

# BULLETIN DE LA S. M. F.

GILLES BAILLY-MAITRE

**Sur le système local de Gauss-Manin d'un  
polynôme de deux variables**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 128, n° 1 (2000), p. 87-101

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_2000\\_\\_128\\_1\\_87\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_1_87_0)>

© Bulletin de la S. M. F., 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SUR LE SYSTÈME LOCAL DE GAUSS-MANIN D'UN POLYNÔME DE DEUX VARIABLES

PAR GILLES BAILLY-MAITRE (\*)

---

RÉSUMÉ. — L'objet de cet article est d'étudier le système local de Gauss-Manin  $\mathbf{V} = R^1 f_* \mathbb{C}_X$  associé à un polynôme  $f$  de deux variables. On utilise une compactification lisse des fibres de  $f$  pour obtenir une suite exacte  $0 \rightarrow \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}^\infty \rightarrow 0$ . Les propriétés connues de  $\bar{\mathbf{V}}$  et de  $\mathbf{V}^\infty$  en impliquent de nouvelles sur  $\mathbf{V}$ . On montre notamment que  $\mathbf{V}$  n'est pas semi-simple en général. On introduit ensuite la notion de bases spéciales de la fibre de  $\mathbf{V}$  dans lesquelles on peut décrire de manière élégante la représentation de monodromie associée à  $\mathbf{V}$ .

ABSTRACT. — ABOUT THE GAUSS-MANIN LOCAL SYSTEM ASSOCIATED TO A POLYNOMIAL OF TWO COMPLEXES VARIABLES. — This paper is dedicated to the study of the Gauss-Manin local system  $\mathbf{V} = R^1 f_* \mathbb{C}_X$  associated to a polynomial of two variables. We use a smooth compactification of the fibres of  $f$  in order to obtain a short exact sequence  $0 \rightarrow \bar{\mathbf{V}} \rightarrow \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}^\infty \rightarrow 0$ . The well-known properties of  $\bar{\mathbf{V}}$  and  $\mathbf{V}^\infty$  imply some new ones on  $\mathbf{V}$ . In particular, we show that  $\mathbf{V}$  is not semi-simple in general. We introduce special bases of the fiber of  $\mathbf{V}$  which are convenient for the description of the linear representation of monodromy associated to  $\mathbf{V}$ .

Si  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  est une application polynomiale, rappelons qu'il existe un ensemble fini minimal  $B$ , l'ensemble de bifurcation de  $f$ , tel que si on note  $S = \mathbb{C} \setminus B$  et  $X = f^{-1}(S)$ , alors  $f : X \rightarrow S$  réalise une fibration topologique localement triviale. La fibre  $F_s = f^{-1}(s)$  est une hypersurface algébrique lisse. Comme de coutume, nous allons étudier le fibré vectoriel obtenu en remplaçant  $F_s$  par  $H^{n-1}(F_s)$ , où  $H^*$  désigne la cohomologie de De Rham. On obtient en fait un système local (*i.e.* un faisceau localement constant) classiquement noté  $R^{n-1} f_* \mathbb{C}_X$  et appelé *système local de Gauss-Manin* du polynôme  $f$ .

---

(\*) Texte reçu le 15 septembre 1998, révisé le 15 mars 1999, accepté le 7 avril 1999.  
G. BAILLY-MAITRE, Laboratoire de Mathématiques Pures, Université de Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence CEXE. Email : [bailly@math.u-bordeaux.fr](mailto:bailly@math.u-bordeaux.fr).

Classification mathématique par matières : 14D07, 14F45, 32S40.

Mots clés : monodromie, Gauss-Manin, polynôme.

L'objet de cet article est de donner des propriétés du système local  $\mathbf{V} = R^1 f_* \mathbb{C}_X$  associé à un polynôme de deux variables à singularités isolées. Le système local  $\mathbf{V}$  est donc un faisceau localement constant dont la fibre en un point  $s \in S$  est  $H^1(F_s)$ .

Nous allons montrer par exemple que ce système local  $\mathbf{V}$  n'est pas semi-simple en général. Cela implique notamment que le problème de Riemann-Hilbert associé, voir l'exposé de Beauville [3], n'a pas de solution donnée par la théorie générale. On reviendra sur cette question dans un travail ultérieur.

Pour la description explicite du système  $\mathbf{V}$  nous introduisons une classe particulière de bases de  $H^1(F_s)$  qui généralisent, en un certain sens, les bases distinguées de cycles évanescents définies dans l'étude locale des singularités isolées d'hypersurfaces.

### 1. Rappels sur une bonne compactification

Soit  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  une application polynomiale à singularités isolées, soit  $\tilde{f} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  le polynôme obtenu en homogénéisant  $f$ . En posant  $d = \deg f$ , on note :

$$\tilde{F}_t = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) ; \tilde{f}(x, y, z) - tz^d = 0\}.$$

Les points de  $f$  à l'infini sont  $\mathbb{L}_\infty \cap \tilde{F}_t$ , où  $\mathbb{L}_\infty = \{z = 0\}$ . Soit  $p$  un de ces points ; on note  $\mu_{p,t}$  le nombre de Milnor local de la courbe  $\tilde{F}_t$  en ce point. On rappelle que  $b$  est une valeur *irrégulière à l'infini* de  $f$  si  $\mu_{p,b}$  est différent du nombre de Milnor local de la fibre générique  $\tilde{F}_s$  et on note :

$$\lambda_{p,b} = \mu_{p,b} - \mu_{p,s}.$$

On utilisera aussi par la suite les notations suivantes :

$$\lambda_b = \sum_p \lambda_{p,b} \quad \text{et} \quad \lambda = \sum_{b \in B} \lambda_b.$$

Soit  $I$  l'ensemble des valeurs irrégulières à l'infini de  $f$  et soit  $C$  l'ensemble des valeurs critiques de  $f$  alors on a

$$B = C \cup I$$

Considérons

$$\begin{array}{ccc} \phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbb{C}), \\ (x : y : z) & \longmapsto & (\tilde{f} : z^d). \end{array}$$

Par une suite finie d'éclatements des points d'indétermination de  $\phi$ , on définit une application  $\pi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  telle que  $\bar{\phi} = \phi \circ \pi$  soit régulière sur  $\mathbb{X}$ . Puis on fait, si besoin est, quelques éclatements supplémentaires pour que les transformées totales des courbes  $\tilde{F}_t$  soient des diviseurs à croisement normaux. On notera encore  $\pi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  la composition de ces deux séries d'éclatements.

Le lecteur est invité à se reporter à [14] pour examiner la construction en détail, rappelons-en néanmoins quelques propriétés :

- 1) on a  $\mathbb{X} = \mathbb{C}^2 \cup \mathcal{D}$  où  $\mathcal{D}$  est un arbre formé de courbes isomorphes à  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  ;
- 2) on a  $\mathcal{D} = D_\infty \cup D_{\text{cte}} \cup D_{\text{dic}}$ , où  $D_\infty$  est l'ensemble des courbes sur lesquelles  $\phi$  prend la valeur  $\infty (= (1 : 0))$ ,  $D_{\text{cte}}$  est l'ensemble des composantes sur lesquelles  $\phi$  prend une valeur constante finie, et  $D_{\text{dic}}$  est l'ensemble des composantes *dicritiques*, *i.e.* telles que la restriction de  $\phi$  à une de ces composantes soit surjective. Le nombre de ces composantes dicritiques est noté  $\delta(f)$ . Si  $D$  appartient à  $D_{\text{dic}}$ , on définit le degré de  $D$  par  $\deg D = \deg(\phi|_D)$ .

On peut alors décrire plus précisément l'ensemble  $I$  des valeurs irrégulières à l'infini :  $I$  est formé d'une part des valeurs prises par  $\phi$  sur les composantes de  $D_{\text{cte}}$  et d'autre part des valeurs critiques des restrictions de  $\phi$  à chaque composante dicritique. Ce fait est montré dans [15].

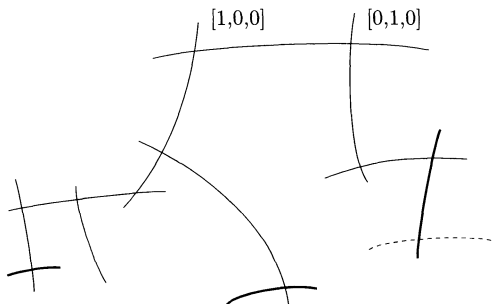
On va noter  $\bar{F}_t$  la transformée stricte de  $\bar{F}_t$  par  $\pi$  ; c'est une compactification de  $F_t$ . Si  $t$  n'est pas dans  $C$ , *i.e.* si  $F_t$  est lisse, alors  $\bar{F}_t$  est lisse. Le compactifié  $\bar{F}_t$  s'obtient en ajoutant un nombre fini de points à  $F_t$ . Si  $t$  n'est pas dans  $I$ , ces points sont situés sur les composantes dicritiques et alors, pour chaque  $D \in D_{\text{dic}}$ , on a :

$$|\bar{F}_t \cap D| = \deg D$$

On notera  $A_t = \bar{F}_t \setminus F_t$  ; on a donc (toujours dans le cas  $t \notin I$ ) :

$$|A_t| = \sum_{D \in D_{\text{dic}}} \deg D$$

EXEMPLE 1.1. — Soit  $f = x + x^2y^2 + x^2y^3$  ; on obtient l'arbre  $\mathcal{D}$  représenté ci-dessous. Les composantes dicritiques sont représentées en gras et sont de degré 1. Sur la composante dessinée en pointillés  $\phi$  prend la valeur  $(0 : 1)$  : donc 0 appartient à  $I$ .



## 2. Système local à l'infini

Il y a une équivalence de catégories classique entre les systèmes locaux de base  $S$  et les représentations linéaires du groupe fondamental de  $S : \pi_1(S, s)$ . Notons  $\rho : \pi_1(S, s) \rightarrow \text{Aut}(H^1(F_s))$  la représentation associée à  $\mathbf{V}$ ; l'opérateur linéaire sur  $H^1(F_s)$  associé à un lacet élémentaire  $\gamma_b$  issu de  $s$  entourant un unique point  $b$  de  $B$  est noté  $T_b$  et est appelé *opérateur de monodromie*. Pour une étude détaillée de ces opérateurs, voir [4] et [16]. Le sous-système local trivial maximal de  $\mathbf{V}$  sera noté  $\mathbf{V}^\rho$  et  $H^1(F_s)^\rho$  désignera le sous-espace de  $H^1(F_s)$  invariant par l'action de  $\rho$ . On a donc

$$H^1(F_s)^\rho = \bigcap_{b \in B} \text{Ker}(T_b - \text{Id}).$$

Soit  $\bar{\mathbf{V}} = R^1 f_* \mathcal{C}_{\bar{X}}$  où  $\bar{X} = \bar{\phi}^{-1}(S)$ ; on a la suite exacte de systèmes locaux suivante :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \bar{\mathbf{V}} \xrightarrow{i^*} \mathbf{V} \xrightarrow{R} \mathbf{V}^\infty \rightarrow 0$$

où  $\mathbf{V}^\infty = \mathbf{V}/\bar{\mathbf{V}}$ ,  $i$  est l'inclusion  $F_s \hookrightarrow \bar{F}_s$  et  $R$  est le résidu de Leray-Poincaré. Si l'on se place au niveau des fibres de ces systèmes locaux, on retrouve la suite exacte de Gysin du couple  $(\bar{F}_s, A_s)$  :

$$0 \rightarrow H^1(\bar{F}_s) \xrightarrow{i^*} H^1(F_s) \xrightarrow{R} \tilde{H}^0(A_s) \rightarrow 0.$$

Explicitons les morphismes de cette suite. Le morphisme  $i^*$  est l'application de restriction des formes différentielles. Soit  $[\omega] \in H^1(F_s)$ ; en regardant  $\omega$  comme une forme définie sur  $\tilde{F}_s$  ayant des pôles en les points de  $A_t$ , alors  $R([\omega])$  est l'application qui à chaque point de  $A_t$  associe le résidu de la forme  $\omega$  au voisinage de ce point. Les opérateurs de cette suite commutent avec les monodromies de chaque système local :  $\bar{T}_b, T_b$  et  $\tilde{T}_b^\infty$ . Le lecteur est invité à consulter [4] où cette suite est décrite en homologie.

On a  $\text{rang}(\bar{\mathbf{V}}) = 2g$ , où  $g = \text{genre}(\bar{F}_s)$  donc  $\bar{\mathbf{V}} = 0$  si et seulement si  $g = 0$ . De l'autre côté, on a  $\mathbf{V}^\infty = 0$  si et seulement si  $\mathbb{L}_\infty \cap \tilde{F}_s$  est réduit à un point et le germe de  $\tilde{F}_s$  en ce point est irréductible, ou de manière équivalente s'il n'y a qu'une seule composante dicritique, celle-ci étant de degré 1.

On va décrire  $\tilde{H}^0(A_s)$  et  $\tilde{T}_b^\infty$  plus précisément. Pour cela, nommons  $D_i$ ,  $i \in \{1, \dots, \delta(f)\}$  les composantes dicritiques de  $\mathbb{X}$  et notons

$$k_i(t) = |\bar{F}_t \cap D_i|;$$

on a vu que  $k_i(s) = \deg D_i$  si  $s$  appartient à  $S$ .

Le groupe  $H^0(A_s)$  est l'espace vectoriel des fonctions de  $A_s$  dans  $\mathbb{C}$ ,  $\tilde{H}^0(A_s)$  est le sous-espace vectoriel des fonctions dont la somme des valeurs est nulle; notons  $T^\infty$  l'extension de  $\tilde{T}^\infty$  à  $H^0(A_s)$ . Soit  $h \in H^0(A_s)$ ; notons  $h_i$  la restriction de  $h$  aux points de  $D_i$ . Si  $b \in B$  n'est pas une valeur critique de  $\phi|_{D_i}$ , alors  $T_b^\infty$  n'a aucun point fixe  $h_i$ . Dans le cas contraire, on a  $k_i(b) < k_i(s)$  et  $T_b^\infty$  fait permuter  $k_i(s) - k_i(b) + 1$  valeurs de  $h_i$ . Plus précisément, la matrice de  $T_b^\infty$  dans la base canonique est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & P_1 & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & P_\ell \end{pmatrix},$$

où  $P_1, \dots, P_\ell$  sont des matrices de permutations sans points fixes, et où  $\ell$  est le nombre de composantes dicritiques sur lesquels la restriction de  $\phi$  admet  $b$  comme valeur critique. Si  $P_j$  correspond au dicritique  $D_i$ , la dimension de  $P_j$  est  $k_i(s) - k_i(b) + 1$ .

Regardons maintenant l'action d'un lacet de taille suffisante pour entourer tous les points de bifurcations de  $f$ ; on rappelle que l'opérateur linéaire associé est appelé *monodromie à l'infini* et est noté  $T_\infty$ . Il est évident que l'on peut obtenir  $T_\infty$  en composant dans le bon ordre tous les opérateurs  $T_b$ . Dans nos différents contextes, on emploiera les notations  $\bar{T}_\infty, T_\infty$  et  $T_\infty^\infty$ . Pour décrire l'action de  $T_\infty^\infty$ , on va utiliser la propriété suivante de  $\mathbb{X}$ : chaque composante dicritique ne coupe  $D_\infty$  qu'en un seul point, voir [15] ou [9]. Donc l'action de  $T_\infty^\infty$  sur  $h_i$  est une permutation circulaire de toutes ses valeurs et donc la matrice de  $T_\infty^\infty$  dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & C_{\delta(f)} \end{pmatrix},$$

où  $C_i$  est une matrice de permutation circulaire (correspondant à  $D_i$ ) de dimension  $k_i(s)$ . Comme le polynôme caractéristique de  $C_i$  est  $x^{k_i(s)} - 1$ , on a :

$$\dim \text{Ker}(T_\infty^\infty - \text{Id}) = \delta(f).$$

Soit  $g$  la fonction qui à tout élément de  $A_s$  associe la valeur 1. Il est clair que  $H^0(A_s) = \tilde{H}^0(A_s) \oplus \mathbb{C} \cdot g$  et que  $g$  est invariant par l'action de  $T_\infty^\infty$ . Donc

$$\dim \text{Ker}(\tilde{T}_\infty^\infty - \text{Id}) = \delta(f) - 1 \quad \text{et} \quad \dim \tilde{H}^0(A_s)^\rho \leq \delta(f) - 1.$$

Or il est facile de construire  $\delta(f) - 1$  fonctions de  $\tilde{H}^0(A_s)$  invariantes par tous les opérateurs de monodromie de la façon suivante : on prend  $h$  constante non nulle sur  $D_1$  et sur  $D_i$  et  $h$  nulle sur le complémentaire et on choisit les constantes de sorte que la somme des valeurs de  $h$  fasse 0. Donc on a

$$\dim \tilde{H}^0(A_s)^\rho = \delta(f) - 1$$

On rappelle qu'un polynôme  $f$  est dit *bon à l'infini* si l'ensemble  $I$  des valeurs irrégulières à l'infini de  $f$  est vide ou de manière équivalente si  $\lambda = 0$ . On peut alors énoncer :

PROPOSITION 2.1. — *La condition*

(i)  *$f$  est bon à l'infini*

*implique l'une des trois conditions équivalentes suivantes :*

(ii) *toutes les composantes dicritiques sont de degré 1 ;*

(iii) *le système local  $\mathbf{V}^\infty$  est trivial ;*

(iv) *le système local  $\mathbf{V}^\infty$  est trivial à l'infini, i.e.  $\tilde{T}_\infty^\infty = \text{Id}$ .*

*Démonstration.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Soit  $D$  une composante dicritique de  $\mathbb{X}$ . On a vu que  $D \cap D_\infty$  est réduit à un point, donc  $D \setminus D \cap D_\infty \simeq \mathbb{C}$ . La restriction de  $\phi$  est alors un polynôme de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  sans valeurs critiques et surjectif donc de degré 1. Donc  $\deg(D) = 1$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Clair d'après ci-dessus puisque on a  $k_i(s) = 1$  pour tout  $i$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (iv). C'est évident.

(iv)  $\Rightarrow$  (ii). Comme on l'a vu,  $\tilde{T}_\infty^\infty = \text{Id}$  implique  $T_\infty^\infty = \text{Id}$ . Or une permutation circulaire n'est l'identité que si elle agit sur un singleton ; donc  $k_i(s) = 1$  et  $\deg(D_i) = 1$  quel que soit  $i$ .  $\square$

Remarquons que (ii)  $\nRightarrow$  (i) en général, car si l'on considère le polynôme  $f = x + x^2y^2 + x^2y^3$  de l'exemple 1, ses trois dicritiques sont de degré 1, mais 0 est une valeur irrégulière à l'infini de  $f$ .

### 3. Sur la semi-simplicité des systèmes locaux $\bar{\mathbf{V}}$ , $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}^\infty$

Le système local  $\bar{\mathbf{V}}$  est semi-simple car  $\bar{\mathbf{V}}$  est sous-jacent à une variation polarisable de structures de Hodge et donc on peut utiliser la remarque de Deligne, voir [7, (1.12)]. Néanmoins, on doit noter que le morphisme  $\bar{\phi} : \mathbb{X} \rightarrow S$  n'est pas projectif, donc la construction d'une polarisation sur  $\bar{\mathbf{V}}$  ne peut pas se faire de la façon habituelle, voir [6, p. 58]. Dans notre situation, le fait que la

forme

$$S_t : \begin{cases} H^1(\bar{F}_s) \times H^1(\bar{F}_s) \longrightarrow \mathbb{C}, \\ (\alpha, \beta) \longmapsto \int_{\bar{F}_s} \alpha \wedge \beta, \end{cases}$$

donne une forme bilinéaire horizontale de  $\bar{V} \times \bar{V} \rightarrow \mathbb{C}$  provient du fait que l'action du groupe  $\pi_1(S, s)$  sur  $H^2(\bar{F}_s) \cong \mathbb{C}$  est triviale. On peut le voir en regardant la suite exacte de Wang pour la monodromie autour d'une valeur spéciale  $b$

$$\longrightarrow H^2(\bar{F}_s) \xrightarrow{\bar{T}_b^{(2)} - \text{Id}} H^2(\bar{F}_s) \rightarrow H^3(K) \longrightarrow 0$$

où  $K$  est le bord d'un tube  $\bar{\phi}^{-1}(D_b)$ ,  $D_b$  étant un petit disque fermé centré en  $b$ . Mais  $K$  est une variété de dimension 3, compacte, connexe et orientée; donc

$$\dim H^3(K) = \dim H^0(K) = 1.$$

Ceci implique  $\bar{T}_b^{(2)} = \text{Id}$  et donc le résultat.

Le système local  $\mathbf{V}^\infty$  est semi-simple de façon évidente, voir la preuve de la proposition 3.2 ci-dessous. Par contre, même si le système local  $\mathbf{V}$  est sous-jacent à une variation admissible de  $\mathbb{Q}$ -structures de Hodge mixtes polarisées, voir [6, p. 121, déf. 7.2 et th. 7.3], on a le résultat suivant :

**THÉORÈME 3.1.** — *Le système local  $\mathbf{V}$  n'est pas semi-simple en général.*

*Démonstration.* — En fait,  $i^*(\bar{\mathbf{V}})$ , qu'on va aussi noter  $\bar{\mathbf{V}}$ , n'est pas un facteur direct dans  $\mathbf{V}$  en général. Supposons que ce soit le cas : on aurait  $\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} \oplus \mathbf{V}'$ , donc  $\mathbf{V}'$  serait isomorphe à  $\mathbf{V}^\infty$ . De plus, une conséquence du théorème des cycles invariants est que  $\bar{\mathbf{V}}^\rho = 0$  (voir [4]). Par suite, on aurait les égalités suivantes :

$$\text{rang}(\mathbf{V}^\rho) = \text{rang}(\bar{\mathbf{V}}^\rho \oplus \mathbf{V}'^\rho) = \text{rang}(\mathbf{V}'^\rho) = \text{rang}(\mathbf{V}^{\infty\rho}) = \delta(f) - 1.$$

Mais on a la formule :

$$(2) \quad \text{rang}(\mathbf{V}^\rho) = \sum_{b \in B} (n(F_b) - 1)$$

où  $n(F_b)$  est le nombre de composantes irréductibles de  $F_b$ , voir [4]. Et il n'y a pas toujours égalité entre les deux membres de droites des égalités ci-dessus. En effet, si l'on regarde à nouveau notre exemple

$$f = x + x^2y^2 + x^2y^3,$$

il est facile de voir que  $n(F_0) = 2$ ; on montre aussi aisément que toutes les autres fibres sont irréductibles (voir § 4.3 ci dessous). Donc  $\text{rang}(\mathbf{V}^\rho) = 1$ , et  $\delta(f) = 3$  (voir la figure de l'exemple 1.1), ce qui montre notre assertion. Le lecteur est invité à se reporter à [10] où le même problème est traité d'un point de vue différent.  $\square$



PROPOSITION 3.2. — *Le sous-système local  $\mathbf{V}^\rho$  de  $\mathbf{V}$  est un facteur direct, c'est-à-dire qu'il existe un sous-système local  $\mathbf{V}'$  tel que*

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^\rho \oplus \mathbf{V}'.$$

*Démonstration.* — On dira que deux systèmes locaux sur  $S$  sont d'intersection nulle si pour tout  $s \in S$  leurs fibres au-dessus de  $s$  sont d'intersection nulles. On va montrer que tout sous-système local  $\mathbf{W}$  de  $\mathbf{V}$  d'intersection nulle avec  $\overline{\mathbf{V}}$  est un facteur direct. C'est le cas pour  $\mathbf{V}^\rho$  puisqu'on a  $H^1(\overline{F}_s)^\rho = 0$  et donc on montre un résultat plus général. Soit  $\rho_\infty$  la représentation du groupe  $\pi_1(S, s)$  associée à  $\mathbf{V}^\infty$ ; comme on l'a vu ci-dessus, on peut toujours identifier l'image d'un lacet par  $\rho_\infty$  avec une permutation de  $S_m$  où  $m = |A_s|$ . Comme toute représentation linéaire d'un groupe fini est semi-simple, voir [18], on peut dire que  $\rho_\infty$  et donc  $\mathbf{V}^\infty$  sont semi-simples.  $\square$

Soit  $\mathbf{W}_\infty = R(\mathbf{W})$ ; alors il existe un supplémentaire  $\mathbf{W}'_\infty$  de  $\mathbf{W}_\infty$  dans  $\mathbf{V}^\infty$ ; posons  $\mathbf{W}' = R^{-1}(\mathbf{W}'_\infty)$ . Comme  $R$  est un épimorphisme, on a

$$\text{corang}(\mathbf{W}') = \text{corang}(\mathbf{W}'_\infty) = \text{rang}(\mathbf{W}_\infty) = \text{rang}(\mathbf{W}),$$

cette dernière égalité découlant du fait que  $\overline{\mathbf{V}} \cap \mathbf{W} = \{0\}$ . D'autre part, il est clair par construction que  $\mathbf{W}' \cap \mathbf{W} = \{0\}$ ; en effet, si  $y$  appartient à  $\mathbf{W}'_s \cap \mathbf{W}_s$ , on a :

$$R(y) \in R(\mathbf{W}'_s) \cap R(\mathbf{W}_s) \subset \mathbf{W}'_{\infty, s} \cap \mathbf{W}_{\infty, s} = \{0\}.$$

Donc  $y$  est dans  $\text{Ker } R|_{\mathbf{W}_s} = \overline{\mathbf{V}}_s$ , d'où  $y = 0$ . Par conséquent,  $\mathbf{W}'$  est un supplémentaire de  $\mathbf{W}$ .  $\square$

REMARQUE 3.3. — Le système local  $\mathbf{V}'$  est isomorphe au système quotient  $\mathbf{V}/\mathbf{V}^\rho$  et sa connaissance détermine complètement le système local  $\mathbf{V}$ . On va appeler  $\mathbf{V}'$  le système de Gauss-Manin réduit du polynôme  $f$ .

REMARQUE 3.4. — A. Dimca a montré que le  $\mathcal{D}$ -module

$$\mathbf{M} = \mathcal{H}^0(f_+ \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2})$$

qui prolonge à  $\mathbb{C}$  la connexion de Gauss-Manin associée au système local  $\mathbf{V}$  admet un sous- $\mathcal{D}$ -module  $\mathbf{M}^\rho$  qui correspond au système local  $\mathbf{V}^\rho$ ; mais alors  $\mathbf{M}^\rho$  n'est pas un facteur direct de  $\mathbf{M}$  en général, voir [8]

REMARQUE 3.5. — La formule (2) ainsi que la suite exacte (1) nous donnent l'inégalité de Kaliman :

$$\sum_{b \in B} (n(F_b) - 1) \leq \delta(f) - 1.$$

L'exemple traité nous montre que l'inégalité peut être stricte. Si l'on considère la suite exacte obtenue en homologie à partir de (1) :

$$0 \rightarrow \tilde{H}_0(A_s) \xrightarrow{t_R} H_1(F_s) \xrightarrow{i_*} H_1(\bar{F}_s) \rightarrow 0 ;$$

cette suite commute donc avec les opérateurs de monodromie  ${}^tT_b^{-1}$  et donne au niveau des systèmes locaux la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{V}^{\infty*} \longrightarrow \mathbf{V}^* \longrightarrow \bar{\mathbf{V}}^* \rightarrow 0$$

où  $\mathbf{W}^*$  désigne le système local dual de  $\mathbf{W}$ . Il est clair que la monodromie sur  $\tilde{H}_0(A_s)$  agit par permutation des points de  $A_s$  et que  $\dim \tilde{H}_0(A_s)^\rho = \delta(f) - 1$  (voir le paragraphe précédent). D'autre part, on sait que si on a une fibration propre  $p : E \rightarrow T$  entre deux variétés complexes de dimension relative  $m$ , telle que l'action de  $\pi_1(T)$  sur  $H^{2m}(p^{-1}(t))$  soit triviale, alors le théorème de dualité de Poincaré implique que le système local  $\mathbf{W} = R^m p_* \mathbb{C}_E$  satisfait  $\mathbf{W} \cong \mathbf{W}^*$ . Donc

$$\bar{\mathbf{V}} \cong \bar{\mathbf{V}}^* \quad \text{et} \quad \dim H_1(\bar{F}_s)^\rho = 0.$$

La suite exacte ci-dessus nous permet alors de montrer aisément

$$\dim H_1(F_s)^\rho = \delta(f) - 1$$

et par conséquent que  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{V}^*$  ne sont pas isomorphes en général. On peut trouver dans [10] un autre exemple qui montre que  $\dim H_1(F_s)^\rho \neq \dim H^1(F_s)^\rho$

#### 4. Bases spéciales

Écrivons  $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ . Notons  $T_i = T_{b_i}$  et  $F_i = F_{b_i}$ . On note  $\mu_i$  la somme des nombres de Milnor des singularités (à distance finie) de la courbe  $F_i$ ,  $\lambda_i = \lambda_{b_i}$  et  $\mu$  le nombre de Milnor global de  $f$ .

Rappelons (voir [17]) :

$$\mu = \sum_{i=1}^m \mu_i = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x, y]}{(f_x, f_y)}.$$

D'après le théorème 1 de [4] on a la formule suivante :

$$(3) \qquad \text{codim Ker}(T_i - \text{Id}) = \mu_i + \lambda_i - (n(F_i) - 1).$$

Une des conséquences de cette formule est que la famille des sous-espaces vectoriels  $\{\text{Ker}(T_b - \text{Id}) ; b \in B\}$  est en position générale dans  $H^1(F_s)$ . En effet, on a vu que

$$\dim \bigcap_{b \in B} \text{Ker}(T_b - \text{Id}) = \sum_{b \in B} (n(F_b) - 1)$$

et on a

$$\dim H^1(F_s) = \mu + \lambda.$$

Donc on a un isomorphisme :

$$E = \frac{H^1(F_s)}{\bigcap_{b \in B} \text{Ker}(T_b - \text{Id})} \xrightarrow{\sim} \frac{H^1(F_s)}{\text{Ker}(T_{b_1} - \text{Id})} \oplus \cdots \oplus \frac{H^1(F_s)}{\text{Ker}(T_{b_m} - \text{Id})}.$$

On va définir une base de  $E$  adaptée à cette décomposition. Notons

$$n_i = \text{codim Ker}(T_i - \text{Id}).$$

Pour chaque  $i \in \{1, \dots, m\}$  on choisit  $a_1^i, \dots, a_{n_i}^i$  dans  $H^1(F_s)$  tels que :

- $T_j(a_k^i) = a_k^i$  pour tout  $j \neq i$  ; donc  $[a_k^i] = 0$  dans  $\frac{H^1(F_s)}{\text{Ker}(T_j - \text{Id})}$  ;
- le morphisme  $\bar{T}_i$  induit par  $T_i$  sur  $\frac{H^1(F_s)}{\text{Ker}(T_i - \text{Id})}$  est sous forme de Jordan dans la base  $\{[a_k^i] ; 1 \leq k \leq n_i\}$ .

DÉFINITION 1. — Une telle base  $\{[a_k^i]\}$  de  $E$  est appelé une base spéciale.

L'intérêt de telles bases est qu'elles permettent en principe la description explicite du système de Gauss-Manin réduit  $\mathbf{V}'$  du polynôme  $f$ .

En effet, dans une base spéciale la matrice de l'application  $T_i$  (restreinte à  $E$ ) est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} & 0 & \begin{pmatrix} A_{1i} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} A_{2i} \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} J_i = \\ \text{Jordan}(\bar{T}_i) \end{pmatrix} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \begin{pmatrix} A_{di} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Il est clair que toute l'information est concentrée sur la  $i$ -ième colonne de blocs. Comme  $\text{codim Ker}(T_i - \text{Id}) = n_i$ , on peut remarquer que si l'on remplace dans cette colonne  $J_i$  par  $J_i - \text{Id}$ , la nouvelle colonne est de rang maximal.

**DÉFINITION 2.** — On appelle matrice fondamentale de  $f$  et on note  $\mathcal{M}(f)$  la matrice suivante :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} (J_1 - \text{Id}) & (A_{12}) & \cdots & (A_{1m}) \\ (A_{21}) & (J_2 - \text{Id}) & \cdots & (A_{2m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (A_{m1}) & (A_{m2}) & (\cdots) & (J_m - \text{Id}) \end{pmatrix}.$$

Bien que cette matrice généralise la matrice de la forme d'intersection des cycles évanescents distingués (voir § 4.1), elle n'est pas en général antisymétrique, comme le montre l'exemple calculé en 4.3.

Dans l'écriture sous forme de Jordan de la matrice de  $T_i$ , la valeur propre 1 apparaît dans des blocs de taille 1 ou 2. Il est clair par construction, que le nombre des blocs de taille 2 donne la multiplicité de la valeur propre 1 de la matrice  $J_i$ .

Remarquons aussi que cette matrice est définie à conjugaison près par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_m \end{pmatrix}$$

où  $P_i$  est une matrice inversible vérifiant  $P_i^{-1} J_i P_i = J_i$ .

EXEMPLE 4.1 (bases spéciales et bases distinguées des cycles évanescents). — Soit  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  un polynôme vérifiant les conditions suivantes :

- $f$  est bon à l'infini ;
- $\mu_i = 1$  ;
- $n(F_i) = 1$  pour tout  $i$ .

Donc on a  $E = H^1(F_s)$ ,  $m = |B|$  et, pour tout  $i$ ,

$$\dim \frac{H^1(F_s)}{\text{Ker}(T_i - \text{Id})} = 1.$$

Comme dans la situation locale (morsification d'une singularité isolée, voir [2] ou [13, p. 41–42]), on peut construire une base  $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  de  $H_1(F_s)$  formée de cycles évanescents telle que l'on ait les formules de Picard-Lefschetz suivantes :

$$T_i^{\text{ho}}(c_j) = c_j + \langle c_i, c_j \rangle c_i$$

où  $\langle, \rangle : H_1(F_s) \times H_1(F_s) \rightarrow \mathbb{C}$  est la forme d'intersection et  $T_i^{\text{ho}}$  est l'opérateur de monodromie en homologie associé au lacet élémentaire  $\gamma_{b_i}$ . Soit  $H^1(F_s) = H_1(F_s)^*$  et soit  $\{c_1^*, c_2^*, \dots, c_m^*\}$  la base duale de  $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ . Par rapport à cette base, la matrice de  $T_i$  est la transposée de la matrice de  $T_i^{\text{ho}}$ , et donc est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 & \langle c_i, c_1 \rangle & & \\ & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & & 1 & \vdots & & 0 \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & \vdots & 1 & 0 \\ & & & \vdots & & \ddots \\ & & \langle c_i, c_m \rangle & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

et  $\{c_1^*, c_2^*, \dots, c_m^*\}$  est une base spéciale. La matrice fondamentale par rapport à cette base est la matrice de la forme d'intersection des cycles  $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ .

REMARQUE 4.2. — Si  $f$  est une morsification d'une singularité isolée locale, si en outre il existe un système de poids  $(w_1, w_2)$  associé aux variables  $(x, y)$  tel que si l'on écrit  $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$  où les  $f_i$  sont les composantes homogènes par rapport au système de poids  $(w_1, w_2)$ , le germe  $\{f_d = 0\}$  soit un germe à singularité isolée. Alors  $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$  est une vraie base de cycles évanescents distingués (dans le sens local) et donc on a la propriété suivante :

*Il n'existe pas de partition de  $\{1, \dots, m\}$  en deux sous-ensembles  $J$  et  $K$  telle que  $\langle c_k, c_j \rangle = 0$  pour tout  $j \in J$  et tout  $k \in K$ .*

Par analogie on peut alors énoncer une conjecture sur les bases spéciales décrites ci-dessus.

CONJECTURE. — *Il n'existe pas de partition de  $\{1, \dots, m\}$  en deux sous-ensembles  $J$  et  $K$  telle que  $A_{jk} = 0$  et  $A_{kj} = 0$  pour tout  $j \in J$  et tout  $k \in K$ .*

EXEMPLE 4.3. — Examinons maintenant en détail le polynôme

$$f = x + x^2y^2 + x^2y^3.$$

Il a une seule valeur critique  $b = -\frac{27}{16}$  et 0 est la seule valeur irrégulière à l'infini; donc  $B = \{0, b\}$ . De plus, on a  $\mu_b = 1$ ,  $\lambda_b = 0$ ,  $\mu_0 = 0$  et  $\lambda_0 = 3$ . En effet, l'équation locale de  $\tilde{f}$  au voisinage de  $[0, 1, 0]$  est

$$(4) \quad xz^4 + x^2z + x^2 - tz^5 = 0.$$

- Si  $t \neq 0$  cette singularité est  $\mu$ -équivalente à

$$x^2 - tz^5 = 0$$

et le nombre de Milnor de ce germe est 4.

- Si  $t = 0$ , le nombre de Milnor de la singularité (4) est 1.

Donc  $\text{rang}(\mathbf{V}) = 4$ . La fibre générique  $\bar{F}_s$  est elliptique, i.e.  $g(\bar{F}_s) = 1$ . Des calculs basés sur la formule de A'Campo [1] donnent les formes de Jordan des opérateurs de monodromie. Des exemples détaillés sont traités dans [4]. Avec  $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ , on a :

$$T_0 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad T_b \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_\infty \approx \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors la formule (3) nous permet d'affirmer  $n(F_0) = 2$  et  $n(F_b) = 1$ , donc  $\text{rang}(\mathbf{V}^\rho) = 1$ . Dans une base spéciale (décrite ci-dessus), on obtient

$$T_{0|E} = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad T_{b|E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . En normalisant au besoin, on peut supposer que  $a$  et  $b$  sont éléments de  $\{0, 1\}$ . Ces matrices étant écrites relativement à une même base on peut calculer  $T_{\infty|E}$  en faisant leur produit. La trace de la matrice obtenue donne

$$ac + bd = -1.$$

D'autre part, on sait qu'il existe un sous-espace vectoriel  $i^*H^1(\bar{F}_s)$  de  $H^1(F_s)$  de dimension 2, stable par l'action de  $T_0$  et  $T_b$  et telle que les formes de Jordan des restrictions de  $T_0$  et  $T_b$  soient :

$$T_{0|G} \approx \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}, \quad T_{b|G} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Quelques calculs élémentaires permettent de trouver les valeurs :

$$a = 1, \quad b = 1, \quad c = j^2, \quad d = j.$$

Finalement, la matrice fondamentale de  $f$  est donc :

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ j^2 & j-1 & 0 \\ j & 0 & j^2-1 \end{pmatrix}.$$

REMARQUE 4.4. — On a tenté d'étendre les bases de cycles évanescents distingués et les formules de Picard-Lefschetz au cas d'un polynôme, voir [11]. L'exemple suivant, du à Pi. Cassou-Noguès et à S. Orevkov montre qu'une telle extension n'est pas possible pour les polynômes qui ne sont pas bons à l'infini. Soit  $f = x^2y^2 + y$ ; alors  $B = \{0\}$ ,  $\mu = 0$ ,  $\lambda = 2$  et  $T_0$  est diagonalisable de valeurs propres 1 et  $-1$ . La fibre générique  $F_s$  est isomorphe à  $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$  et cela implique que  $\langle c, c' \rangle = 0$  pour tous cycles  $c$  et  $c'$  de  $H_1(F_s)$ . Donc une formule de Picard-Lefschetz donnerait  $T_0 = \text{Id}$ , d'où une contradiction. On peut donc penser que les bases spéciales construites ci-dessus sont le meilleur substitut des bases de cycles évanescents distingués.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A'CAMPO (N.). — *La fonction zeta d'une monodromie*, Comment. Math. Helvet., t. **50**, 1976, p. 233–248.
- [2] ARNOLD (V.I.), GUSEIN-ZADE (S.M.), VARCHENKO (A.N.). — *Singularities of differentiable maps*, vol. II, Monographs in Math., t. **83**, Birkhäuser, 1988.
- [3] BEAUVILLE (A.). — *Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 765, 1992–1993.

- [4] ARTAL-BARTOLO (E.), CASSOU-NOGUES (Pi.), DIMCA (A.). — *Sur la topologie des polynômes complexes*, Progress in Math., t. **162**, 1998.
- [5] ARTAL-BARTOLO (E.), CASSOU-NOGUES (Pi.), LUENGO VELASCO (I.). — *On polynomials whose fibers are irreducible with no critical points*, Math. Ann., t. **299**, 1994, p. 477–490.
- [6] BRYLINSKY (J.L.), ZUCKER (S.). — *An overview of recent advances in Hodge theory*, Encyclopaedia of Math. Sciences, Springer-Verlag, t. **69**, 1990, p. 39–42.
- [7] DELIGNE (P.). — *Un théorème de finitude pour la monodromie*, Progress in Math., Birkhäuser, t. **67**, 1987, p. 1–19.
- [8] DIMCA (A.), SAITO (M.). — *Algebraics Gauss-Manin systems*, preprint, 1999.
- [9] FOURRIER (L.). — *Topologie d'un polynôme de deux variables complexes au voisinage de l'infini*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. **46**, 1996.
- [10] FRIEDLAND (S.). — *Monodromy, differential equations and the Jacobian conjecture*, preprint, University of Illinois at Chicago, 1998.
- [11] HA (H.V.). — *La formule de Picard-Lefschetz affine*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **321**, série I, 1995, p. 747–750.
- [13] LOOIJENGA (E.J.N.). — *Isolated Singular Points on Complete Intersections*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, Cambridge, t. **77**, 1984.
- [14] LE DUNG TRANG, WEBER (C.). — *A geometrical Approach to the Jacobian Conjecture for  $n = 2$* , Kodai Math Journal, t. **17**, 1994.
- [15] LE DUNG TRANG, WEBER (C.). — *Polynômes à fibres rationnelles et conjecture jacobienne à deux variables*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **20**, 1995, p. 581–584.
- [16] MICHEL (F.), WEBER (C.). — *On the monodromies of a polynomial map from  $\mathbb{C}^2$  to  $\mathbb{C}$* , prépublication, Université P. Sabatier, Toulouse, n° 113, 1998.
- [17] MILNOR (J.). — *Singular points of complex hypersurfaces*. — Princeton University Press, 1968.
- [18] SERRE (J.-P.). — *Représentations linéaires des groupes finis*. — Hermann, Paris, 1978.