'image par  $\bar{\mathbb{D}}$  est contenue dans cette même  $G$ -orbite. D'après le lemme des assiettes emboîtées, l'assiette est contenue dans la  $G$ -orbite d'un élément de  $\mathbb{U} \cap U$ , et est donc contenue dans  $\mathbb{U}$ . Il nous reste à traiter le cas où  $\bar{\mathbb{D}}(x)$  appartient à une  $G$ -orbite de dimension 1. Notons  $\bar{O}$  cette  $G$ -orbite. Nous distinguons deux cas, selon que  $\bar{\mathbb{D}}(x)$  est fixé par un élément non trivial de  $\Lambda$  ou non.

Dans le second cas,  $\bar{\mathbb{D}}(x)$  est accumulé non trivialement par sa  $\Lambda$ -orbite. Comme  $x$  appartient à la frontière de  $\mathbb{U}$ , on en déduit qu'il existe des éléments  $h_1$  et  $h_2$  de  $H$  qui envoient  $x$  arbitrairement près de lui-même, et qui engendrent un sous-groupe d'indice fini  $H'$  de  $H$ . La première propriété montre que les flots locaux associés à  $h_1$  et  $h_2$  sont définis pour tous les temps réels en  $x$ , et comme  $H'$  est un réseau de  $G$ , il s'ensuit que  $x$  appartient à  $\mathbb{U}$ .

Dans le premier cas,  $x$  est fixé par un élément non trivial  $h$  de  $H$ . L'action de  $\rho(h)$  sur  $\bar{O}$  doit être triviale : en effet, si  $\bar{\mathbb{D}}(x)$  était isolé dans  $\bar{O}$ , il devrait

être fixé par tous les éléments de  $G$  puisque ceux-ci commutent avec  $\rho(h)$ . Or,  $\bar{O}$  est de dimension 1. D'après la section 4.7,  $x$  appartient à la trace  $O'$  d'une surface incompressible formée d'orbites périodiques du flot radial, dont le groupe fondamental contient  $h$ , et telle que  $\bar{O}$  et  $\bar{O}' = \bar{\mathbb{D}}(O')$  sont tangentes en  $\bar{\mathbb{D}}(x)$ . On peut appliquer de nouveau les arguments précédents :  $O'$  est une  $G'$ -orbite, où  $G'$  est un sous-groupe de  $\mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$  abélien d'un des types D, P, U ou C précédents. Il existe un sous-groupe  $H'$  libre abélien de rang 2 de  $\Gamma$ , préservant  $O'$ , sur lequel  $\bar{\rho}$  est injectif, et dont l'image  $\bar{\rho}(H')$  est contenue dans  $G'$ .

L'orbite  $O'$  est un fermé de  $Q_R$  : c'est une composante connexe de la préimage par  $\bar{\mathbb{D}}$  d'une ligne projective de  $\mathbb{R}P^2$ . Les courbes  $\bar{O}$  et  $\bar{O}'$  sont contenues dans cette même ligne projective. Soit  $f$  la composante connexe de  $\partial\mathbb{U}$  contenant  $x$ . Son image  $\bar{\mathbb{D}}(f)$  est contenue dans  $\bar{O}$ . On en déduit que  $f$  est contenue dans  $O'$ . Or  $f$  est un fermé de  $Q_R$ , donc de  $O'$ . C'est aussi manifestement un ouvert de  $O'$ . On en déduit que  $f$  est  $O'$  tout entier. Donc,  $\bar{O}'$  est contenue dans la  $G$ -orbite  $\bar{O}$ .

Soit  $\mathbb{U}'$  l'analogue de  $\mathbb{U}$  pour  $G'$  : il contient  $O'$ . Si  $G$  et  $G'$  sont égaux,  $\mathbb{U}$  et  $\mathbb{U}'$  sont égaux, et nous avons montré comme voulu que  $x$  appartient à  $\mathbb{U}$ . De manière plus générale, nous pouvons également conclure aisément si les orbites de  $\bar{\mathbb{D}}(x)$  pour  $G$  et  $G'$  coïncident : en effet, la  $G'$ -orbite  $O'$  doit dans ce cas encore être  $H$ -invariante.

Nous supposons donc désormais que  $\bar{O}'$  est strictement contenue dans  $\bar{O}$ . Notons que les orbites unidimensionnelles de  $G$  et de  $G'$  sont soit des demi-droites soit des droites affines de  $\mathbb{R}P^2$ . Comme  $\bar{O}'$  est strictement contenu dans  $\bar{O}$ , elle ne peut pas être une droite affine : c'est donc une demi-droite. Ceci montre d'ores et déjà que  $G'$  n'est pas ni de type C, ni de type U. Soit  $U$  une assiette en  $x$  : on la choisit suffisamment petite pour être contenue dans  $\mathbb{U}'$ . Comme  $G'$  n'est pas de type U, chaque composante connexe de  $U \setminus O'$  est contenue dans une  $G'$ -orbite ouverte. Nous notons  $U'_1$  et  $U'_2$  ces orbites. Nous choisissons les indices de sorte que  $U'_1$  rencontre  $\mathbb{U}$ .

Supposons que  $G$  est de type U. Soit  $O''$  une  $G$ -orbite rencontrant  $U \cap U'_1$ . Il existe une suite d'éléments  $h'_n$  de  $H'$  et une suite d'éléments  $x_n$  de  $O''$  telles que les itérés  $h'_n x_n$  convergent vers  $x$ . Or,  $O''$  est la trace d'une surface compacte plongée dans  $M$  : cette surface s'accumule donc non trivialement sur l'orbite du flot radial correspondant à  $x$ . Ceci est absurde puisque la surface est compacte.

Donc,  $G$  et  $G'$  sont de type D, P ou C. Il existe donc une  $G$ -orbite  $U_1$  contenant  $U \cap U'_1 \cap \mathbb{U}$ . Les images par  $\bar{\mathbb{D}}$  de  $U_1$  et de  $U'_1$  sont des demi plans ou des triangles convexes contenant  $\bar{O}'$  dans leur frontière. Étant convexes, leur intersection est connexe. Comme  $\bar{O}'$  est strictement contenu dans  $\bar{O}$ , on en déduit grâce au lemme des assiettes emboîtées que  $U'_1 \cap U_1$  est strictement contenu dans  $U_1$ , et que la frontière de  $U'_1$  rencontre  $U_1$ . Soit  $x'$  un élément de  $\partial U'_1 \cap U_1$  : si on refait toute l'analyse précédente en remplaçant  $x$ ,  $H$  et  $G$  par  $x'$ ,  $H'$  et  $G'$ , nous obtenons que  $x'$  est contenu dans la trace  $O''$  d'une surface  $S''$  affinement tangente au flot

radial. Mais, comme  $O''$  rencontre  $U_1$ , il existe une suite d'itérés de  $O''$  par des éléments de  $H$  admettant des points arbitrairement proches de  $x$ . Ceci contredit la compacité de  $S''$ .

La contradiction que nous venons d'obtenir montre que  $\mathbb{U}$  est  $Q_R$  tout entier, *i.e.* il existe une action de  $G$  sur  $Q_R$  envoyée par  $\overline{\mathbb{D}}$  sur l'action usuelle de  $G$  sur  $\mathbb{R}P^2$ . Soit  $\widehat{G}$  la préimage de  $G \subset P^+GL(3, \mathbb{R})$  dans  $GL(3, \mathbb{R})$  : c'est le sous-groupe obtenu en ajoutant à  $G \subset SL(3, \mathbb{R})$  toutes les homothéties de rapport positif. Il est isomorphe à  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $G_0$  le plus petit sous-groupe de Lie de  $\widehat{G}$  contenant  $\rho(H)$  : il est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ , et  $\rho(H)$  est un réseau de  $G_0$ . Comme  $\Lambda$  est un réseau de  $G$ , la projection de  $G_0$  est  $G$  tout entier : l'action de  $G$  peut donc être considérée comme une action de  $G_0$ .

Rappelons que l'action de  $G$  sur  $Q_R$  ne peut pas admettre de point fixe. L'image de  $\overline{\mathbb{D}}$  est donc une union de  $G_0$ -orbites de dimension 1 et de dimension 2. Soit  $O$  une  $G_0$ -orbite de dimension 1. Remarquons qu'il en existe au moins une : celle correspondant à la surface affinement tangente au flot radial donnée par hypothèse. C'est la trace d'une surface affinement tangente au flot radial.

Soit  $U$  une  $G_0$ -orbite dans  $Q_R$  de dimension 2 : étant ouverte, elle ne peut pas être fermée dans  $Q_R$ . Elle contient donc dans son adhérence une  $G_0$ -orbite de dimension 1. Tout élément de  $U$  admet des  $H$ -itérés qui convergent vers un élément de cette orbite de dimension 1 (voir le « fait fondamental » commenté lors de la définition de  $G$ ) : on en déduit qu'aucun élément de  $U$  ne correspond à une orbite contenue dans une surface affine tangente au flot radial. Ceci signifie que *l'action de  $\Gamma$  sur  $Q_R$  ne peut pas envoyer un point d'une  $G_0$ -orbite de dimension 1 dans une  $G_0$ -orbite de dimension 2*. Donc, l'image par un élément  $\gamma$  quelconque de  $\Gamma$  d'une  $G_0$ -orbite de dimension 1 est une  $G_0$ -orbite de dimension 1. Or, ces deux  $G_0$ -orbites sont les traces de surfaces dont les groupes fondamentaux contiennent  $H$  : on en déduit que  $\gamma H \gamma^{-1} \cap H$  est d'indice fini dans  $H$ . Il s'ensuit que  $\rho(\gamma)$  appartient au normalisateur  $N_0$  de  $G_0$  dans  $GL(3, \mathbb{R})$ . On en déduit que le feuilletage  $\mathbb{F}_0$  de  $\mathbb{R}^3$  dont les feuilles sont les  $G_0$ -orbites est préservé par le groupe d'holonomie : il définit donc un feuilletage  $\mathbb{F}$  de  $M$ . Considérons les feuilles de  $\mathbb{F}$  dont le groupe fondamental contient un sous-groupe d'indice fini de  $H$ . Ce sont des feuilles compactes, homéomorphes soit au tore, soit à la bouteille de Klein. Leur union, que nous notons  $L$ , est un fermé de  $M$ . En effet, pour tout feuilletage de codimension 1, l'union des feuilles compactes est un fermé (voir [16]), et une feuille compacte est finiment revêtue par les feuilles compactes qui lui sont proches. Les surfaces affinement tangentes au flot radial sont contenues dans  $L$ . L'action de  $\rho(H)$  sur  $\mathbb{R}^3$  préserve chaque feuille de  $\mathbb{F}_0$  : on en déduit que l'holonomie d'une feuille contenue dans  $L$  est d'ordre fini. Le compact  $L$  est donc ouvert : c'est  $M$  tout entier. Les feuilles de  $\mathbb{F}$  sont donc les fibres d'une fibration sur le cercle. Quitte à prendre un revêtement fini, on peut donc supposer que  $H$  est exactement le groupe fondamental de chaque feuille.

On en déduit aussi que l'action de  $G_0$  sur  $\mathbb{R}^3$ , qui commute bien sûr à celle de  $H$ , donne lieu via l'application développante à une action de  $G_0$  sur  $M$  dont les orbites sont exactement les feuilles de  $\mathbb{F}$ . Pour être plus précis, le relèvement de cette action à  $\widetilde{M}$  est transportée par  $\mathbb{D}$  sur l'action affine de  $G_0$  sur  $\mathbb{R}^3$ . De plus, la restriction de  $\mathbb{D}$  à chaque orbite de  $G_0$  dans  $\widetilde{M}$  est injective. On en déduit que l'action de  $\rho(H)$  sur une  $G_0$ -orbite contenue dans l'image de l'application développante est libre et propre.

Soit  $U$  une  $G_0$ -orbite de dimension 2 dans  $\mathbb{R}P^2$ . Soit  $\widetilde{W}$  sa préimage par  $\pi$  : sa frontière est une union d'au plus trois relevés de surfaces affinement tangentes au flot radial (nous avons vu précédemment que cette frontière est non-vide, et la frontière de  $\mathbb{D}(U)$  contient au plus trois orbites de dimension 1). Tout élément de  $\Gamma$  envoyant un point de  $U$  sur un autre point de  $U$  admet une puissance qui préserve chacun de ces relevés, et qui appartient donc à  $H$ . La restriction de  $p$  à l'adhérence de  $\widetilde{W}$  est donc un revêtement d'indice fini sur son image, et le groupe fondamental de cette image est une extension finie de  $H$ . On en déduit que cette image est une sous-variété à bord  $W$  de  $M$ , homéomorphe à  $T \times [0, 1]$ , bordée par deux surfaces affinement tangente au flot. Nous appelons ces copies *morceaux affines de  $M$* . La variété  $M$  s'obtient en recollant les uns après les autres ces morceaux affines. De manière plus générale, si  $T_1$  et  $T_2$  sont deux surfaces affinement tangentes au flot radial, elles bordent une sous-variété  $W$ , homéomorphe à  $T \times [0, 1]$ , qui est une union de morceaux affines de  $M$ .

Fixons une orientation de  $G_0 \simeq \mathbb{R}^2$  : ceci induit une orientation sur chacune de ses orbites dans  $\widetilde{M}$  et dans  $M$ . Une orientation de  $M$  étant fixée une fois pour toute, nous définissons ainsi une orientation transverse à  $\mathbb{F}$  et à son relevé dans  $\widetilde{M}$ . Remarquons le fait élémentaire suivant : soit  $W$  est une union de morceaux affines. Si l'orientation transverse de  $\mathbb{F}$  est rentrante dans  $W$  en une des composantes de  $\partial W$ , elle est sortante de  $W$  en l'autre composante de  $\partial W$ .

Ce critère se relève dans  $\widetilde{M}$  selon la version suivante : soient  $\widetilde{T}_1$  et  $\widetilde{T}_2$  sont deux relevés dans  $\widetilde{M}$  de deux surfaces affinement tangentes au flot radial. Soit  $\widetilde{W}$  le domaine de  $\widetilde{M}$  qu'elles bordent. Si l'orientation transverse induite par l'orientation de  $G_0$  est rentrante dans  $\widetilde{W}$  en  $\widetilde{T}_1$ , elle est sortante de  $\widetilde{W}$  en  $\widetilde{T}_2$ .

Nous en extrayons la version finale suivante :

**CRITÈRE DÉCISIF.** — *Soit  $\overline{W}$  un cône ouvert dans  $\mathbb{R}^3$  préservé par l'action de  $G_0$  contenu dans l'image de  $\mathbb{D}$ . Soient  $P_1$  et  $P_2$  deux  $G_0$ -orbites dans  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2, contenues dans l'adhérence de  $\overline{W}$  et l'image de  $\mathbb{D}$  (ce sont en général des demi-plans ou des quarts de plans). Si l'orientation transverse définie par l'orientation de  $G_0$  est rentrante dans  $\overline{W}$  en  $P_1$ , elle est sortante de  $\overline{W}$  en  $P_2$ .*

Ce critère décisif est exactement le phénomène mis en œuvre lors de la preuve du lemme 3.9.

Nous achevons l'étude en distinguant selon le type de  $G$  :

• *G est de type U.* — Toutes les orbites de  $G$  sont de dimension 1 : les feuilles de  $\mathbb{F}$  sont toutes affinement tangentes au flot radial. L'étude de l'action de  $\widehat{G}$  sur  $\mathbb{R}^3$  montre le fait suivant : il existe un plan  $\widehat{G}$ -invariant sur lequel toutes les  $G_0$ -orbites, autres que celles de l'origine, sont des demi-droites. L'action de  $\rho(H)$  sur ce plan n'est donc pas propre. Donc, ce plan ne rencontre pas l'image de l'application développante. D'après la proposition 3.8,  $M$  est donc une suspension affine généralisée.

• *G est de type C.* — Dans ce cas, l'image par  $\mathbb{D}$  de l'adhérence de  $\widetilde{W}$  est exactement l'ensemble  $\overline{W}$  des points  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $z > 0$  ou  $z = 0, y \neq 0$ . Les composantes  $\widetilde{T}_1$  et  $\widetilde{T}_2$  de  $\partial \overline{W}$  sont respectivement  $\{z = 0, y > 0\}$  et  $\{z = 0, y < 0\}$ . Un simple calcul montre que l'orientation transverse définie par celle de  $G_0$  est simultanément rentrante ou sortante de  $\overline{W}$  en  $\widetilde{T}_1$  et  $\widetilde{T}_2$ . Ceci contredit le critère décisif.

• *G est de type P.* — Supposons que  $P_1 = \{z = 0, y > 0\}$  rencontre l'image de  $\mathbb{D}$  : soit  $\widetilde{T}_1$  la composante connexe de la préimage par  $\mathbb{D}$  de  $\{z = 0\}$ . Comme le stabilisateur de  $\widetilde{T}_1$  est  $H$ , il ne peut pas être tout  $\Gamma$ . Il existe donc une autre préimage  $\widetilde{T}_2$  de  $\{z = 0\}$ . On peut choisir celle-ci de sorte que la région de  $\widetilde{M}$  comprise entre  $\widetilde{T}_1$  et  $\widetilde{T}_2$  ne rencontre pas  $\mathbb{D}^{-1}(\{z = 0\})$ . Notons  $\widetilde{W}$  cette région. C'est le relevé d'une union finie de morceaux affines de  $M$ . On en déduit que l'image par  $\mathbb{D}$  de  $\widetilde{T}_2$  est le demi-plan  $P_2 = \{z = 0, y < 0\}$ , et que le demi-espace  $\{z > 0\}$  (ou  $\{z < 0\}$ ), privé d'un quart de plan  $\{z > 0, y = 0, x > 0\}$  ou  $\{z > 0, y = 0, x < 0\}$  est contenu dans l'image de l'application développante. Or, aucun triplet  $\overline{W} = \{\pm z > 0\} \setminus \{z > 0, y = 0, \pm x > 0\}$ ,  $P_1$  et  $P_2$  n'obéit au critère décisif.

On en déduit que le plan  $\{z = 0\}$  ne rencontre pas l'image de  $\mathbb{D}$ . D'après la proposition 3.8, ceci achève la preuve du théorème dans ce cas.

• *G est de type D.* — Le critère décisif dans ce cas n'est autre que celui apparaissant au lemme 3.9. Les seuls recollements possibles sont donc ceux décrits à la section 3.2. La variété  $M$  est donc une variété diagonale.

Ceci achève la preuve du théorème B.  $\square$

**COROLLAIRE 5.4.** — *Si le groupe d'holonomie contient un sous-groupe d'indice fini préservant un plan de  $\mathbb{R}^3$ , alors  $M$  est une suspension affine généralisée.*

*Preuve.* — Quitte à prendre un revêtement fini, on peut supposer que le sous-groupe préservant le plan soit tout le groupe d'holonomie. Si l'image de l'application développante ne rencontre pas le plan invariant, on applique la proposition 3.8. Sinon, la préimage par l'application développante se projette dans  $M$  en une surface (éventuellement non connexe) affinement tangente au flot radial. On applique alors le théorème B.  $\square$

Le théorème C découle du théorème B et de la proposition 4.1.

*Montrons maintenant le théorème A.* — On suppose donc que le groupe d'holonomie est virtuellement résoluble. Quitte à prendre un revêtement fini, on peut supposer qu'il préserve un plan où une droite de  $\mathbb{R}^3$ . S'il y a un plan invariant, nous concluons grâce au corollaire 5.4. Sinon, à conjugaison près, le groupe d'holonomie est contenu dans le groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} e^u \cos \theta & e^u \sin \theta & 0 \\ -e^u \sin \theta & e^u \cos \theta & 0 \\ a & b & e^v \end{pmatrix}.$$

De plus, son groupe dérivé, qui est l'image par  $\rho$  du groupe dérivé  $\Gamma' = [\Gamma, \Gamma]$  de  $\gamma$ , est un sous-groupe du groupe des matrices de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme le groupe d'holonomie n'admet pas de plan invariant, on obtient que son groupe dérivé n'est ni trivial, ni cyclique.

Considérons la droite  $d_0$  invariante  $x = y = 0$ . Si elle rencontre l'image de l'application développante, elle induit des orbites périodiques du flot radial correspondant à des points fixes dans  $Q_R$  d'un élément de  $\Gamma$  de type diagonal double, siphon elliptique ou similitude. Ceci est impossible d'après le théorème C.

Donc,  $d_0$  ne rencontre pas l'image de l'application développante. Considérons les plans de  $\mathbb{R}^3$  contenant  $d_0$ . Ils induisent sur un feuilletage régulier  $\mathbb{F}$ , tangent au flot radial. De plus, ce feuilletage est sans holonomie. D'après le théorème de Sacksteder, il est produit : ceci signifie que si  $\tilde{\mathbb{F}}$  désigne le relevé de  $\mathbb{F}$  dans le revêtement universel de  $M$ , l'espace des feuilles de  $\tilde{\mathbb{F}}$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}$ . L'action de  $\Gamma$  sur cet espace des feuilles est une action par translations. En particulier, le groupe des commutateurs  $\Gamma'$  agit trivialement sur cet espace des feuilles : en d'autres termes, l'action de  $\Gamma'$  sur  $\tilde{M}$  préserve chaque feuille de  $\tilde{\mathbb{F}}$ . Par ailleurs, soit  $F$  une feuille de  $\tilde{\mathbb{F}}$ . Elle est tangente au relevé du flot radial : son image par  $\pi$  est donc un chemin dans  $Q_R$ . La restriction de  $\mathbb{D}$  à ce chemin est un homéomorphisme local à valeur dans une droite affine. Elle est donc injective. On en déduit que la restriction de  $\mathbb{D}$  à  $F$  est injective. Comme l'action de  $\Gamma'$  sur  $F$  est libre, la restriction de  $\rho$  à  $\Gamma'$  est injective. Le groupe des commutateurs  $\Gamma'$  est donc isomorphe à son image par  $\rho$ . Il est donc abélien. Nous avons vu auparavant que son image par  $\rho$  n'est ni triviale, ni cyclique. Donc,  $\Gamma'$  contient un sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Il s'ensuit que les feuilles de  $\mathbb{F}$  sont des quotients de tores, ce sont donc des surfaces compactes plongées plates et tangentes au flot radial : on conclut par le théorème B.  $\square$

## 6. Variétés affines radiales convexes

Cette section est consacrée à la preuve du théorème D. Rappelons qu'une variété affine radiale  $M$  est dite *convexe* si l'image de son application développante est un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^3$ . Notons  $\Omega$  cette image. Étant invariante par le flot radial,  $\Omega$  est un cône admettant l'origine comme sommet.

Nous aurons également besoin de quelques rudiments sur les tores affines de dimension 2. Nous distinguons cinq sous-groupes abéliens connexes de  $\text{Aff}(2, \mathbb{R})$  :

- *Les groupes radiaux*. — Ils ont la propriété de fixer l'origine de  $P$  :

$$D' = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u, v > 0 \right\}, \quad P' = \left\{ \begin{pmatrix} u & s & 0 \\ 0 & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u > 0 \right\}.$$

- *Les groupes unipotents* :

$$T' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & s \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad C' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t & s + \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- *Le groupe de transvection* :

$$E' = \left\{ \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, u > 0 \right\}.$$

Soit  $A$  un de ces groupes. Il est isomorphe à  $\mathbb{R}^2$ . Son action sur le plan affine admet des orbites de dimension 2. Soit  $U$  une d'entre elle. L'action de  $A$  sur  $U$  est libre et transitive. Soit  $H$  un sous-groupe discret cocompact de  $A$  : le quotient de  $U$  par l'action de  $H$  est naturellement un tore affine. Les tores obtenus de cette manière sont dits *homogènes convexes* (on convient de dire aussi  $A$ -homogène si on veut préciser pour quel groupe  $A$ ). Il est clair que pour chacun d'entre eux le groupe des transformations affines agit transitivement.

Soit  $T$  un tore affine. Ce qui suit découle de [18] (on peut aussi indiquer [1]) :

- l'image de l'application développante est un ouvert convexe du plan affine, si et seulement si  $T$  est un des tores homogènes convexes ci-dessus ;
- l'image de l'application développante est un ouvert convexe du plan affine ne contenant pas de droite affine complète si et seulement si  $T$  est un tore  $D'$ -homogène convexe.

**PROPOSITION 6.1.** — *Les variétés affines radiales convexes de dimension 3 pour lesquelles  $\Omega$  est un ouvert convexe contenant une droite affine complète sont les suspensions affines généralisées issues d'orbifolds affines homogènes convexes qui ne sont pas finiment revêtues par un tore  $D'$ -homogène.*

*Preuve.* — Un sens de la proposition est clair, seul pose problème la réciproque, à savoir que si  $\Omega$  est un ouvert convexe contenant une droite affine complète, alors  $M$  est une des suspensions affines généralisées tolérées par l'énoncé. Nous nous plaçons donc dans ce cadre.

Soit  $P_0$  un plan linéaire de  $\mathbb{R}^3$  découpant  $\mathbb{R}^3$  en deux demi-espaces dont l'un contient  $\Omega$ . Soit  $\Delta$  l'ensemble des directions des droites affines contenues dans  $\Omega$ . Il est préservé par l'action du groupe d'holonomie. Chaque élément de  $\Delta$  est contenu dans  $P_0$ . Si  $\Delta$  contient deux éléments différents, l'espace vectoriel qu'il engendre est  $P_0$  tout entier. On en déduit alors que  $P_0$  est préservé par le groupe d'holonomie, tout en étant disjoint de  $\Omega$ . D'après la proposition 3.8,  $M$  est alors une suspension affine généralisée induite par une orbifold affine. Remarquons que cette orbifold affine doit être convexe, *i.e.* l'image de son application développante doit être un ouvert convexe du plan affine, et que cet ouvert du plan affine doit contenir une droite affine complète. La discussion préliminaire sur les tores affines montre que la surface affine est finiment revêtue par un tore homogène convexe qui n'est pas  $D'$ -homogène.

Il reste le cas où  $\Delta$  ne contient qu'un seul élément  $d$ . Les plans tangents à  $\partial\Omega$  doivent alors tous contenir  $d$ , tout en étant tangent au flot radial. On en déduit que  $\Omega$  est soit un demi-espace, soit un quart d'espace (*i.e.* une composante connexe de  $\mathbb{R}^3$  privé de deux hyperplans se rencontrant transversalement en  $d$ ). Chaque plan bordant  $\Omega$  est alors préservé par un sous-groupe d'indice deux du groupe d'holonomie. On conclut comme précédemment en utilisant la proposition 3.8.  $\square$

Il reste à traiter le cas où  $\Omega$  ne contient pas de droites affines complètes. Lorsque  $\Omega$  vérifie cette propriété, il est dit *saillant* (cf. [22], ce cas est aussi appelé *hyperbolique* dans [17]).

**PROPOSITION 6.2.** — *Les variétés affines radiales fermées de dimension 3 pour lesquelles l'image de l'application développante est un cône convexe saillant sont les exemples de Benzécri induits par une structure projective réelle convexe sur une orbifold de caractéristique d'Euler négative, et les suspensions de Benzécri issues d'orbifolds affines homogènes convexes qui sont finiment revêtues par un tore  $D'$ -homogène.*

*Preuve.* — Les ouverts convexes saillants admettent une propriété remarquable : ils admettent une métrique riemannienne analytique préservée par tous leurs automorphismes affines (cf. [23], [22]) (si on ne désirait qu'une métrique invariante, non nécessairement riemannienne, on pourrait se contenter de la distance de Hilbert, cf. [4]).

Dans le cas où  $\Omega$  est l'image de l'application développante d'une variété affine radiale  $M$ , la métrique  $g$  induit une métrique riemannienne sur  $M$  pour laquelle le flot radial est isométrique. Nous pourrions conclure ici en invoquant la

classification des flots isométriques en dimension 3 (*cf.* [5]). Mais nous pouvons conclure sans difficultés en utilisant les résultats du présent article de la manière suivante : le flot radial est isométrique, la famille  $\{\Phi_R^t\}$  est équicontinue. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà, son adhérence dans l'ensemble des transformations continues de  $M$  muni de la topologie de la convergence uniforme est compacte. Nous notons  $G$  cette adhérence. C'est manifestement un groupe abélien connexe compact de transformations affines de  $M$ . Il provient donc d'une action affine de  $\mathbb{R}^k$  ( $k > 0$ ) sur  $M$ . Les orbites de  $G$  dans  $M$  sont des quotients finis de tores de dimension 1, 2 ou 3. Si l'une d'entre elle est de dimension 1, c'est aussi une orbite périodique du flot radial. Comme le flot est isométrique, l'application de premier retour le long de l'orbite périodique est une rotation. D'après le théorème C, ou plus précisément d'après les sections 4.1 et 4.3,  $M$  est un exemple de Benzécri. Si  $G$  admet une orbite de dimension 3, celle-ci est à la fois ouverte et fermée, puisque c'est un tore. Par connexité de  $M$ , l'action de  $G$  est transitive. Donc, du point de vue topologique,  $M$  est quotient fini d'un tore tridimensionnel. D'après le théorème A,  $M$  est une suspension affine généralisée. Si  $G$  n'admet que des orbites de dimension 2, un revêtement fini de  $M$  fibre en tores sur le cercle. L'holonomie est alors virtuellement résoluble. On applique là encore le théorème A.

Dans tous les cas, nous avons vu que  $M$  est une suspension affine généralisée. Pour achever la preuve de la proposition, il suffit de vérifier que les suspensions affines généralisées pour lesquelles l'image de l'application développante est un ouvert convexe saillant sont exactement celles permises par l'énoncé. Mais ceci découle de la discussion préliminaire sur les tores affines, et de la classification des surfaces projectives convexes (*cf.* lemme 1.5 de [7]).  $\square$

Le théorème D est un corollaire immédiat des propositions 6.1 et 6.2.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARBOT (T.). — *La classification des surfaces affines fermées d'après Benzécri et Nagano-Yagi, et la classification des tores projectifs réels.* — Prépublication Universidade Federal Fluminense, 1997.
- [2] BARBOT (T.). — *Variétés affines radiales de dimension 3.* — Prépublication Universidade Federal Fluminense, 1997.
- [3] BENZÉCRI (J.-P.). — *Variétés localement affines et projectives*, Bull. Soc. Math. France, t. **88**, 1960, p. 229–332.
- [4] BUSEMANN (H.), KELLY (P.). — *Projective geometry and projective metrics.* — Academic Press, 1953.

- [5] CARRIÈRE (Y.). — *Flots riemanniens*, Astérisque **116**, 1984, p. 31–52.
- [6] CARRIÈRE (Y.). — *Questions ouvertes sur les variétés affines*. — Séminaire Gaston Darboux de Géométrie et de Topologie Différentielle, 1991–1992 (Montpellier), Univ. Montpellier II, 1993, p. 69–72.
- [7] CHOI (S.). — *Convex decomposition of real projective surfaces. I :  $\pi$ -annuli and convexity*, J. Diff. Geom., t. **40**, 1994, p. 165–208.
- [8] CHOI (S.). — *Convex decomposition of real projective surfaces. II : Admissible decompositions*, J. Diff. Geom., t. **40**, 1994, p. 239–283.
- [9] CHOI (S.). — *Convex decomposition of real projective surfaces. III*, J. Korean. Math. Soc., t. **33**, 1996.
- [10] CHOI (S.). — *The decomposition and the classification of radiant affine 3-manifolds (avec un appendice par Barbot-Choi)*. — Prépublication dg-ga/9712006, à paraître aux Mem. Amer. Math. Soc.
- [11] CHOI (S.), GOLDMAN (W.M.). — *The classification of real projective structures on compact surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc, t. **34** (2), 1997, p. 161–171.
- [12] EPSTEIN (D.B.A.). — *Foliations with all leaves compact*, Ann. Inst. Fourier, t. **26**, 1976, p. 265–282.
- [13] FRIED (D.), GOLDMAN (W.), HIRSCH (M.). — *Affine manifolds with nilpotent holonomy*, Comment. Math. Helv., t. **56**, 1981, p. 487–523.
- [14] GOLDMAN (W.M.). — *Convex real projective structures on compact surfaces*, J. Diff. Geom., t. **31**, 1990, p. 791–845.
- [15] GOLDMAN (W.M.). — *Geometric structures on manifolds and varieties of representations*, in *Geometry of group representations*, Contemp. Math., t. **74**, 1988, p. 169–198.
- [16] HAEFLIGER (A.). — *Variétés feuilletées*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, t. **16**, 1962, p. 367–397.
- [17] KOSZUL (J.-L.). — *Déformations de connexions localement plates*, Ann. Inst. Fourier, t. **18**, 1968, p. 103–114.
- [18] NAGANO (T.), YAGI (K.). — *The affine structures on the real two-torus*, Osaka J. Math., t. **11**, 1974, p. 181–210.
- [19] RATCLIFFE (J.G.). — *Foundations of Hyperbolic Manifolds*. — Graduate Texts in Mathematics **149**, Springer Verlag.
- [20] THURSTON (W.). — *Three-dimensional geometry and topology*. — Notes, Berkeley University, 1990.
- [21] SULLIVAN (D.), THURSTON (W.). — *Manifolds with canonical coordinates : some examples*, Ens. Math., t. **29**, 1983, p. 15–25.
- [22] VEY (J.). — *Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants*, Ann. Scuol. Norm. Sup. Pisa, t. **24**, 1970, p. 641–665.
- [23] VINBERG (E.B.). — *Homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., t. **12**, 1963, p. 340–403.