BULLETIN DE LA S. M. F.

ANNE VIRRION

Dualité locale et holonomie pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 128, n° 1 (2000), p. 1-68

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_1_1_0>

Bull. Soc. math. France,
128, 2000, p. 1–68.

DUALITÉ LOCALE ET HOLONOMIE POUR LES $\mathcal{D}$-MODULES ARITHMÉTIQUES

PAR ANNE VIRRION (*)

RÉSUMÉ. — L'objet de cet article est l'étude du foncteur de dualité $\mathbb{D}$ dans le cadre de la théorie des $\mathcal{D}$-modules développée par Berthelot en caractéristique mixte. Le premier point est de dégager les structures nécessaires à une définition satisfaisante de ce foncteur, puis d'établir le théorème de bidualité et la commutation de la dualité à l'extension des scalaires. Dans un deuxième temps, sous l'hypothèse d'existence d'un relèvement de Frobenius F, on montre la commutation des foncteurs $\mathbb{D}$ et F^* pour les $\mathcal{D}$-modules à gauche, et des foncteurs $\mathbb{D}$ et $F^!$ pour les $\mathcal{D}$-modules à droite. Un outil essentiel ici est la théorie du foncteur image inverse exceptionnelle développée par Grothendieck et Hartshorne. La troisième et dernière partie est consacrée à l'étude de la dimension cohomologique de certains $\mathcal{D}$-modules, munis d'un isomorphisme avec leur image inverse par Frobenius. Grâce au théorème de descente par Frobenius établi par Berthelot, on déduit une caractérisation homologique de l'holonomie, de la même façon qu'en caractéristique nulle.

ABSTRACT. — LOCAL DUALITY AND HOLONOMY FOR ARITHMETIC $\mathcal{D}$-MODULES. — The object of this article is the study of the duality functor $\mathbb{D}$ in the context of $\mathcal{D}$-modules developped by Berthelot in mixed characteristic. The first part consists in extracting the required structures to obtain a good definition of this functor; next we establish the biduality theorem and prove the commutation of duality to scalar extension. In the second part we show the commutation of $\mathbb{D}$ and F^* for left $\mathcal{D}$-modules and that of $\mathbb{D}$ and $F^!$ for right $\mathcal{D}$-modules, under the hypothesis of the existence of a pull-back by Frobenius F. An essential point here is the theory of exceptional inverse image functor developped by Grothendieck and Hartshorne. The third and last part consists in the study of the cohomological dimension of some $\mathcal{D}$-modules endowed with an isomorphism with their inverse image under Frobenius. Through the theorem of Frobenius descent established by Berthelot, we deduce a homological characterisation of holonomy as in characteristic zero.

(*) Texte reçu le 7 avril 1998, révisé le 19 janvier 1999, accepté le 18 juin 1999.
A. VIRRION, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes CEDEX (France). Email : anne.virrion@univ-rennes1.fr.

Classification mathématique par matières : 14 F 30.

Mots clés : $\mathcal{D}$-module, dualité, holonomie, morphisme de Frobenius, dimension cohomologique.

Sommaire

Introduction

Le sujet de cet article est l'étude du foncteur de dualité locale dans le cadre de la théorie des $\mathcal{D}^\dagger$-modules développée par P. Berthelot [Be3] pour des variétés algébriques X sur un corps k de caractéristique p. Il s'agit d'une part de prolonger à ce contexte la théorie des $\mathcal{D}$-modules en caractéristique nulle, dans l'esprit des travaux de Bernstein [Bo1], Björk [Bj1], Kashiwara [Ka1], Malgrange [Ma1], Mebkhout [Me1], [Me2], [Me3], [Me4], Saito [Sa1], [Sa2], Schneiders [Sc1], [Sc2], [Sc3], *etc.* D'autre part, il faut s'assurer que ce foncteur est compatible aux données spécifiques à la caractéristique positive, comme le morphisme de Frobenius ou certains morphismes d'anneaux d'opérateurs différentiels qui apparaissent naturellement. On s'attachera d'abord à dégager les hypothèses et données nécessaires à une définition satisfaisante du foncteur de dualité $\mathbb{D}$ dans ce contexte. On montrera ensuite le théorème de bidualité et la compatibilité de $\mathbb{D}$ à l'extension des scalaires et à l'action de Frobenius. On étudiera enfin les propriétés cohomologiques des $\mathcal{D}^\dagger$-modules cohérents munis d'un Frobenius (qui généralisent la notion de F-isocristal).

Supposons X relevable en un schéma formel $\mathcal{X}$ lisse sur le spectre formel d'un anneau de valuation discrète $\mathcal{V}$, d'inégales caractéristiques $(0,p)$, de corps résiduel k, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Notons X_i sa réduction modulo l'idéal $\mathfrak{m}^{i+1}$, pour $i \geq 0$. On considère alors une famille de faisceaux d'anneaux d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ (resp. $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$), pour $m \geq 0$, sur $\mathcal{X}$ (resp. sur X_i), engendrés localement par un nombre fini d'opérateurs différentiels. On note $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ le complété $\mathfrak{m}$-adique de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(m)}$ et par passage à la limite inductive sur m, on définit le faisceau $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$. En tensorisant par $\mathbb{Q}$, on obtient l'objet central $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ de la théorie de Berthelot. C'est un faisceau d'anneaux cohérent [Be3, 3.6.1] et de dimension cohomologique finie [Be4, 4.4.7].

De façon plus générale on s'intéresse aux opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ à coefficients dans une $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbre $\mathcal{B}$, munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module à gauche. La principale motivation pour cette généralisation est de pouvoir utiliser ces résultats pour les faisceaux d'opérateurs différentiels à coefficients dans des algèbres de fonctions à singularités surconvergentes [Be3, 4.2]. Rappelons que ces objets apparaissent naturellement dans l'étude de la cohomologie rigide [Be2]. En effet, soit K le corps des fractions de $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}_K$ la fibre générique de $\mathcal{X}$ au sens des espaces rigides analytiques [Ra1], et $\mathrm{sp} : \mathcal{X}_K \to \mathcal{X}$ le morphisme de spécialisation. Si Z est un diviseur de X, on définit dans [Be3] des $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ qui sont naturellement munis d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module à gauche. Localement, si f est une section locale de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ définissant le diviseur, $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{X}}\{T\}/(f^{p^{m+1}}T - p)$, cet isomorphisme étant indépendant du choix de f (voir [Be3, 4.2.3]). Le faisceau des fonctions sur $\mathcal{X}$ à singularités surconvergentes le long de Z, noté $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)$, est obtenu comme limite inductive des $\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z)$ et est par conséquent muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$-module à gauche. On considère alors le faisceau d'anneaux $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$, où

$$\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}Z) = \varinjlim_{m} \big(\widehat{\mathcal{B}}_{\mathcal{X}}^{(m)}(Z) \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}\big)$$

(voir [Be3, 4.2.5.3]). Il est cohérent [Be3, 4.3.6], de dimension cohomologique finie [Hu1] et le foncteur sp_* transforme un isocristal surconvergent le long de Z en un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$-module cohérent [Be3, 4.4.3, 4.4.5]. Notons également que $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module cohérent [Be7, 3.1].

Ainsi, les $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres $\mathcal{B}$ introduites ici nous permettront de traiter le cas de ces anneaux d'opérateurs différentiels.

On va donc s'intéresser aux modules cohérents sur ces différents faisceaux d'anneaux. Remarquons que certains d'entre eux ne sont pas nécessairement de dimension cohomologique finie ; en particulier les $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$, pour $i \geq 1$, ou les $\mathcal{B} \otimes \mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ lorsque $\mathcal{B}$ n'est pas supposé de dimension cohomologique finie.

On travaillera donc avec des complexes parfaits (voir [Il1]), les notions de perfection et de cohérence coïncidant lorsque les anneaux sont de dimension cohomologique finie.

Dans un chapitre préliminaire, on détaillera la construction de ces faisceaux d'opérateurs différentiels et on rappellera un certain nombre de définitions et de résultats dus à Berthelot et qui seront nécessaires pour la suite.

Le premier chapitre sera consacré à définir un foncteur de dualité $\mathbb{D}$ adapté à ce contexte. La théorie classique de la dualité développée par Illusie [Il1] transforme les complexes parfaits de modules à gauche en complexes parfaits de modules à droite. On supposera donc que l'on dispose d'axiomes supplémentaires, qui seront vérifiés dans les cas qui nous intéressent, permettant de définir un foncteur de dualité à valeurs dans les complexes parfaits de modules à gauche. Notons que l'on travaillera dans des catégories dérivées sur des anneaux de bimodules dont le centre ne contient pas de corps, ce qui engendre des difficultés qui n'apparaissent pas dans le cas complexe. On montrera ensuite le théorème de bidualité dans ce contexte et on vérifiera que $\mathbb{D}$ commute à l'extension des scalaires. Dans le cas d'un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse, on en déduira en particulier une suite exacte des coeffcients universels [CE1].

Sous l'hypothèse d'existence d'un relèvement de Frobenius F, on montrera dans le second chapitre que $\mathbb{D}$ commute à F^*. Pour ce faire, on utilise la théorie du foncteur image inverse exceptionnelle $F^!$ developpée par Grothendieck et Hartshorne [Ha1], qui fournit une caractérisation infinitésimale des modules à droite. On montrera que les foncteurs F^* et $F^!$ sont d'une certaine manière compatibles et possèdent des propriétés de descente [Be4] similaires, propriétés qui constituent le point clé du théorème de commutation.

Supposons ici que k soit un corps parfait, que $\mathcal{V} = W(k)$ et qu'il existe un relèvement de Frobenius $F : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^\sigma$. Dans la théorie classique des $\mathcal{D}$-modules, on sait [Ma1] que

$$\dim \mathrm{coh}(\mathcal{D}_X) = \dim(X),$$

résultat qui repose en partie sur l'inégalité de Bernstein. De plus, tout $\mathcal{D}_X$-module cohérent admettant localement une bonne filtration, on peut définir sa variété caractéristique. On s'intéresse alors aux modules dont la variété caractéristique est de même dimension que X, les modules holonomes. Ceux-ci jouent un rôle essentiel dans cette théorie, notamment dans la correspondance de Riemann-Hilbert [Bo1].

Dans le cadre de la caractéristique p, les choses sont un peu plus compliquées. En particulier on ne dispose plus de la filtration par l'ordre sur $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, ni de l'inégalité de Bernstein modulo p, et on sait seulement que

$$\dim \mathrm{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \leq 2\dim(\mathcal{X}) + 1.$$

On se restreint alors à la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules $\mathcal{E}$ munis d'un isomorphisme

$\mathcal{E} \cong F^*\mathcal{E}$, les F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules. On peut alors grâce au théorème de descente par Frobenius [Be4] leur associer canoniquement une variété caractéristique définie sur le gradué de $\mathcal{D}^{(0)}_X$, le faisceau $\mathcal{D}^{(0)}_X$ jouant en caractéristique p le rôle de $\mathcal{D}_X$ en caractéristique 0. On vérifie alors que l'on dispose encore de l'inégalité de Bernstein pour les F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents et, par conséquent d'une définition géométrique de l'holonomie [Be6]. Précisons que ces résultats, établis par Berthelot, ne sont pas encore publiés.

L'objet du dernier chapitre est d'étudier la dimension cohomologique des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents et de donner une caractérisation homologique de l'holonomie. Grâce aux résultats des chapitres précédents, notamment la suite exacte des coefficients universels et la commutation de $\mathbb{D}$ et F^*, on se ramène dans un premier temps au cas des $\mathcal{D}^{(0)}_X$-modules cohérents. Ensuite, puisque le faisceau $\mathcal{D}^{(0)}_X$, engendré par les dérivations, admet un gradué régulier pour la filtration par l'ordre, on peut conserver les méthodes utilisées par Malgrange [Mal] pour $\mathcal{D}_X$ en caractéristique 0. On montre donc que les F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents vérifient les mêmes propriétés de dimension qu'en caractéristique 0. On en déduit notamment que leur dimension cohomologique est majorée par d, la dimension de X sur k, qu'ils sont munis d'une filtration par la codimension et qu'un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0 \quad \text{pour } i \neq d.$$

Cet article est issu des travaux effectués dans la première partie de ma thèse de doctorat [Vi1], [Vi2], et que j'ai parfois modifiés ou améliorés. La seconde partie donnera lieu à un prochain article, [Vi3], dans lequel je montrerai que l'on dispose encore du théorème de dualité relative pour les morphismes propres. Pour cela je construirai une résolution canonique du type Čech-Alexander qui jouera le rôle du complexe de de Rham, [Vi2], [Be1], [Il2], [Gr1].

Je tiens à remercier Pierre Berthelot pour l'attention qu'il a prêtée à la préparation de ce premier article et pour les différentes discussions que nous avons eues à ce sujet. Je remercie également les membres de l'Institut Henri Poincaré pour leur accueil lors du semestre *Cohomologie p-adiques et applications arithmétiques*, qui a eu lieu en 1997 et durant lequel j'ai rédigé la majeure partie de cet article. Je remercie enfin le Centre Émile Borel et le Réseau *p-adic methods in arithmetic algebraic geometry*, du programme HCM de la Communauté Européenne, pour le financement de ce séjour.

0. Rappels et définitions

Soit p un nombre premier fixé. On note $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ par rapport à l'idéal (p) et $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète d'inégales caractéristiques $(0,p)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, complet pour la topologique $\mathfrak{m}$- adique. Soient S un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma (resp. $\mathcal{V}$-schéma formel) et X un S-schéma (resp. schéma formel) lisse. On supposera, dans le cas formel, que $\mathfrak{m}\cdot\mathcal{O}_S$ (resp. $\mathfrak{m}\cdot\mathcal{O}_X$) est un idéal de définition de S (resp. de X).

Il s'agit dans ce chapitre de rappeler les définitions des différents anneaux d'opérateurs différentiels, construits par Berthelot [Be3], que nous étudirons dans la suite de cet article. On considérera, de façon plus générale, leur produit tensoriel sur $\mathcal{O}_X$ avec des algèbres $\mathcal{B}$ sur lesquelles ils opèrent, qui seront, par exemple, des algèbres de fonctions à singularités surconvergentes. On rappelera également le théorème de descente par Frobenius et la majoration de la dimension cohomologique de certains de ces anneaux en fonction de la dimension de X (voir [Be4]).

1. Opérateurs différentiels de niveau fini.

1.1. — Soient m, n et r trois entiers. On considère l'immersion diagonale $X \hookrightarrow X^{r+1}/S$ et on note $\mathcal{I}(r)$ l'idéal de $\mathcal{O}_{X^{r+1}/S}$ correspondant. On définit en [Be3, 2.1] l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m (resp. et d'ordre n) de $(\mathcal{O}_{X^{r+1}/S}, \mathcal{I}(r))$ et on la note $\mathcal{P}_{X,(m)}(r)$ (resp. $\mathcal{P}^n_{X,(m)}(r)$). Pour $i = 0, \ldots, r$, les projections $p_i : X^{r+1}/S \to X$ munissent $\mathcal{P}^n_{X,(m)}(r)$ de $r+1$ structures de $\mathcal{O}_X$-algèbre. On définit alors le faisceau des opérateurs différentiels de niveau m et d'ordre $\leq n$ sur X relativement à S comme étant le dual $\mathcal{O}_X$-linéaire de $\mathcal{P}^n_{X,(m)}(1)$ pour sa structure gauche

$$\mathcal{D}^{(m)}_{X,n} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\big(p_{0*}\mathcal{P}^n_{X,(m)}(1), \mathcal{O}_X\big).$$

Lorsque n varie, on dispose des injections $\mathcal{D}^{(m)}_{X,n} \hookrightarrow \mathcal{D}^{(m)}_{X,n'}$ pour $n \leq n'$, et le faisceau des opérateurs différentiels de niveau m [Be3, 2.2.1] est défini par

$$\mathcal{D}^{(m)}_X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^{(m)}_{X,n}.$$

Supposons que l'on ait des coordonnées locales $t_1, \ldots, t_d$ sur X relativement à S. On note

$$\tau_i = p_1^*(t_i) - p_0^*(t_i), \quad i = 1, \ldots, d.$$

Alors $\mathcal{P}^n_{X,(m)}(1)$ est un $\mathcal{O}_X$-module libre de base les

$$\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}} = \tau_1^{\{k_1\}} \cdots \tau_d^{\{k_d\}}, \quad \sum_{i=1}^{d} k_i \leq n,$$

les $\tau_i^{\{k_i\}}$, $k_i \in \mathbb{N}$, désignant les puissances divisées partielles des τ_i [Be3, 1.3.5]. Pour $\underline{k} \in \mathbb{N}^d$ et $\sum_{i=1}^d k_i \leq n$, on note $(\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle})$ la base de $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$ duale de la base $(\underline{\tau}^{\{\underline{k}\}})$ de $\mathcal{P}^n_{X,(m)}(1)$. Pour $k \in \mathbb{N}^d$, les $\underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}$ forment une base de $\mathcal{D}_X^{(m)}$.

1.2. — Soit $(\mathcal{B}^{(m)})_{m \geq 0}$ un système inductif de $\mathcal{O}_X$-algèbres commutatives, muni d'une structure compatible de $(\mathcal{D}_X^{(m)})_{m \geq 0}$-module à gauche. Alors [Be3, 2.3.5], pour tout $m \geq 0$, $\mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ est muni d'une structure naturelle de faisceau d'anneaux sur X, telle que les morphismes naturels $\mathcal{B}^{(m)} \to \mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ et $\mathcal{D}_X^{(m)} \to \mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ soient des homomorphismes d'anneaux, que $(b \otimes 1)(1 \otimes P) = b \otimes P$ pour tous $b \in \mathcal{B}$ et $P \in \mathcal{D}_X^{(m)}$, et que, pour tout système de coordonnées locales sur X, tout k, et tout $b \in \mathcal{B}^{(m)}$, on ait

$$(1 \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{k} \rangle}) \cdot (b \otimes 1) = \sum_{\underline{i} \leq \underline{k}} \left\{ \begin{matrix} \underline{k} \\ \underline{i} \end{matrix} \right\} \underline{\partial}^{\langle \underline{k} - \underline{i} \rangle} b \otimes \underline{\partial}^{\langle \underline{i} \rangle}.$$

2. Passages à la limite.

2.1. — Supposons que l'on soit dans le cas formel. On note par un indice i les différentes réductions modulo l'idéal $\mathfrak{m}^{i+1}$ et, pour tout $m \geq 0$, on pose

$$\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)} = \varprojlim_i \big(\mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}\big).$$

Alors les $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ définissent un système inductif de faisceaux d'anneaux sur X et on note $\mathcal{B}^\dagger \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^\dagger$ la limite inductive obtenue.

2.2. — Supposons alors, toujours dans le cas formel, que les $\mathcal{O}_X$-algèbres $\mathcal{B}^{(m)}$ vérifient les conditions suivantes [Be3, 3.1.1] :

a) Pour tout ouvert affine U, $\Gamma(U, \mathcal{B}^{(m)})$ est un anneau noethérien.

b) Pour tous ouverts affines U et V tels que $V \subset U$, l'homomorphisme $\Gamma(U, \mathcal{B}^{(m)}) \to \Gamma(V, \mathcal{B}^{(m)})$ est plat.

Alors les faisceaux d'anneaux $\mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m)}$ et $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}$ sont cohérents à gauche et à droite [Be3, 3.1.2, 3.3.4]. Si de plus $(\widehat{\mathcal{B}}^{(m+1)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m+1)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est plat sur $(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, alors, d'après [Be3, 3.6.1, 3.5.4], $(\mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^\dagger) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est cohérent à gauche et à droite et, pour tout $m \geq 0$, $(\mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^\dagger) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un $(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$-module plat.

Nota Bene. — Ces hypothèses sont vérifiées lorsque $\mathcal{B}^{(m)} = \mathcal{O}_X$, mais on ne sait pas si $\mathcal{D}_X^\dagger$ lui-même est cohérent (voir [Be3, 3.6.1, i]).

3. Image inverse par Frobenius.

3.1. — Soit m un entier. On suppose à présent que l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes :

1) S est un schéma, muni d'un m-PD-idéal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, et p est localement nilpotent sur S.

2) $S = \operatorname{Spf} \mathcal{V}$ et l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{V}$ est muni d'une m-PD-structure, auquel cas on pose $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

On suppose de plus que $p \in \mathfrak{a}$ et que l'on dispose d'un morphisme $F : X \to X'$ de S-schémas (resp. formels) lisses tel que sa réduction modulo l'idéal $\mathfrak{a}$ soit le morphisme de Frobenius relatif de $X_0 = X \times_S S_0$ sur S_0, où $S_0 = V(\mathfrak{a})$.

3.2 (voir [Be4, 2.3]). — Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche, alors $F^*\mathcal{E}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-module à gauche. Ainsi, si $\mathcal{B}'^{(m)}$ est une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre commutative munie d'une structure de $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche compatible, $F^*\mathcal{B}'^{(m)}$ est munie d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-module à gauche compatible avec sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre. On note $\mathcal{B}^{(m+1)}$ cette $\mathcal{O}_X$-algèbre et on a [Be4, 2.3.6] :

Proposition. — *F^* induit une équivalence de catégories entre les $\mathcal{B}'^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche et les $\mathcal{B}_{m+1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}$-modules à gauche.*

3.3 (voir [Be4, 4.1.1]). — De même, dans le cas formel 2), soit $(\mathcal{B}'^{(m)})_{m\geq 0}$ (resp. $(\mathcal{B}^{(m)})_{m\geq 0}$) un système inductif de $\mathcal{O}_{X'}$-algèbres (resp. de $\mathcal{O}_X$-algèbres) commutatives munies d'une structure compatible de $(\mathcal{D}_{X'}^{(m)})_{m\geq 0}$-module (resp. $(\mathcal{D}_X^{(m)})_{m\geq 0}$-module) à gauche et d'un système compatible d'isomorphismes $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-linéaires $F^*\mathcal{B}'^{(m)} \cong \mathcal{B}^{(m+1)}$. Alors on a

$$F^*\big(\widehat{\mathcal{B}}'^{(m)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_{X'}} \widehat{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}\big) \cong \varprojlim_i F^*\big(\mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}\big)$$

et, comme dans le cas algébrique, [Be4, 4.1.3] :

Proposition. — *Le foncteur F^* induit une équivalence de catégories entre les $\widehat{\mathcal{B}}'^{(m)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_{X'}} \widehat{\mathcal{D}}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche et les $\widehat{\mathcal{B}}^{(m+1)} \mathbin{\widehat{\otimes}}_{\mathcal{O}_X} \widehat{\mathcal{D}}_X^{(m+1)}$-modules à gauche.*

Nota Bene. — On verra dans le chapitre II que l'on peut également, à partir du Frobenius, définir un foncteur pour les modules à droite, induisant une nouvelle équivalence de catégories.

4. Dimension cohomologique de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$.

Supposons encore que l'on soit dans le cas formel § 3.1, 2). On note alors

$\mathcal{S} = \operatorname{Spf} \mathcal{V}$, $\mathcal{X}$ le $\mathcal{S}$-schéma formel considéré, X sa réduction modulo l'idéal $\mathfrak{a}$ et $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux cohérent sur $\mathcal{X}$.

4.1. — Soient x un point de $\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert de x dans $\mathcal{X}$ et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_{|\mathcal{U}}$-module cohérent. Rappelons la définition de la dimension cohomologique de $\mathcal{M}$ et de $\mathcal{A}$, au voisinage de x,

- $\dim\operatorname{coh}_x(\mathcal{M}) = \inf\big\{n \in \mathbb{N}\,;\ \forall\, \mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ ouvert, $x \in \mathcal{V}$, pour tout $\mathcal{A}_{|\mathcal{V}}$-module $\mathcal{N}$, on a $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}_x}(\mathcal{M}_x, \mathcal{N}_x) = 0$ pour tout $i > n\big\}$.
- $\dim\operatorname{coh}_x(\mathcal{A}) = \sup\big\{\dim\operatorname{coh}_x(\mathcal{M}),\ \forall \mathcal{M}$ un $\mathcal{A}_{|\mathcal{U}}$-module cohérent, $\mathcal{U}$ étant un voisinage ouvert de $x\big\}$.

Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{A}$-module cohérent, on pose :

$$\begin{aligned}
\dim\operatorname{coh}(\mathcal{M}) &= \sup_{\substack{x\in\mathcal{X}\\ \text{fermé}}} \{\dim\operatorname{coh}_x(\mathcal{M})\},\\
\dim\operatorname{coh}(\mathcal{A}) &= \sup_{\substack{x\in\mathcal{X}\\ \text{fermé}}} \{\dim\operatorname{coh}_x(\mathcal{A})\}.
\end{aligned}$$

On dira qu'un $\mathcal{A}_{|\mathcal{U}}$-module $\mathcal{P}$ est localement projectif si le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}_{|\mathcal{U}}}(\mathcal{P}, \cdot)$ est exact. On vérifie facilement le résultat suivant :

4.2. Proposition.

a) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) $\dim\operatorname{coh}(\mathcal{M}) \le n$;

ii) *pour tout* $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ *ouvert,* $\mathcal{M}$ *admet localement une résolution de longueur* $\le n$ *par des* $\mathcal{A}_{|\mathcal{U}}$*-modules localement projectifs et cohérents.*

b) *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

i) $\dim\operatorname{coh}(\mathcal{A}) \le n$;

ii) *pour tout* $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ *ouvert, tout* $\mathcal{A}_{|\mathcal{U}}$*-module cohérent* $\mathcal{M}$ *admet localement une résolution de longueur* $\le n$ *par des* $\mathcal{A}_{|\mathcal{U}}$*-modules localement projectifs et cohérents.*

4.3. Théorème (voir [Be4, 4.4.4, 4.4.7]). — *Supposons que la dimension relative* $d_{\mathcal{X}}$ *de* $\mathcal{X}$ *sur* $\mathcal{S}$ *soit constante sur* $\mathcal{X}$. *Alors* :

i) $\dim\operatorname{coh}(\mathcal{D}^{(0)}_{\mathcal{X}}) = \dim\operatorname{coh}(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}) = 2d_{\mathcal{X}} + 1$ *pour tout* $m \ge 0$;

ii) $\dim\operatorname{coh}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \le 2d_{\mathcal{X}} + 1$.

Idée de la démonstration. — Supposons pour simplifier que $\mathcal{V} = W(k)$, où k est un corps parfait de caractéristique p et $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} \mathcal{V}$.

i) On considère la filtration $\mathfrak{m}$-adique sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)}$. Alors, on a

$$\operatorname{gr}^{\mathfrak{m}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} \cong \operatorname{gr}^{\mathfrak{m}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)} \cong \mathcal{D}_{X}^{(0)} \otimes_k k[\bar{p}],$$

où $\bar{p}$ est la classe de p. Ainsi, on a

$$\dim\operatorname{coh} \operatorname{gr}^{\mathfrak{m}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} = \dim\operatorname{coh} \operatorname{gr}^{\mathfrak{m}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)} \leq 2d_{\mathcal{X}} + 1.$$

De plus

$$\begin{aligned} \dim\operatorname{coh} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)} &\leq \dim\operatorname{coh} \operatorname{gr}^{\mathfrak{m}} \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)} \leq 2d_{\mathcal{X}} + 1, \\ \dim\operatorname{coh} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} &\leq \dim\operatorname{coh} \operatorname{gr}^{\mathfrak{m}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} \leq 2d_{\mathcal{X}} + 1. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ engendré par les coordonnées locales $t_1^p, \ldots, t_d^p$ et par p. Alors $m = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)}$-module cohérent et on vérifie que

$$\mathcal{E}xt^{2d_{\mathcal{X}}+1}_{\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)}}(\mathcal{M}, \mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)}) \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}xt^{2d_{\mathcal{X}}+1}_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}) \neq 0.$$

Donc,

$$\dim\operatorname{coh}(\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{(0)}) = \dim\operatorname{coh}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}) = 2d_{\mathcal{X}} + 1.$$

En outre, grâce à l'équivalence de catégories (3.3), on montre par récurrence sur $m \geq 0$ que $\dim\operatorname{coh}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}) = 2d_{\mathcal{X}} + 1$.

ii) Puisque $\mathbb{Q}$ est plat sur $\mathbb{Z}$, on a $\dim\operatorname{coh}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}) \leq 2d_{\mathcal{X}} + 1$. Enfin, par platitude de $\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(m)}$ (voir [Be3, 3.5.4]), on conclut que l'on a la majoration $\dim\operatorname{coh}(\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}) \leq 2d_{\mathcal{X}} + 1$.

Nota Bene. — Rappelons que, comme on l'a vu dans l'introduction, on conjecture que $\dim\operatorname{coh}(\mathcal{D}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}) = d_{\mathcal{X}}$.

I. Dualité, bidualité et extension des scalaires

Cette partie est consacrée à établir le théorème de bidualité ainsi que la commutation du foncteur de dualité à l'extension des scalaires, dans la situation du chapitre 0.

Afin d'obtenir ces résultats pour les différents faisceaux d'anneaux qui nous intéressent, on les montrera de façon générale pour un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$, ce qui nous amènera à dégager les structures nécessaires dans le cas non commutatif. En outre, ces anneaux n'étant pas nécessairement de dimension cohomologique finie, on travaillera avec des complexes parfaits. On rappelle qu'un complexe de $\mathcal{A}$-modules $\mathcal{M}$ est parfait s'il admet localement une résolution à degrés bornés et à termes localement projectifs de type fini [Il1, § 2]. Ainsi, si $\mathcal{A}$ est de dimension cohomologique finie, les notions de perfection et de cohérence coïncident.

On considère un anneau de valuation discrète $\mathcal{V}$ d'inégales caractéristiques $(0, p)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, S un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma (resp. un $\mathcal{V}$-schéma formel) et X un S-schéma (resp. schéma formel) lisse. On supposera, dans le cas formel, que $\mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}_S$ (resp. $\mathfrak{m} \cdot \mathcal{O}_X$) est un idéal de définition de S (resp. de X).

1. Quelques notations et résultats préliminaires.

1.1. — On considère un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{R}$ et deux faisceaux de $\mathcal{R}$-algèbres plates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur X (non nécessairement commutatives). Notons $f : \mathcal{R} \to \mathcal{A}$ et $g : \mathcal{R} \to \mathcal{B}$ les morphismes canoniques et fixons quelques notations :

- $D({}^g\!\mathcal{A})$ (resp. $D(\mathcal{A}^d)$) désigne la catégorie dérivée des complexes de $\mathcal{A}$-modules à gauche (resp. à droite) ;
- $D({}^g\!\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ (resp. $D(\mathcal{A}^d, \mathcal{B}^d)$, resp. $D({}^g\!\mathcal{A}, {}^g\mathcal{B})$) la catégorie dérivée des complexes de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-bimodules (resp. à droite, resp. à gauche) tels que les deux actions de $\mathcal{R}$ induites coïncident ;
- $D_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$ (resp. $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$, resp. $D_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{A}^d)$) la sous-catégorie pleine de $D({}^g\!\mathcal{A})$ (resp. $D(\mathcal{A}^d)$) formée des complexes parfaits (resp. de Tor-dimension finie), $D_{(.,\mathrm{parf})}(., \mathcal{B}^d)$ (resp. $D_{(.,\mathrm{tdf})}(., \mathcal{B}^d)$) la sous-catégorie pleine de $D(., \mathcal{B}^d)$ formée des complexes parfaits à droite (resp. de Tor-dimension finie à droite), c'est-à-dire localement isomorphes à un complexe borné de bimodules à termes localement projectifs de type fini (resp. plats) comme $\mathcal{B}$-modules à droite.

Lorsque l'on considèrera aussi bien une structure droite qu'une structure gauche, on remplacera l'exposant g par « $*$ ». On notera D^b la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée et D^b_{parf} la catégorie $D_{\mathrm{parf}} \cap D_{\mathrm{tdf}}$. Notons que D^b_{parf} est une sous-catégorie de $D_{\mathrm{parf}} \cap D^b$ et que ces deux catégories coïncident lorsque X est quasi-compact.

On a alors, comme dans le cas commutatif [Il1, § 7], les résultats suivants.

1.2.1. Proposition. — *Sous les hypothèses* 1.1, *soient* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$ *et* $\mathcal{F} \in D^b({}^g\!\mathcal{A}, {}^*\mathcal{B})$. *On a :*

i) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\!\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in D^b({}^*\mathcal{B})$;

ii) *Si* $\mathcal{F} \in D^b_{(.,\mathrm{parf})}({}^g\!\mathcal{A}, {}^*\mathcal{B})$ (*resp.* $D^b_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\!\mathcal{A}, {}^*\mathcal{B})$), *alors* $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\!\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ *appartient à* $D^b_{\mathrm{parf}}({}^*\mathcal{B})$ (*resp.* $D^b_{\mathrm{tdf}}({}^*\mathcal{B})$).

Preuve.

i) Si $\mathcal{F} \in D^b({}^g\!\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ (resp. $\mathcal{F} \in D^b({}^g\!\mathcal{A}, {}^g\mathcal{B})$), alors $\mathcal{F}$ est un complexe de

$\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B}^0$-modules (resp. $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B}$-modules), où $\mathcal{B}^0$ est l'anneau opposé. Soit $\mathcal{I}$ une résolution droite de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B}^0$-modules injectifs (resp. $\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{R}}\mathcal{B}$-modules injectifs). Puisque $\mathcal{B}$ est un $\mathcal{R}$-module plat et que $\mathcal{R}$ est commutatif, $\mathcal{B}^0$ est également plat sur $\mathcal{R}$. Ainsi $\mathcal{I}$ est un complexe à termes injectifs comme $\mathcal{A}$-modules à gauche. Donc

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{F})\cong\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{I}),$$

et est muni d'une structure naturelle de complexe de $\mathcal{B}$-modules à droite (resp. à gauche), induite par celle de $\mathcal{I}$. De plus, $\mathcal{E}$ étant parfait, il admet localement une résolution bornée par des $\mathcal{A}$-modules localement projectifs de type fini de longueur égale à $\operatorname{parf.amp}(\mathcal{E})$ (voir [Il1]). Donc, par dévissage, on se ramène au cas où $\mathcal{E}=\mathcal{A}$ et comme $\mathcal{F}$ est à cohomologie bornée, il en est de même de $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{A},\mathcal{F})$.

ii) L'assertion étant locale, et $D^b_{\mathrm{parf}}({}^*\mathcal{B})$ (resp. $D^b_{\mathrm{tdf}}({}^*\mathcal{B})$) étant une sous-catégorie triangulée de $D^b({}^*\mathcal{B})$, on peut supposer par dévissage que $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{A}$-module localement projectif de type fini. Il est alors localement facteur direct d'un $\mathcal{A}$-module libre de type fini et on est ramené au cas où $\mathcal{E}=\mathcal{A}$, qui est immédiat.

1.2.2. Proposition. — *Sous les hypothèses* 1.1, *on suppose de plus que l'on a un troisième faisceau de $\mathcal{R}$-algèbres plates $\mathcal{C}$ de morphisme structural $h:\mathcal{R}\to\mathcal{C}$. Soient $\mathcal{E}\in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$, $\mathcal{F}\in D^b_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\!\mathcal{A},\mathcal{B}^d)$ et $\mathcal{G}\in D^b({}^g\mathcal{B},{}^*\mathcal{C})$. Il existe dans $D^b({}^*\mathcal{C})$ un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}\mathcal{G}\xrightarrow{\ \sim\ }\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}\mathcal{G}).$$

De plus si $\mathcal{G}\in D^b_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{B},{}^*\mathcal{C}))$, c'est un isomorphisme dans la catégorie $D^b_{\mathrm{tdf}}({}^*\mathcal{C})$. De même si $\mathcal{F}\in D^b_{(.,\mathrm{parf})}({}^g\!\mathcal{A},\mathcal{B}^d)$ et si $\mathcal{G}\in D^b_{(.,\mathrm{parf})}({}^g\mathcal{B},{}^*\mathcal{C})$, c'est un isomorphisme dans $D^b_{\mathrm{parf}}({}^*\mathcal{C})$.

Preuve. — D'après l'assertion ii) de la proposition précédente, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{F})$ appartient à $D^b_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{B}^d)$. Donc le foncteur dérivé

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}-:D^b({}^g\mathcal{B},{}^*\mathcal{C})\longrightarrow D^b({}^*\mathcal{C})$$

est bien défini. De plus, $\mathcal{F}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}\mathcal{G}\in D^b({}^g\!\mathcal{A},{}^*\mathcal{C})$, donc d'après 1.2.1, i), nous avons $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}\mathcal{G})\in D^b({}^*\mathcal{C})$. Construisons une flèche :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}\mathcal{G}\longrightarrow\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E},\mathcal{F}\otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}}\mathcal{G}).$$

Supposons que $\mathcal{G} \in D^b({}^g\mathcal{B}, \mathcal{C}^d)$ (resp. $D^b({}^g\mathcal{B}, {}^g\mathcal{C})$). Soient $\mathcal{I}$ une résolution droite de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{B}^0$-modules à gauche injectifs et $\mathcal{P}$ une résolution gauche de $\mathcal{G}$ par des $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{C}^0$-modules (resp. $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{C}$-modules) à gauche plats. Puisque $\mathcal{C}$ est plat sur $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}$ est aussi une résolution de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{B}$-modules à gauche plats et dans $D^b({}^*\mathcal{C})$ on a :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}.$$

De plus, il existe un morphisme naturel de complexes

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P})$$

d'où une flèche

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}).$$

Or $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}$ est une résolution droite de $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}$, car $\mathcal{P}$ est à termes plats sur $\mathcal{B}$. Donc on a les isomorphismes suivants :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{P}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}).$$

On obtient ainsi, par composition, une flèche :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}).$$

Il reste à vérifier que cette flèche est un isomorphisme. On se ramène par localisation et dévissage au cas où $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{A}$-module localement projectif de type fini, donc localement facteur direct d'un $\mathcal{A}$-module libre de type fini. Il suffit alors de prendre $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ et on vérifie immédiatement que l'on obtient un isomorphisme.

De plus, si $\mathcal{G} \in D^b_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{B}, {}^*\mathcal{C})$, puisque $\mathcal{F} \in D^b_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$, on a d'une part $\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \in D^b_{(.,\mathrm{tdf})}({}^g\mathcal{A}; {}^*\mathcal{C})$ et, d'après 1.2.1, ii) $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G}) \in D^b_{\mathrm{tdf}}({}^*\mathcal{C})$. D'autre part, toujours d'après 1.2.1, ii), $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in D^b_{\mathrm{tdf}}(\mathcal{B}^d)$. Par conséquent, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{B}} \mathcal{G} \in D^b_{\mathrm{tdf}}({}^*\mathcal{C})$, d'où l'assertion.

On raisonne de même lorsque $\mathcal{F} \in D^b_{(.,\mathrm{parf})}({}^g\mathcal{A}, \mathcal{B}^d)$ et $\mathcal{G} \in D^b_{(.,\mathrm{parf})}({}^g\mathcal{B}, {}^*\mathcal{C})$.

1.3. — On considère à présent deux faisceaux d'anneaux commutatifs $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$, un faisceau de $\mathcal{R}$-algèbres plates $\mathcal{A}$ et un faisceau de $\mathcal{S}$-algèbres plates $\mathcal{B}$ sur X, de morphismes structuraux $f : \mathcal{R} \to \mathcal{A}$ et $g : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$. On suppose de plus qu'il existe des morphismes d'anneaux $u : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ et $v : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tels que $v \circ f = g \circ u$.

1.4. PROPOSITION. — *Sous les hypothèses* 1.3, *soit* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$. *On a dans* $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}^d)$ *des isomorphismes canoniques*

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{B}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}.$$

Preuve. — Vérifions d'abord que ces complexes appartiennent à $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}^d)$.

a) Puisque $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$, par extension des scalaires le complexe $\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}$ appartient à $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B})$. On applique alors la proposition 1.2.1, ii) en remplaçant $\mathcal{R}$ par $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$. On en déduit que $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{B}) \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}^d)$.

b) De même grâce à 1.2.1, ii), où l'on remplace cette fois $\mathcal{B}$ par $\mathcal{A}$, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$ et par extension des scalaires, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ appartient à $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}^d)$.

c) Ici, $\mathcal{B}$ n'étant pas supposé plat sur $\mathcal{R}$, on ne peut pas utiliser la proposition 1.2.1 pour s'assurer que $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{B}) \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}^d)$. On dispose dans le cas général du résultat suivant, analogue au cas commutatif, et dont on ne donnera pas la démonstration, celle-ci étant également analogue au cas commutatif.

LEMME. — *Soient* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ *un morphisme d'anneaux,* $\mathcal{P}$ *un* $\mathcal{A}$*-module à gauche plat et* $\mathcal{I}$ *un* $\mathcal{C}$*-module à gauche injectif. Alors* $\mathcal{I}$ *est un* $\mathcal{A}$*-module à gauche acyclique pour le foncteur* $\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{P}, -)$.

Reprenons la démonstration du point c). Soit $\mathcal{I}$ une résolution droite de $\mathcal{B}$ par des $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{B}_0$-modules à gauche injectifs. Considérons le morphisme naturel de $\mathcal{A}$-algèbres $\mathcal{A} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{B}_0$ qui envoie $a \in \mathcal{A}$ sur $v(a) \otimes 1$. Il permet de munir $\mathcal{I}$ d'une structure de complexe de $\mathcal{A}$-modules à gauche. Soit $\mathcal{P}$ une résolution gauche de $\mathcal{E}$ par des $\mathcal{A}$-modules à gauches plats. Grâce au lemme précédent, on a l'isomorphisme naturel $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{B}) \cong \mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{I})$, qui munit $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{B})$ d'une structure de complexe de $\mathcal{B}$-modules à droite. Les isomorphismes énoncés nous permettrons de conclure que c'est un complexe parfait à cohomologie bornée, ce que l'on pourrait démontrer directement, localement et par dévissage. Construisons le premier isomorphisme.

Pour cela reprenons les résolutions $\mathcal{I}$ de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ précédentes. On a alors les isomorphismes naturels

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{B}}(b \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{B}) &\cong \mathcal{H}om_{g_\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{P}, \mathcal{I}) \\ &\cong \mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{P}, \mathcal{I}) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{B}),\end{aligned}$$

le deuxième isomorphisme étant obtenu par adjonction. Pour définir le second isomorphisme de la proposition, on définit d'abord un morphisme dans $D^b(\mathcal{A}^d)$, par fonctorialité à partir du morphisme $(\mathcal{A}, \mathcal{A})$-bilinéaire $v : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{B}).$$

Et, puisque $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{B}) \in D^b_{\text{parf}}(\mathcal{B}^d)$, par extension des scalaires ce morphisme se factorise par $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{A}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \to \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E},\mathcal{B})$ défini dans $D^b_{\text{parf}}(\mathcal{B}^d)$. On vérifie enfin localement que c'est un isomorphisme en se ramenant par dévissage au cas où $\mathcal{E} = \mathcal{A}$.

2. Foncteurs de passage de gauche à droite et de droite à gauche.

Comme on vient de le voir, la théorie classique de la dualité à valeurs dans un anneau non nécessairement commutatif transforme les complexes parfaits de modules à gauche en complexes parfaits de modules à droite.

Pour obtenir un foncteur à valeurs dans la catégorie des modules à gauche, on est donc amené à modifier la définition du foncteur de dualité, et pour cela à introduire certaines données supplémentaires.

2.1. — Considérons ici deux faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ et $\mathcal{A}$ sur X, tels que $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ soit commutatif et $\mathcal{A}$ quelconque, et munis d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$. On suppose que l'on dispose des données suivantes :

a) Un $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-module $\omega_{\mathcal{A}}$, localement libre de rang 1, de sorte que l'on peut former le $({\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}^d, \mathcal{A}^d)$-bimodule $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}$, où $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ et $a' \in \mathcal{A}$ agissent par

$$w \otimes a \mapsto (wf) \otimes a \quad \text{et} \quad w \otimes a \mapsto w \otimes (aa').$$

b) Une deuxième structure de $\mathcal{A}$-module à droite sur $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}$ induisant la structure de $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-module définie par la multiplication à gauche et telle que $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}$, muni de plus de la structure précédente de $\mathcal{A}$-module à droite, soit un $\mathcal{A}$-bimodule à droite. C'est-à-dire un $(\mathcal{A}^d, \mathcal{A}^d)$-bimodule .

c) Une involution de $\mathcal{A}$-bimodules à droite $\delta_{\mathcal{A}} : \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}$ qui échange ces deux structures de $\mathcal{A}$-module à droite.

Notons à présent $\omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ le $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-module $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}(\omega_{\mathcal{A}}, \mathcal{O}_{\mathcal{A}})$ localement libre de rang 1. Les isomorphismes naturels

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}(\omega_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}, \mathcal{A})$$

munissent $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ d'une structure de $\mathcal{A}$-bimodule à gauche.

On suppose enfin de plus que l'isomorphisme naturel $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-linéaire et $\mathcal{A}$-linéaire à droite

$$\varphi : \omega_{\mathcal{A}}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}$$

est également $\mathcal{A}$-linéaire à gauche. On déduit alors de l'involution $\delta_{\mathcal{A}}$, par fonctorialité et grâce à φ, une involution de bimodules à gauche $\beta_{\mathcal{A}}$ sur $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$

qui échange les deux structures gauches. D'autre part on obtient la $\mathcal{A}$-linéarité à droite de l'isomorphisme naturel $\mathcal{A}$-linéaire à gauche

$$\psi : (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \omega_\mathcal{A}^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \omega_\mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A},$$

puisque $\psi = \varphi \circ (\delta_\mathcal{A} \otimes \beta_\mathcal{A})$.

Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{A}$-module à droite. Alors, via les isomorphismes

$$\omega_\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\omega_\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \mathcal{A}) \otimes_\mathcal{A} \mathcal{E}, \quad \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \omega_\mathcal{A}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes_\mathcal{A} (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \omega_\mathcal{A}^{-1})$$

$\omega_\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} -$ et $- \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \omega_\mathcal{A}^{-1}$ définissent des foncteurs de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules à gauche dans celle des $\mathcal{A}$-modules à droite et réciproquement. Il résulte des isomorphismes φ et ψ que ces foncteurs sont quasi-inverses. D'où la proposition :

2.1.1. Proposition. — *Le foncteur $\omega_\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} -$ est une équivalence de catégories de la catégorie des $\mathcal{A}$-modules à gauche dans celle des $\mathcal{A}$-modules à droite, de foncteur quasi-inverse $- \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \omega_\mathcal{A}^{-1}$.*

Nous appellerons *structures tordues* les structures de $\mathcal{A}$-module ainsi obtenues par tensorisation par $\omega_\mathcal{A}$ ou $\omega_\mathcal{A}^{-1}$, et, lorsque cela sera nécessaire, nous préciserons par un exposant « ^{t} » qu'une opération s'effectue par l'intermédiaire de ces structures.

2.1.2. Nota Bene. — On dispose donc de la $\mathcal{A}$-linéarité à droite et à gauche pour les isomorphismes φ et ψ, et de deux involutions $\delta_\mathcal{A}$ et $\beta_\mathcal{A}$ échangeant les structures tordues avec les structures naturelles de $\mathcal{A}$-modules. En outre on obtient deux isomorphismes $\mathcal{A}$-linéaires à droite et à gauche

$$\alpha : \omega_\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \omega_\mathcal{A}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}, \qquad \alpha = \varphi \circ (\delta_\mathcal{A} \otimes \mathrm{id}),$$

$$\widetilde{\alpha} : (\omega_\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \mathcal{A})^t \otimes_\mathcal{A} {}^t(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{A}} \omega_\mathcal{A}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}, \qquad \widetilde{\alpha} = \alpha \circ (\delta_\mathcal{A} \otimes \beta_\mathcal{A}).$$

En caractéristique nulle, l'anneau des opérateurs différentiels usuel $\mathcal{D}_{X/S}$, et le faisceau inversible $\omega_X = \wedge^{d_X} \Omega^1_{X/S}$, où d_X est la dimension de X sur S, vérifient ces conditions, avec $\mathcal{O}_\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$, $\mathcal{A} = \mathcal{D}_{X/S}$ et $\omega_\mathcal{A} = \omega_X$. En particulier $\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X/S}$ est muni d'une involution qui échange les deux structures de $\mathcal{D}_{X/S}$-module à droite et qui correspond localement à transformer un opérateur différentiel en son adjoint (voir [Sa1, 1.7]).

De même ici on dispose, pour tout $m \geq 0$, sur $\mathcal{D}_X^{(m)}$ et $\omega_X = \wedge^{d_X} \Omega^1_{X/S}$ des données précédentes (voir [Be4, 1.3.4]).

2.2. LEMME. — i) *Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ deux $\mathcal{A}$-modules à gauche, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux $\mathcal{A}$-modules à droite. Il existe des isomorphismes canoniques :*

$$\theta : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}),$$

$$\theta' : (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}') \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E}',$$

$$\theta'' : \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}).$$

ii) *Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{A}$-module à gauche injectif (resp. localement projectif, resp. plat, resp. de type fini), alors $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}$ est un $\mathcal{A}$-module à droite injectif (resp. localement projectif, resp. plat, resp. de type fini). En outre la même conclusion s'applique au $\mathcal{A}$-module à gauche $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$; lorsque $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{A}$-module à droite et vérifie les hypothèses correspondantes.*

Preuve.

a) Considérons l'isomorphisme défini à partir de $\widetilde{\alpha}$:

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \big((\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A})^t \otimes_{\mathcal{A}} {}^t(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1})\big) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E}.$$

On obtient alors θ grâce aux isomorphismes naturels suivants

$$\begin{aligned} &\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \big((\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A})^t \otimes_{\mathcal{A}} {}^t(\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1})\big) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E} \\ &\qquad \xrightarrow{\sim} (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E})^t \otimes_{\mathcal{A}} {}^t(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \\ &\qquad\qquad \xrightarrow{\sim} (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}). \end{aligned}$$

Les isomorphismes θ' et θ'' s'en déduisent en prenant $\mathcal{F} = \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}'$ et $\mathcal{E} = \mathcal{F}' \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$, les foncteurs $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} -$ et $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ étant quasi-inverses.

b) Puisque le foncteur $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} -$ est une équivalence de catégories, il transforme un $\mathcal{A}$-module à gauche injectif en un $\mathcal{A}$-module à droite injectif.

c) Supposons que $\mathcal{E}$ soit localement projectif. Considérons une suite exacte $\mathcal{N}' \to \mathcal{N} \to \mathcal{N}''$ de $\mathcal{A}$-modules à droite. On veut montrer que la suite

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}, \mathcal{N}') \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}, \mathcal{N}'')$$

est exacte. Or

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}, \mathcal{N}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}\big((\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}, \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}\big) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{N} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}), \end{aligned}$$

car $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ est une équivalence de catégories. Sachant que $\omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, on obtient le résultat annoncé.

d) Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche plat, $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ deux $\mathcal{A}$-modules à gauche, et $\mathcal{M}_1 \hookrightarrow \mathcal{M}_2$ un morphisme injectif. Considérons les isomorphismes définis au i) :

$$\theta'_1 : (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\sim} (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{M}_1) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E},$$

$$\theta'_2 : (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\sim} (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{M}_2) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{E}.$$

Comme $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{M}_1 \hookrightarrow \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{M}_2$ est un morphisme injectif de $\mathcal{A}$-modules à droite, on en déduit que $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}$ est un $\mathcal{A}$-module à droite plat.

e) Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{A}$-module à gauche de type fini. Il existe un morphisme surjectif $\mathcal{A}$-linéaire à gauche $\pi : \mathcal{A}^n \to \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$. D'où, par fonctorialité et exactitude, un morphisme surjectif $\mathcal{A}$-linéaire à droite

$$\pi' : \big({}^t(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A})\big)^n \longrightarrow \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}.$$

En composant avec l'isomorphisme

$$\delta^n_{\mathcal{A}} : (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A})^n \xrightarrow{\sim} \big({}^t(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A})\big)^n$$

qui échange les deux structures droites, on obtient un morphisme surjectif de $(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A})^n$ dans $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}$, $\mathcal{A}$-linéaire à droite pour la structure naturelle de $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}$, qui fait de ce dernier un $\mathcal{A}$-module à droite de type fini.

On montre de la même façon les résultats analogues pour un module à droite $\mathcal{F}$ et on déduit de ce lemme le résultat suivant :

2.3. Corollaire. — *Le foncteur $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} -$ est une équivalence de catégories de $D_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$ (resp. $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$) dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$ (resp. $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$), de foncteur quasi-inverse $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$.*

3. Complexe dual et théorème de bidualité.

3.1. — Considérons à présent un faisceau d'anneaux commutatifs $\mathcal{R}$, un faisceau de $\mathcal{R}$-algèbres commutatives $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ et un faisceau de $\mathcal{R}$-algèbres plates non nécessairement commutatives $\mathcal{A}$, sur X. Notons les morphismes structuraux $f : \mathcal{R} \to \mathcal{A}$ et $h : \mathcal{R} \to \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$. On suppose de plus que l'on dispose d'un morphisme de $\mathcal{R}$-algèbres $f^0 : \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ et qu'il existe un $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-module $\omega_{\mathcal{A}}$ localement libre de rang 1 tel que $(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \omega_{\mathcal{A}})$ satisfasse les hypothèses 2.1. On peut à présent définir le foncteur de dualité.

3.2. Définition. — i) *Soit $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$. On pose*

$$\mathbb{D}(\mathcal{E}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\!\mathcal{A}}\big(\mathcal{E}, \mathcal{A}[d_X]\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1},$$

où d_X est la dimension relative de X sur S, et on dit que $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est le complexe dual de $\mathcal{E}$.

ii) *Soit* $\mathcal{F} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$. *On pose*

$$\mathbb{D}'(\mathcal{F}) = \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}\big(\mathcal{F}, \mathcal{A}[d_X]\big),$$

et on dit que $\mathbb{D}'(\mathcal{F})$ *est le complexe dual de* $\mathcal{F}$.

3.3. Proposition. — *Le foncteur* $\mathbb{D}$ (*resp.* $\mathbb{D}'$) *est un foncteur de la catégorie* $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{A})$ (*resp.* $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$) *dans elle-même.*

Preuve. — En effet, $\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A})$ est un foncteur de $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{A})$ dans $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$ d'après la proposition 1.2.1, et on conclut grâce au corollaire 2.3. Même chose pour $\mathbb{D}'$.

3.4. Nota Bene. — Pour calculer ces complexes duaux on utilisera fréquemment la même résolution de $\mathcal{A}[d_X]$, que nous noterons $\mathcal{I}$. Précisons de quelle résolution il s'agit.

Soit $\mathcal{I}$ une résolution droite de $\mathcal{A}[d_X]$ par des $\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{A}^0$-modules injectifs. Comme $\mathcal{A}$ est plat sur $\mathcal{R}$, $\mathcal{I}$ est un complexe à termes injectifs comme $\mathcal{A}$-modules à gauche et à droite. Donc d'après 2.2, $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ (resp. $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{I}$) est une résolution injective de $\mathcal{A}[d_X] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ (resp. de $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}[d_X]$) dans la catégorie des $\mathcal{A}$-bimodules à gauche (resp. à droite).

De plus, il existe un quasi-isomorphisme $\beta_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1} \to \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ (resp. $\delta_{\mathcal{I}} : \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{I} \to \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{I}$) qui prolonge l'involution $\beta_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1} \to \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ (resp. $\delta_{\mathcal{A}} : \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A} \to \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}$) définie en 2.1.

3.5. Proposition. — *Soit* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{A})$ (*resp.* $\mathcal{F} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$). *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\alpha : \mathbb{D}'(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathbb{D}(\mathcal{E})$$

(*resp* $\alpha' : \mathbb{D}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}'(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$).

Preuve. — i) Soient $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{A})$ et $\mathcal{I}$ la résolution droite de $\mathcal{A}[d_X]$ introduite en 3.4. Alors :

$$\mathbb{D}'(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) = \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}, \mathcal{I}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}, \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{I}).$$

Le quasi-isomorphisme $\delta_{\mathcal{I}}$ sur $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{I}$ induit un quasi-isomorphisme $\delta_{\mathcal{I}}^*$ sur le complexe de $\mathcal{A}$-modules à droite $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}, \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{I})$. On obtient donc un isomorphisme :

$$\mathbb{D}'(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}\big(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}, (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{I})^t\big),$$

où $\mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}$ « est pris » pour les structures de $\mathcal{A}$-module à droite tordues. Ainsi, grâce à 2.3, on obtient :

$$\mathbb{D}'(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \cong \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \cong \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}\big).$$

D'où l'isomorphisme α, puisque :

$$\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) = \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}\big).$$

ii) On définit de façon symétrique α' grâce à $\beta_{\mathcal{I}}$.

3.6. THÉORÈME. — *Soient $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$ (resp. $\mathcal{F} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$). Il existe dans $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$ (resp. $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$) un isomorphisme canonique :*

$$\iota : \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}) \quad \big(\textit{resp. } \iota' : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}' \circ \mathbb{D}'(\mathcal{F})\big).$$

Preuve. — i) Construisons une flèche

$$\iota : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}\big(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}[d_X]) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}, \mathcal{A}[d_X]\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}.$$

Soit $\mathcal{I}$ la résolution droite de $\mathcal{A}[d_X]$ introduite en 3.4. Considérons le morphisme $\mathcal{A}$-linéaire à gauche défini par l'évaluation :

$$\mathrm{ev} : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}), \mathcal{I}\big).$$

Grâce à 2.1.1, on a un isomorphisme $\mathcal{A}$-linéaire à gauche :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}), \mathcal{I}\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}, {}^t(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1})\big).$$

On déduit alors du quasi-isomorphisme $\beta_{\mathcal{I}}$ sur $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ qui échange les deux structures de $\mathcal{A}$-module à gauche 3.4 un morphisme :

$$\mathrm{ev} : \mathcal{E} \to \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}\big)$$

où la structure gauche sur $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ utilisée pour $\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}$ est la structure naturelle. Ainsi puisque, par définition :

$$\mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{A}}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}, \mathcal{I}\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1},$$

on obtient le morphime $\iota : \mathcal{E} \to \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E})$.

On montre que c'est un isomorphisme en se ramenant au cas où $\mathcal{E} = \mathcal{A}$, par localisation et dévissage.

ii) De la même façon, pour $\mathcal{F} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$, on construit un morphisme $\iota' : \mathcal{F} \to \mathbb{D}' \circ \mathbb{D}'(\mathcal{F})$ à partir du morphisme d'évaluation

$$\mathrm{ev} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}om_{{}^g\!\mathcal{A}}\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{A}^d}(\mathcal{F}, \mathcal{I}), \mathcal{I}\big),$$

puis grâce au quasi-isomorphisme $\delta_{\mathcal{I}}$ sur $\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{I}$ qui échange les deux structures de $\mathcal{A}$-module à droite et on montre que c'est un isomorphisme en se ramenant au cas où $\mathcal{F} = \mathcal{A}$, par localisation et dévissage.

3.7. Proposition. — *Les isomorphismes de bidualité sont compatibles avec les isomorphismes α et α' qui transforment la dualité à gauche en dualité à droite.*

Preuve. — Soient $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$ et $\mathcal{F} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$. Il s'agit de vérifier que les diagrammes naturels suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E} \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \iota"'] & \mathbb{D}' \circ \mathbb{D}'(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{E}) \arrow[d, "\mathbb{D}'(\alpha)^{-1}"] \\ \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & \mathbb{D}'(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathbb{D}(\mathcal{E})), \end{tikzcd} \tag{3.7.1}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\iota' \otimes \mathrm{id}"'] & \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \arrow[d, "\mathbb{D}(\alpha')^{-1}"] \\ \mathbb{D}' \circ \mathbb{D}'(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1} \arrow[r, "\alpha'^{-1}"] & \mathbb{D}(\mathbb{D}'(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}). \end{tikzcd} \tag{3.7.2}$$

La vérification de ces deux commutations est laissée au soin du lecteur. Il ne s'agit en effet que d'expliciter chacune des flèches et de faire les calculs explicites.

4. Compatibilité à l'extension des scalaires.

4.1. — On considère maintenant des faisceaux d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sur X, un $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$-module $\omega_{\mathcal{A}}$, un $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$-module $\omega_{\mathcal{B}}$, localement libres de rang 1, tels que $(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \omega_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}, \mathcal{B}, \omega_{\mathcal{B}})$ satisfassent les hypothèses 2.1. Notons $f^0 : \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{A}$ et $g^0 : \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ les morphismes d'algèbres considérés. Supposons de plus qu'il existe des morphismes d'anneaux $w : \mathcal{O}_{\mathcal{A}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ et $v : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tels que $v \circ f^0 = g^0 \circ w$, que $\omega_{\mathcal{B}} \cong \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$ et que le morphisme :

$$\mathrm{id} \otimes v : \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A} \longrightarrow \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{B} \cong \omega_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}$$

soit semi-linéaire par rapport à v pour les structures de $\mathcal{A}$-module à droite tordues. C'est-à-dire que pour tous $a, a' \in \mathcal{A}$ et $x \in \omega_{\mathcal{A}}$, on a :

$$(\mathrm{id} \otimes v)\big((x \otimes a)^t \cdot a'\big) = \big((x \otimes v(a))^t \cdot v(a')\big).$$

De même puisque

$$\omega_{\mathcal{B}}^{-1} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}}(\omega_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}}(\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}}(\omega_{\mathcal{A}}, \mathcal{O}_{\mathcal{B}}) \cong \mathcal{O}_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1},$$

le morphisme naturel suivant est semi-linéaire par rapport à v pour les structures de $\mathcal{A}$-module à droite tordues

$$v \otimes \mathrm{id} : \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1} \longrightarrow \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1} \cong \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

On obtient alors un isomorphisme naturel de $\mathcal{B}$-modules à droite (resp. à gauche)

$$\nu_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} : (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{A}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{B} \cong \omega_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{B}.$$

(resp. $\varepsilon_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} : \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}$).

4.2. Proposition. — *Soient $\mathcal{F} \in D^-(\mathcal{A}^d)$ (resp. $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$). Il existe dans $D^-({}^g\mathcal{B})$ (resp. $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B})$) un isomorphisme canonique :*

$$\eta_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} : \mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Preuve. — Soit $\mathcal{P}$ une résolution gauche de $\mathcal{F}$ par des $\mathcal{A}$-modules à droite plats. On dispose alors des quasi-isomorphismes suivants

$$\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1},$$

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}).$$

Il reste donc à construire un isomorphisme de complexes :

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}).$$

On considère alors les isomorphismes composés $(\mathrm{id}_{\mathcal{P}} \otimes \beta_{\mathcal{B}}) \circ \theta''$:

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{P} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{A}} {}^t(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}) \cong \mathcal{P} \otimes_{\mathcal{A}} (\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}).$$

Nota Bene. — Soient $(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \omega_{\mathcal{A}})$, $(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}, \mathcal{B}, \omega_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ vérifiant 2.1 et tels que $((\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \omega_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}, \mathcal{B}, \omega_{\mathcal{B}}))$ (resp. $(\mathcal{O}_{\mathcal{B}}, \mathcal{B}, \omega_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$) vérifient (4.1). Alors $(\mathcal{O}_{\mathcal{A}}, \mathcal{A}, \omega_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{O}_{\mathcal{C}}, \mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ vérifient également 4.1. En effet, d'une part :

$$\omega_{\mathcal{C}} \cong \omega_{\mathcal{B}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \cong (\omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{O}_{\mathcal{B}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \mathcal{O}_{\mathcal{C}} \cong \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{O}_{\mathcal{C}},$$

et d'autre part, puisque $\varepsilon_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} \circ \varepsilon_{\mathcal{B}/\mathcal{A}} = \varepsilon_{\mathcal{C}/\mathcal{A}}$ et que $\beta_{\mathcal{A}}$ est une involution, on a :

$$\eta_{\mathcal{C}/\mathcal{A}} = \eta_{\mathcal{C}/\mathcal{B}} \circ \eta_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}.$$

4.3. — Montrons à présent que le foncteur de dualité commute à l'extension des scalaires. Pour cela, toujours sous les hypothèses 4.1, reprenons deux faisceaux d'anneaux commutatifs $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$, supposons que $\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathcal{O}_{\mathcal{B}}$) soit une $\mathcal{R}$-algèbre (resp. $\mathcal{S}$-algèbre) commutative de morphisme structural $h : \mathcal{R} \to \mathcal{O}_{\mathcal{A}}$ (resp. $k : \mathcal{S} \to \mathcal{O}_{\mathcal{B}}$) et que $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) soit une $\mathcal{R}$-algèbre (resp. $\mathcal{S}$-algèbre) plate de morphisme structural $f : \mathcal{R} \to \mathcal{A}$ (resp. $g : \mathcal{S} \to \mathcal{B}$). On suppose enfin qu'il exite un morphisme d'anneaux $u : \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ tel que $k \circ u = w \circ h$. On a donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{R} & \xrightarrow{h} & \mathcal{O}_{\mathcal{A}} & \xrightarrow{f^0} & \mathcal{A} \\
{\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\
\mathcal{S} & \xrightarrow[k]{} & \mathcal{O}_{\mathcal{B}} & \xrightarrow[g^0]{} & \mathcal{B}.
\end{array}$$

4.4. PROPOSITION. — *Soit $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$. Il existe dans $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B})$ un isomorphisme canonique*

$$\mu : \mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}).$$

Preuve. — On a

$$\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \big(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}[d_X]) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}\big).$$

Or on a un isomorphisme $\eta_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ dans $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B})$ d'après la proposition précédente :

$$\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \big(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}[d_X]) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}\big) \cong \big(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}[d_X]) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Éliminons le problème du décalage. À multiplication par -1 près on a :

$$\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \big(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}[d_X]) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \omega_{\mathcal{A}}^{-1}\big) \cong \big(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} b\big)[d_X] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

De la proposition 1.4, on déduit l'isomorphisme dans $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B})$:

$$\big(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}\big)[d_X] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1} \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{B})[d_X] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

Toujours à multiplication par -1 près on a :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{B})[d_X] \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1} \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{B}}\big(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{E}, \mathcal{B}[d_X]\big) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1}.$$

On obtient ainsi le résultat énoncé.

4.5. COROLLAIRE. — *Soit $\mathcal{F} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$. Il existe dans $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}^d)$ un isomorphisme canonique*

$$\mu' : \mathbb{D}'(\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}'(\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}).$$

Preuve. — Il suffit d'après 2.3, de montrer qu'il existe dans $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B})$ un isomorphisme canonique :

$$(\mathbb{D}'(\mathcal{F}) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}'(\mathcal{F} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{B}}} \omega_{\mathcal{B}}^{-1},$$

que l'on définit à partir de μ grâce aux isomorphismes $\eta_{\mathcal{B}/\mathcal{A}}$ et α' (voir 3.5).

4.6. — Soit $u : S \to R$ un morphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}$-schémas (resp. de $\mathcal{V}$-schémas formels). On considère deux morphismes de schémas (resp. formels) lisses $h : X \to R$ et $k : Y \to S$ et un morphisme $w : Y \to X$ tel que $h \circ w = u \circ k$:

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{w} & X \\ {\scriptstyle k}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ S & \xrightarrow{u} & R. \end{array}$$

On se donne un faisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ (resp. $\mathcal{B}$) sur X (resp. Y), un morphisme d'anneaux $f^0 : \mathcal{O}_X \to \mathcal{A}$ (resp. $g^0 : \mathcal{O}_Y \to \mathcal{B}$) et un $\mathcal{O}_X$-module (resp. $\mathcal{O}_Y$-module) localement libre $\omega_{\mathcal{A}}$ (resp. $\omega_{\mathcal{B}}$) tels que $(\mathcal{O}_R, \mathcal{O}_X, \mathcal{A}, \omega_{\mathcal{A}})$ (resp. $(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_Y, \mathcal{B}, \omega_{\mathcal{B}})$) satisfasse 3.1 et que $\omega_{\mathcal{B}} \cong w^*\omega_{\mathcal{A}}$. Notons encore

$$u : w^{-1}h^{-1}\mathcal{O}_R \to k^{-1}\mathcal{O}_S, \quad h : w^{-1}h^{-1}\mathcal{O}_R \to w^{-1}\mathcal{O}_X, \quad k : k^{-1}\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_Y,$$
$$w : w^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y, \quad f^0 : w^{-1}\mathcal{O}_X \to w^{-1}\mathcal{A}$$

les morphismes canoniques. On suppose alors enfin qu'il existe un morphisme d'anneaux $v : w^{-1}\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tel que $v \circ f^0 = g^0 \circ w$ et que :

$$\mathrm{id} \otimes v : \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} v^{-1}\mathcal{A} \longrightarrow \omega_{\mathcal{A}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{A}}} \mathcal{B}$$

soit semi-linéaire par rapport à v pour les structures de $\mathcal{A}$-module à droite tordues. On dispose donc du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} w^{-1}h^{-1}\mathcal{O}_R & \xrightarrow{h} & w^{-1}\mathcal{O}_X & \xrightarrow{f^0} & w_{\mathcal{A}}^{-1} \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow \\ k^{-1}\mathcal{O}_S & \xrightarrow{k} & \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{g^0} & \mathcal{B}. \end{array}$$

De plus $(w^{-1}h^{-1}\mathcal{O}_R, w^{-1}\mathcal{O}_X, w^{-1}\mathcal{A}, w^{-1}\omega_{\mathcal{A}})$ et $(\mathcal{O}_S, \mathcal{O}_Y, \mathcal{B}, \omega_{\mathcal{B}})$ vérifient les hypothèses 4.3 sur Y. On déduit alors de la proposition 4.4 que le foncteur de dualité est compatible aux morphismes de schémas (resp. de schémas formels).

4.7. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses* 4.6, *si* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\!\mathcal{A})$, *alors il existe dans* $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B})$ *un isomorphisme canonique :*

$$\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{w_{\mathcal{A}}^{-1}} w^{-1}\mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{w_{\mathcal{A}}^{-1}} w^{-1}\mathcal{E}).$$

Preuve. — Puisque w^{-1} est un foncteur exact, $w^{-1}\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g w^{-1}\mathcal{A})$ et d'après 4.4, on a

$$\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{w_{\mathcal{A}}^{-1}} \mathbb{D}(w^{-1}\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{B} \otimes^{\mathbb{L}}_{w_{\mathcal{A}}^{-1}} w^{-1}\mathcal{E}).$$

De plus, $\mathbb{D}(w^{-1}\mathcal{E}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g w^{-1}\mathcal{A}}(w^{-1}\mathcal{E}, w^{-1}\mathcal{A}[d_Y]) \otimes_{w^{-1}\mathcal{O}_X} w^{-1}\omega_{\mathcal{A}}^{-1}$ et on a un morphisme canonique :

$$w^{-1}\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g w^{-1}\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}[d_Y]) \longrightarrow \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g w^{-1}\mathcal{A}}(w^{-1}\mathcal{E}, w^{-1}\mathcal{A}[d_Y]).$$

On vérifie alors localement et par dévissage que c'est un isomorphisme.

4.7.1. — On a le résultat analogue pour $\mathcal{F} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d)$.

5. Applications aux opérateurs différentiels.

5.1. — Supposons à présent que l'on soit dans le cas formel. Notons $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{X}$) le $\mathcal{V}$-schéma (resp. $\mathcal{S}$-schéma) formel (resp. lisse) considéré et S_i (resp. X_i) sa réduction modulo l'idéal $\mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout entier $i \geq 0$. On a donc les diagrammes cartésiens suivants :

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & X_{i+1} \arrow[d] \\ S_i \arrow[r, hook] & S_{i+1}, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_i \arrow[r, hook] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & \mathcal{X} \arrow[d] \\ S_i \arrow[r, hook] & \mathcal{S}. \end{tikzcd}$$

Soit $(\mathcal{B}^{(m)})_{m\geq 0}$ un système inductif de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres commutatives plates sur $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$, muni d'une structure compatible de $(\mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}})_{m\geq 0}$-module à gauche. Notons $\mathcal{B}^{(m)}_i$ la réduction de $\mathcal{B}^{(m)}$ modulo l'idéal $\mathfrak{m}^{i+1}$ pour tout $i \geq 0$, et $(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}})_{m\geq 0}$ le complété $\mathfrak{m}$-adique du système inductif de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-algèbres $(\mathcal{B}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D}^{(m)}_{\mathcal{X}})_{m\geq 0}$.

Fixons un entier $m \geq 0$. Soient

$$\omega_{\mathcal{X}} = \overset{d}{\wedge}\, \Omega^1_{\mathcal{X}/\mathcal{S}}, \quad \omega_i = \overset{d}{\wedge}\, \Omega^1_{X_i/S_i},$$

où d est la dimension relative de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{S}$. On a, pour tout $i \geq 0$, les isomorphismes $\mathcal{O}_{X_i}$-linéaires canoniques (voir [Be3]) :

$$\mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \cong \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \big(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}\big), \qquad \omega_i \cong \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \omega_{\mathcal{X}},$$

$$\mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)} \cong \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \big(\mathcal{B}_{i+1}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{D}_{X_{i+1}}^{(m)}\big),$$

$$\omega_i \cong \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \omega_{i+1}.$$

Considérons l'involution δ_m sur $\omega_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$ qui échange les deux structures de $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$-module à droite (*cf.* [Be4, 1.3.4.1]). L'isomorphisme naturel $\mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$-linéaire à droite :

$$\omega_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \big(\mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \big(\omega_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}\big)$$

permet de définir sur $\omega_i \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} (\mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)})$ une deuxième structure de $\mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$-module à droite et une involution $\delta_m = \mathrm{id} \otimes \delta_m$, que l'on note encore δ_m. Par passage à la limite on vérifie que $\omega_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} (\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$ est également muni d'une deuxième structure de $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module à droite et d'une involution $\hat{\delta}^m$ qui échange ces deux structures. On vérifie, par des calculs directs en coordonnées locales, que $(\mathcal{O}_{\mathcal{S}_i}, \mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}, \omega_i)$ (resp. $(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}, \omega_{\mathcal{X}})$) satisfait, pour tout $i \geq 0$, les hypothèses 3.1 sur X_i (resp. sur $\mathcal{X}$).

Reprenons le diagramme (1) (resp. (2)). On en déduit alors que

$$\big(\mathcal{O}_{S_i}, \mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}, \omega_i\big), \quad \big(\mathcal{O}_{S_{i+1}}, \mathcal{O}_{X_{i+1}}, \mathcal{B}_{i+1}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{D}_{X_{i+1}}^{(m)}, \omega_{i+1}\big)$$

(resp. $(\mathcal{O}_{S_i}, \mathcal{O}_{X_i}, \mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}, \omega_i)$ et $(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}, \omega_{\mathcal{X}})$) vérifient 4.5. Ainsi grâce au corollaire 4.7, on obtient les commutations suivantes :

5.2. Corollaire. — *Sous les hypothèses* 5.1, *pour tout* $i \geq 0$, *on a :*

i) *Soit* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B}_{i+1}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{D}_{X_{i+1}}^{(m)})$. *Il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{O}_{S_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{S_{i+1}}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{O}_{S_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{S_{i+1}}} \mathcal{E})$$

dans $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)})$.

ii) *Soit* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$. *Il existe dans* $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)})$ *un isomorphisme canonique*

$$\mathcal{O}_{S_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{O}_{S_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{E}).$$

Preuve. — Posons $\mathcal{D}_i = \mathcal{B}_i^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m)}$ et $\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$. D'après 4.7, on sait que, si $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}_{i+1})$,

$$\mathcal{D}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{i+1}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{D}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}_{i+1}} \mathcal{E})$$

et si $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D})$,

$$\mathcal{D}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{D}_i \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}} \mathcal{E}).$$

Les diagrammes (1) et (2) étant cartésiens, on sait que

$$\mathcal{D}_i \cong \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{i+1}}} \mathcal{D}_{i+1} \cong \mathcal{O}_{S_i} \otimes_{\mathcal{O}_{S_{i+1}}} \mathcal{D}_{i+1},$$

$$\mathcal{D}_i \cong \mathcal{O}_{X_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \mathcal{D} \cong \mathcal{O}_{S_i} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{D}.$$

Par hypothèse, $\mathcal{D}_{i+1}$ est plat sur $\mathcal{O}_{S_{i+1}}$ pour tout $i \geq 0$, et $\mathcal{D}$ est plat sur $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$. Donc on a

$$\mathcal{D}_i \cong \mathcal{O}_{S_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{S_{i+1}}} \mathcal{D}_{i+1} \cong \mathcal{O}_{S_i} \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{S}}} \mathcal{D}.$$

On obtient alors le résultat annoncé.

5.3. — De plus, si $m' \geq m$, l'homomorphisme canonique

$$\omega_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)} \longrightarrow \omega_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')}$$

est linéaire pour les structures de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-module à droite définies par $\omega_{\mathcal{X}}$. En effet, il suffit de le vérifier localement, ce qui est immédiat d'après la description de celles-ci en termes d'opérateurs adjoints. On vérifie de même que l'homomorphisme canonique

$$\omega_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \big(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}\big) \longrightarrow \omega_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \big(\widehat{\mathcal{B}}^{(m')} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')}\big)$$

est $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}$-linéaire à droite pour les structures tordues. Ainsi

$$\big(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{B}}^{(m')} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')}, \omega_{\mathcal{X}}\big) \quad \text{et} \quad \big(\mathcal{O}_{\mathcal{S}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}, \widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)}, \omega_{\mathcal{X}}\big)$$

vérifient 4.1 et 4.3 sur $\mathcal{X}$. On déduit alors de la proposition 4.4 le résultat suivant.

5.4. Corollaire. — *Sous les hypothèses* 5.1, *si* $m' \geq m$, *et si* $\mathcal{E}$ *est un élément de* $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})$, *alors il existe dans* $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\widehat{\mathcal{B}}^{(m')} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')})$ *un isomorphisme canonique*

$$\begin{aligned}
&\big(\widehat{\mathcal{B}}^{(m')} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')}\big) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \\
&\qquad\qquad \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}\Big(\big(\widehat{\mathcal{B}}^{(m')} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m')}\big) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m)})} \mathcal{E}\Big).
\end{aligned}$$

NOTATIONS. — Soit $\mathcal{A}$ un faisceau sur $\mathfrak{X}$ muni d'une structure de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module. On pose :

$$\mathcal{A}_{\mathbb{Q}} = \mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

5.5. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses* 5.1, *si* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ *et si* $\mathbb{D}_{\mathbb{Q}}$ *est le dual à valeurs dans* $({}^g\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \otimes \mathbb{Q}$, *on a un isomorphisme canonique*

$$\mathbb{D}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

NOTA BENE. — Ceci se déduit aussi directement de 1.2.2, du fait de la platitude de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Z}$. En effet, posons $\mathcal{A} = \widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$; alors

$$\mathbb{D}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{E} \otimes \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\!\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathcal{A},\mathbb{Q}}[d_X]$$

et d'après 1.2.2, on a les isomorphismes dans $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{A}^d_{\mathbb{Q}})$

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\!\mathcal{A}_{\mathbb{Q}}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathcal{A}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\!\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A}_{\mathbb{Q}}) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\!\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{A})_{\mathbb{Q}}.$$

5.6. — Soit $m_0 \in \mathbb{N}$. On pose :

$$\mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}} = \varinjlim_{m \geq m_0} \big(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}\big).$$

Ainsi, on a :

$$\mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} = \mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong \varinjlim_{m \geq m_0} \big(\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}\big).$$

Alors, par passage à la limite, $(\mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, w_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ satisfait 3.1 sur $\mathfrak{X}$ et on vérifie aisément que

$$\big(\mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, w_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\big) \quad \text{et} \quad \big(\mathcal{O}_{\mathcal{S},\mathbb{Q}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, \widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}, w_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\big)$$

vérifient 4.1, pour tout $m \geq m_0$. Si $\mathcal{E}^{(m_0)} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\widehat{\mathcal{B}}^{(m_0)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, on pose :

$$\mathcal{E}^{(m)} = (\widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\widehat{\mathcal{B}}^{(m_0)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})} \mathcal{E}^{(m_0)}, \quad \forall m \geq m_0,$$

$$\mathcal{E} = \varinjlim_{m \geq m0} \mathcal{E}^{(m)} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\widehat{\mathcal{B}}^{(m_0)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})} \mathcal{E}^{(m_0)}.$$

On déduit alors directement de la proposition 4.4 le corollaire suivant.

5.7. COROLLAIRE. — *Sous les hypothèses de* 5.1, *il existe un isomorphisme canonique dans* $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$:

$$\mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes^{\mathbb{L}}_{(\widehat{\mathcal{B}}^{(m_0)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m_0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})} \mathbb{D}(\mathcal{E}^{(m_0)}).$$

5.8. Suite exacte des coefficients universels.

Reprenons les hypothèses 5.1; supposons que $\mathcal{S} = \mathrm{Spf}\,\mathcal{V}$, que les $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres $\mathcal{B}^{(m)}$ vérifient les conditions a) et b) de [Be3, 3.1.1], pour tout $m \geq 0$, et que les faisceaux d'anneaux $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ sont de dimension cohomologique finie.

On sait alors que les $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ sont cohérents à gauche et à droite (voir [Be3, 3.3.4]) et que les catégories

$$D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}) \quad \text{et} \quad D^b_{\mathrm{coh}}({}^g\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$$

coïncident (chap. 0, § 4.3).

Soit X_0 la réduction de $\mathfrak{X}$ modulo $\mathfrak{m}$ et k le corps résiduel de $\mathcal{V}$. Notons respectivement $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}_0$ les foncteurs de dualité relatifs à $\widehat{\mathcal{B}}^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathcal{B}^{(m)}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_0}$, et posons

$$\mathcal{D} = \widehat{\mathcal{B}}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}, \quad \mathcal{D}_0 = \mathcal{B}^{(m)}_0 \otimes_{\mathcal{O}_{X_0}} \mathcal{D}^{(m)}_{X_0}.$$

On déduit alors du corollaire 5.2 la suite exacte des coefficients universels suivante.

COROLLAIRE. — *Soit* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{coh}}(\mathcal{D})$. *On a la suite exacte*

$$0 \to \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{H}^i(\mathbb{D}(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathcal{H}^i(\mathbb{D}_0(\mathcal{D}_0 \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} \mathcal{E})) \longrightarrow \mathcal{T}or^1_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}_0, \mathcal{H}^{i+1}(\mathbb{D}(\mathcal{E}))) \to 0.$$

Preuve. — On déduit de [CE1, VI, 3.3] la suite exacte des coefficients universels

$$0 \to k \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{H}^i(\mathbb{D}(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathcal{H}^i(k \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} \mathbb{D}(\mathcal{E})) \longrightarrow \mathcal{T}or^1_{\mathcal{V}}(k, \mathcal{H}^{i+1}(\mathbb{D}(\mathcal{E}))) \to 0.$$

Puisque $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ est sans p-torsion et que par hypothèse $\mathcal{B}^{(m)}$ est plate sur $\mathcal{V}$, $\mathcal{D}$ est plate sur $\mathcal{V}$ et le morphisme naturel $k \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} \mathcal{D} \to k \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{D}$ est un quasi-isomorphisme.

De plus, $k \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{D} \cong \mathcal{D}_0$. Ainsi d'une part, on a l'isomorphisme $\mathcal{D}_0$-linéaire

$$k \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{H}^i(\mathbb{D}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_0 \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{H}^i(\mathbb{D}(\mathcal{E})),$$

et d'autre part dans $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}_0)$ les isomorphismes

$$k \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_0 \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}} \mathbb{D}(\mathcal{E}), \quad \mathbb{D}_0(k \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{D}_0(\mathcal{D}_0 \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}} \mathcal{E}).$$

Or d'après 5.2, ii), il existe un isomorphisme canonique

$$k \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} \mathbb{D}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{D}_0(k \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} \mathcal{E}).$$

On obtient ainsi des isomorphismes $\mathcal{D}_0$-linéaires

$$\mathcal{H}^i\big(k \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{V}} \mathbb{D}(\mathcal{E})\big) \cong \mathcal{H}^i\big(\mathbb{D}_0(\mathcal{D}_0 \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathcal{D}} \mathcal{E})\big),$$

$$\mathcal{T}or^1_{\mathcal{V}}(k, \mathcal{H}^{i+1}\big(\mathbb{D}(\mathcal{E})\big)) \cong \mathcal{T}or^1_{\mathcal{D}}\big(\mathcal{D}_0, \mathcal{H}^{i+1}(\mathbb{D}(\mathcal{E}))\big).$$

5.9. — On vérifie facilement que tous les résultats énoncés dans ce paragraphe pour les modules à gauche restent valables pour les modules à droite.

II. Dualité et Frobenius

On reprend les hypothèses du chapitre 0, § 3.1 à savoir : soit m un entier. On suppose que l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes :

1) S est un schéma, muni d'un m-PD-idéal $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \alpha)$, et p est localement nilpotent sur S.

2) $S = \operatorname{Spf} \mathcal{V}$ et l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{V}$ est muni d'une m-PD-structure, auquel cas on pose $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$.

On suppose de plus que $p \in \mathfrak{a}$ et que l'on dispose d'un morphisme $F : X \to X'$ de S-schémas (resp. de S-schémas formels) lisses tel que sa réduction modulo l'idéal $\mathfrak{a}$ soit le morphisme de Frobenius relatif de $X_0 = X \times_S S_0$ sur S_0, où $S_0 = V(\mathfrak{a})$.

On suppose enfin que S est localement noethérien, afin de pouvoir utiliser les résultats de Grothendieck sur l'image inverse exceptionnelle tels qu'ils sont développés dans [Ha1].

Il s'agit d'abord d'établir la commutation du foncteur de dualité à l'image inverse par Frobenius. Pour cela, on introduit le foncteur $F^\flat$, défini en [Ha1] sur les complexes $\mathcal{O}_X$-cohérents, et dont l'action sur les $\mathcal{D}$-modules à droite est comparable à celle de F^* pour les $\mathcal{D}$-modules à gauche [Be4]. On montre également la compatibilité de l'isomorphisme de bidualité (chap. I, § 3.6) à l'action de Frobenius.

1. Les foncteurs F^* et $F^\flat$.

On supposera dans ce paragraphe que l'on se trouve dans le cas algébrique.

1.1. — Nous avons vu dans le chapitre précédent que la dualité transforme naturellement un $\mathcal{D}$-module à gauche en $\mathcal{D}$-module à droite. Pour que la catégorie des modules à gauche soit stable par dualité, on a utilisé le faisceau dualisant ω_X, qui est, dans notre contexte, muni d'une structure de $\mathcal{D}$-module à droite. D'autre part, on sait que le foncteur F^* préserve la structure gauche (chap. 0, § 3). Introduisons donc à présent un foncteur pour les modules à droite.

NOTA BENE. — Il faut noter que dans cette situation il ne suffit plus de donner l'action des dérivations pour définir une structure de $\mathcal{D}_X^{(m)}$-module sur un $\mathcal{O}_X$-module. On utilise alors l'interprétation en termes de stratifications et costratifications (voir [Be3, 2.3] pour les modules à gauche et [Be4, 1.1] pour les modules à droite).

1.2. — Soient Y un schéma localement noethérien, et $f : X \to Y$ un morphisme fini. Considérons le foncteur image inverse exceptionnelle pour les morphismes finis $f^\flat$ défini en [Ha1, III, § 6]. Lorsque f est un homéomorphisme, $f^\flat$ est simplement donné, pour tout $\mathcal{M} \in D^+(Y)$, par

$$f^\flat \mathcal{M} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Y}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M})$$

vu comme objet de $D^+(X)$.

C'est le cas pour le morphisme de Frobenius. En effet la réduction de F modulo l'idéal $\mathfrak{a}$ étant un homéomorphisme et, $\mathfrak{a}$ étant un nilidéal par hypothèse, F est encore un homéomorphisme.

De plus, puisque $\mathcal{O}_X$ est localement libre de rang fini sur $\mathcal{O}_{X'}$, si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_{X'}$-module quasi-cohérent, alors

$$F^\flat \mathcal{M} \cong \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X^\vee, \quad \text{où} \quad \mathcal{O}_X^\vee = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_{X'})$$

et $F^\flat \mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Donc, si $\mathcal{M}$ appartient à $D^+_{\mathrm{qc}}(X')$, alors $F^\flat(\mathcal{M}) \in D^+_{\mathrm{qc}}(X)$, la catégorie dérivée des complexes bornés inférieurement de $\mathcal{O}_X$-modules à cohomologie quasi-cohérente.

1.3. PROPOSITION (*cf.* [Be4, 2.4.1]). — *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à droite. Alors $F^\flat \mathcal{F}$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-module à droite.*

1.4. PROPOSITION (*cf.* [Be4, 2.4.2]). — *Il existe un isomorphisme naturel φ : $\omega_X \xrightarrow{\sim} F^\flat \omega_{X'}$, indépendant de m, et $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-linéaire à droite pour tout $m \geq 0$.*

1.4.1. — Ce résultat utilise d'une part la définition des structures de $\mathcal{D}$-modules à droite sur ω_X et $\omega_{X'}$ par les costratifications (voir [Be4, 1.2.1]) et d'autre part la transitivité de l'image inverse exceptionnelle (voir [Ha1, III]).

1.5. — Considérons maintenant la situation plus générale où les faisceaux d'opérateurs différentiels sont à coefficients dans une $\mathcal{O}_X$-algèbre $\mathcal{B}$.

Soient $\mathcal{B}'$ une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre commutative, munie d'une structure compatible de $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche et notons $\mathcal{B} = F^*\mathcal{B}'$. On a vu au chapitre 0, § 3.2, que $\mathcal{B}$ est munie d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-module à gauche compatible avec sa structure de $\mathcal{O}_X$-algèbre et que le foncteur F^* induit une équivalence de catégories entre les $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-modules à gauche et les $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}$-modules à gauche. Voyons maintenant ce qu'il en est pour les modules à droite.

1.6. Remarque (voir [Be4, 2.4.5]). — Le foncteur $F^\flat$ définit un foncteur de la catégorie des $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-modules à droite dans celle des $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}$-modules à droite.

Notons que, si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à droite, puisque $\mathcal{B} = F^*\mathcal{B}'$ et que $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{B}'$-module, $F^\flat\mathcal{F}$ est muni d'une structure de $\mathcal{B}$-module grâce à l'isomorphisme d'adjonction

$$F^\flat\mathcal{F} = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\mathcal{O}_X, \mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}, \mathcal{F}).$$

1.7. Proposition (*cf.* [Be4, 2.5.2]). — *Il existe un isomorphisme canonique* $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}$*-bilinéaire à gauche et à droite*

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)} \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}).$$

1.7.1. — Remarquons que l'on dispose d'isomorphismes bilinéaires :

$$\begin{aligned} F^*F^\flat(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}) &\xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} (\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X^\vee \\ &\xrightarrow{\sim} F^\flat F^*(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}). \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{O}_X$ étant localement libre de type fini sur $\mathcal{O}_{X'}$, $F^*(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_{X'}^{(m)})$ (resp. $F^\flat(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)})$) est un $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_X^{(m+1)}$-module à gauche (resp. à droite) localement projectif de type fini.

1.8. — Ainsi, et puisque les foncteurs F^* et $F^\flat$ sont exacts, on a déduit de [Be4, 2.3.6], puis de 1.6 les résultats suivants :

1.8.1. Corollaire. — *Le foncteur F^* induit une équivalence de catégories entre les catégories $D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)})$ et $D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)})$.*

1.8.2. Corollaire. — *Soit $\mathcal{F}$ dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)d})$. Alors $F^\flat\mathcal{F}$ appartient à $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)d})$.*

1.9. Proposition (*cf.* [Be4, 2.4.3, 2.4.4 et 2.4.5]). — *Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à droite. Il existe des isomorphismes canoniques $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}$-linéaires :*

i) $\eta_{\mathcal{E}} : F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}$,

ii) $\eta_{\mathcal{F}} : F^\flat\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1})$.

1.9.1. — Précisons quels sont ces isomorphismes :

i) Soit $\varphi^{-1} : F^\flat\omega_{X'} \xrightarrow{\sim} \omega_X$ l'isomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-linéaire à droite introduit en 1.4. Alors $\eta_{\mathcal{E}}$ est l'isomorphisme composé de l'isomorphisme naturel :

$$F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} F^\flat(\omega_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}$$

et de l'isomorphisme :

$$\varphi^{-1} \otimes \mathrm{id} : F^\flat(\omega_{X'}) \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}.$$

ii) Il suffit de considérer l'isomorphisme précédent pour $\mathcal{E} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}$, puis de le tensoriser avec ω_X^{-1}.

1.10. Corollaire (*cf.* [Be4, 2.4.6]). — *Le foncteur $F^\flat$ est une équivalence de catégories de la catégorie des $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-modules à droite dans celle des $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}$-modules à droite.*

Par exactitude des foncteurs considérés, on déduit immédiatement de 1.9 et 1.10 :

1.11. Proposition. — *Soient $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)})$ et $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)d})$. Il existe des isomorphismes canoniques $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}$-linéaires :*

i) $\eta_{\mathcal{E}} : F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}$,

ii) $\eta_{\mathcal{F}} : F^\flat\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1})$.

1.11.1. Corollaire. — *Le foncteur $F^\flat$ est une équivalence de catégories de $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)d})$ dans $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)d})$.*

1.12. — Revenons à l'isomorphisme 1.7 en prenant $\mathcal{B}' = \mathcal{O}_{X'}$. On a un isomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-linéaire à gauche et à droite :

$$\mathcal{D}_X^{(m+1)} \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)},$$

notons-le ψ. On obtient donc un isomorphisme de $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-bimodules à droite :

$$\mathrm{id} \otimes \psi : \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)} \xrightarrow{\sim} \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F_g^*F_d^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)},$$

et, puisque $F_d^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ est un $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-module à gauche et un $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-module à droite, grâce à 1.9, on a :

$$\eta^{-1} : \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F_g^*F_d^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \xrightarrow{\sim} F_g^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_d^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)}).$$

Enfin, on a un isomorphisme naturel :

$$F_g^\flat\big(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}} F_d^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)}\big)\xrightarrow{\ \sim\ } F_g^\flat\big(F_d^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)})\big).$$

Notons f l'isomorphisme de $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-bimodules à droite obtenu par composition :

$$f:\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)}\xrightarrow{\ \sim\ } F_g^\flat\big(F_d^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)})\big).$$

On dispose de plus sur $\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)}$ et sur $\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ d'involutions qui échangent les deux structures droites (voir [Be4, 1.3.4)) ; notons-les δ et δ'. Montrons que ces involutions sont compatibles avec f :

1.12.1. Proposition. — *Avec les notations précédentes et en posant*

$$\mathcal{C}'=\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)},$$

le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)} \arrow[rr, "\delta"] \arrow[d, "f"', "\wr"] & & \omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)} \arrow[d, "f", "\wr"'] \\
F_g^\flat(F_d^\flat(\mathcal{C}')) \arrow[r, "F^\flat(F^\flat(\delta'))"] & F_d^\flat(F_g^\flat(\mathcal{C}')) \arrow[r, "\sim"] & F_g^\flat(F_d^\flat(\mathcal{C}')).
\end{tikzcd}$$

Preuve. — Revenons à la définition de $\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}$ pour $n\ge 0$ (*cf.* [Be3] et chap. 0, § 1.1).

Soit $\mathcal{P}_{X,(m)}^n(1)$ l'enveloppe à puissances divisées partielles de niveau m et d'ordre n de l'immersion diagonale $X\hookrightarrow X^2/S$. On pose :

$$P_{X,(m)}^n=\operatorname{Spec}\big(\mathcal{P}_{X,(m)}^n(1)\big).$$

Notons p_0 et p_1 (resp. q_0 et q_1) les projections $X^2\to X$ (resp. $X'^2\to X'$), u (resp. v) le morphisme naturel $P_{X,(m+1)}^n\to X^2$ (resp. $P_{X',(m)}^n\to X'^2$), enfin

$$p_0'=p_0\circ u,\quad p_1'=p_1\circ u,\quad q_0'=q_0\circ v,\quad q_1'=q_1\circ u.$$

On a alors :

$$\mathcal{D}_{X,n}^{(m)}=\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(p'_{0*}\mathcal{P}_{X,(m)}^n,\mathcal{O}_X)=p'_{0*}p_0^\flat(\mathcal{O}_X).$$

Considérons les diagrammes commutatifs suivants (voir [Be4, ,§ 2]) :

$$\begin{tikzcd} P^n_{X,(m+1)} \arrow[r, "F_P"] \arrow[d, "u"'] & P^n_{X',(m)} \arrow[d, "v"] \\ X^2 \arrow[r, "F\times F"] \arrow[d, shift right, "p_0"'] \arrow[d, shift left, "p_1"] & X'^2 \arrow[d, shift right, "q_0"'] \arrow[d, shift left, "q_1"] \\ X \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ & S \end{tikzcd}$$

On a donc :

$$\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)} n = \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} p'_{0*}p'^{\flat}_0(\mathcal{O}_X) \cong p'_{0*}p'^{\flat}_0(\omega_X),$$
$$\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X,n}^{(m)} \cong q'_{0*}q'^{\flat}_0(\omega_{X'}).$$

On est alors ramené à vérifier que les quatre diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd} p'_{0*}p'^{\flat}_0(\omega_X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & p'_{0*}p'^{\flat}_1(\omega_X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & p'_{1*}p'^{\flat}_0(\omega_X) \arrow[d, "\wr"'] \\ p'_{0*}F_p^{\flat}q'^{\flat}_0(\omega_{X'}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & p'_{0*}F_p^{\flat}q'^{\flat}_1(\omega_{X'}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & p'_{1*}F_p^{\flat}q'^{\flat}_0(\omega_{X'}) \arrow[d, "\wr"'] \\ F^{\flat}F^{\flat}q'_{0*}q'^{\flat}_0(\omega_{X'}) \arrow[r, "\sim"] & F^{\flat}F^{\flat}q'_{0*}q'^{\flat}_1(\omega_{X'}) \arrow[r, "\sim"] & F^{\flat}F^{\flat}q'_{1*}q'^{\flat}_0(\omega_{X'}) \end{tikzcd}$$

où l'isomorphisme du haut correspond à δ et celui du bas à $F^{\flat}F^{\flat}(\delta')$.

Les deux diagrammes supérieurs commutent par compatibilité des costratifications de ω_X et $\omega_{X'}$ avec l'isomorphisme $\varphi : \omega_X \cong F^{\flat}(\omega_{X'})$ (voir 1.4) et par fonctorialité des isomorphismes $p'_{0*}p'^{\flat}_1 \cong p'_{1*}p'^{\flat}_0$.

Les deux diagrammes du bas commutent par fonctorialité de l'isomorphisme (voir [Be4, 2.5.2]) :

$$\mathcal{P}^n_{X,(m+1)}(1) \cong \mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{P}^n_{X',(m)}(1) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X$$

par rapport aux costratifications et à l'isomorphisme $q_1'^{\flat}(\omega_{X'}) \cong q_0'^{\flat}(\omega_{X'})$.

1.13. — On dispose également d'un isomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-linéaire à gauche et à droite :

$$\varphi : \omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} {}^t(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}) \longrightarrow \mathcal{D}_X^{(m+1)},$$

correspondant à l'isomorphisme composé des isomorphismes canoniques :

$$\begin{aligned}\omega_X^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X}{}^t(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)}) &\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X,\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)})\\ &\xrightarrow{\sim}\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X,\omega_X)\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)}\\ &\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)}\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}_X^{(m+1)}.\end{aligned}$$

De même, on a un isomorphisme $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-linéaire à gauche et à droite :

$$\varphi' : \omega_{X'}^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}{}^t(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)})\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}.$$

Reprenons l'isomorphisme canonique, construit en 1.12, $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-bilinéaire à droite :

$$f : \omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)}\xrightarrow{\sim}F^\flat\big(F^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)})\big).$$

On en déduit un isomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-linéaire à gauche et à droite :

$$\mathrm{id}\otimes f : \omega_X^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X}{}^t(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)})\xrightarrow{\sim}\omega_X^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X}{}^t(F^\flat(F^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}))).$$

En le composant avec l'isomorphisme η défini au § 1.9, ii), on obtient un isomorphisme naturel, que l'on note h :

$$h : \omega_X^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X}{}^t(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)})\xrightarrow{\sim}F^*F^\flat\big(\omega_{X'}^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}{}^t(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)})\big).$$

Montrons que ψ et h sont compatibles avec φ et φ' :

1.13.1. Proposition. — *Avec les notations précédentes, le diagramme suivant est commutatif* :

$$\begin{array}{ccc}\omega_X^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_X}{}^t(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)}) & \xrightarrow{\ h\ } & F^*F^\flat(\omega_{X'}^{-1}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}{}^t(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}))\\ \wr\downarrow\varphi & & \wr\downarrow F^*(F^\flat(\varphi'))\\ \mathcal{D}_X^{(m+1)} & \xrightarrow{\quad\psi\quad} & F^*F^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)}.\end{array}$$

Preuve. — Cela résulte de la fonctorialité des morphismes considérés, puique :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\omega_X,\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D}_X^{(m+1)})\cong\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\big(F^\flat\omega_{X'},F^\flat(F^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}))\big),$$
$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\big(F^\flat\omega_{X'},F^\flat(F^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}))\big)\cong F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}\big(\omega_{X'},F^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)})\big),$$
$$F^*\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\omega_{X'},F^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}))\cong F^*F^\flat\,\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X'}}(\omega_{X'},\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}_{X'}^{(m)}).$$

1.14. — On déduit de φ et δ un isomorphisme $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$-linéaire à gauche et à droite

$$\alpha : \omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_X^{(m+1)},$$

correspondant à l'isomorphisme composé des isomorphismes :

$$\omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{D}_X^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\delta} \omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} {}^t(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}) \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D}_X^{(m+1)}.$$

De même, on a un isomorphisme $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$-linéaire à gauche et à droite :

$$\alpha' : \omega_{X'}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}.$$

Reprenons

$$h : \omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} {}^t(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}) \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat\big(\omega_{X'}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} {}^t(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)})\big).$$

Par composition avec $\mathrm{id}\otimes\delta$ et $F^*F^\flat(\mathrm{id}\otimes\delta')$, on obtient l'isomorphisme :

$$k : \omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat(\omega_{X'}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}).$$

On déduit de 1.12.1 et 1.13.1, la compatibilité de k, ψ, α et $F^*F^\flat(\alpha')$.

1.14.1. Proposition. — *Avec les notations précédentes, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\omega_X^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\alpha", "\wr"'] & F^*F^\flat(\omega_{X'}^{-1} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}) \arrow[d, "F^*(F^\flat(\alpha'))", "\wr"'] \\
\mathcal{D}_X^{(m+1)} \arrow[r, "\psi"] & F^*F^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)}.
\end{tikzcd}$$

1.15. — Considérons enfin, les involutions, que l'on note β et β', sur $\mathcal{D}_X^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ et $\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}$ (voir [Be4, 1.3.4.3]). Elles sont définies par :

$$\beta = (\mathrm{id}\otimes\varphi) \circ ((\mathrm{id}\otimes\delta) \otimes \mathrm{id}) \circ (\varphi^{-1} \otimes \mathrm{id}),$$

$$\beta' = (\mathrm{id}\otimes\varphi') \circ ((\mathrm{id}\otimes\delta') \otimes \mathrm{id}) \circ (\varphi'^{-1} \otimes \mathrm{id}).$$

De plus, de l'isomorphisme

$$\psi : \mathcal{D}_X^{(m+1)} \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)},$$

on déduit :

$$\psi \otimes \mathrm{id} : \mathcal{D}_X^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \xrightarrow{\sim} F^*F^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}.$$

En le composant avec l'isomorphisme η défini au § 1.9, ii) :

$$\eta : F^*F^\flat\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \xrightarrow{\sim} F^*\big(F^*(\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1})\big),$$

on obtient un isomorphisme, que l'on note ℓ. On déduit facilement de 1.12.1 et de 1.13.1 que ℓ, β et β' sont compatibles :

1.15.1. Proposition. — *Avec les notations précédentes, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}_X^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} & \xrightarrow{\ \ell\ } & F^*(F^*(\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1})) \\
{\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle F^*(F^*(\beta'))} \\
\mathcal{D}_X^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} & \xrightarrow{\ \ell\ } & F^*(F^*(\mathcal{D}_{X'}^{(m)} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1})).
\end{array}$$

1.16. Nota Bene. — Les résultats 1.12.1, 1.13.1, 1.14.1 et 1.15.1 restent valables lorsque l'on remplace $\mathcal{D}_X^{(m+1)}$ par $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}$ et $\mathcal{D}_{X'}^{(m)}$ par $\mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}$. En effet, $\mathcal{B} = F^*\mathcal{B}'$ et les morphismes correspondants sont obtenus canoniquement à partir des morphismes de départ par fonctorialité.

2. Passages à la limite.

2.1. — On suppose désormais que X et X' sont des $\mathcal{V}$-schémas formels lisses et on les notera $\mathfrak{X}$ et $\mathfrak{X}'$. On notera également par un indice i les différentes réductions modulo l'idéal $\mathfrak{a}^{i+1}$ pour $i \geq 0$, où $\mathfrak{a}$ est l'idéal maximal de $\mathcal{V}$. Soit $(\mathcal{B}'^{(m)})_{m\geq 0}$ (resp. $(\mathcal{B}^{(m)})_{m\geq 0}$) un système inductif de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}$-algèbres (resp. de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-algèbres) commutatives munies d'une structure compatible de $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^{(m)})_{m\geq 0}$-module (resp. $(\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m)})_{m\geq 0}$-module) à gauche et d'un système compatible d'isomorphismes $\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(m+1)}$-linéaires : $F^*\mathcal{B}'^{(m)} \cong \mathcal{B}^{(m+1)}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ un entier fixé. Pour simplifier et traiter parallèlement les différents cas, nous noterons à présent les faisceaux d'anneaux considérés comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}' &= \widehat{\mathcal{B}}'^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(m)}, & & \widehat{\mathcal{B}}'^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}^{(m)}, \\
&\quad \mathcal{B}'^{\dagger} \otimes^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}'}, & & \mathcal{B}'^{\dagger} \otimes^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}, \\
\mathcal{D} &= \widehat{\mathcal{B}}^{(m+1)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m+1)}, & & \widehat{\mathcal{B}}^{(m+1)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m+1)}, \\
&\quad \mathcal{B}^{\dagger} \otimes^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}, & & \mathcal{B}^{\dagger} \otimes^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}.
\end{aligned}$$

Nous disposons pour ces complétés de résultats analogues à ceux du paragraphe précédent pour les foncteurs F^* et $F^\flat$, à savoir :

2.2. Proposition (*cf.* [Be4, 4.1.3, 4.2.4]).

i) *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}'$-module à gauche. Alors $F^*\mathcal{E}$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}$-module à gauche.*

ii) *Soit $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}')$. Alors $F^*\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D})$.*

iii) *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}'$-module à droite. Alors $F^\flat\mathcal{F}$ a une structure naturelle de $\mathcal{D}$-module à droite.*

iv) *Soit* $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}'^{d})$. *Alors* $F^{\flat}\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{d})$.

2.3. PROPOSITION (*cf.* [Be4, 4.1.2, 4.2.2]). — *Il existe des isomorphismes* $\mathcal{D}$-*bilinéaires canoniques :*

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\sim} F^{*}F^{\flat}\mathcal{D}', \quad F^{\flat}(\mathcal{D}') \otimes_{\mathcal{D}} F^{*}(\mathcal{D}') \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'.$$

2.3.1. NOTA BENE. — Considérons les faisceaux d'anneaux

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} = \varprojlim_{i} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}, \quad F^{*}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} = \varprojlim_{i} F^{*}(\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}), \quad F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'} = \varprojlim_{i} F^{\flat}(\mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}).$$

Alors, par passages à la limite, $F^{*}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$ est muni d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathcal{X}}$-module à gauche et de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$-module à droite et $F^{\flat}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$ est muni d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m+1)}_{\mathcal{X}}$-module à droite et de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}$-module à gauche. De plus on a :

$$\begin{aligned}
F^{*}(\widehat{\mathcal{B}}\,'^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{i} F_i^{*}(\mathcal{B}\,'^{(m)}_{i} \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i}),\\
F^{*}(\mathcal{B}'^{\dagger} \otimes^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}'}) &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_{m} F^{*}(\widehat{\mathcal{B}}\,'^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}),\\
F^{\flat}(\widehat{\mathcal{B}}'^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{i} F_i^{\flat}(\mathcal{B}'^{(m)}_{i} \otimes_{\mathcal{O}_{X'_i}} \mathcal{D}^{(m)}_{X'_i})\\
F^{\flat}(\mathcal{B}'^{\dagger} \otimes^{\dagger}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}'}) &\xrightarrow{\sim} \varinjlim_{m} F^{\flat}(\widehat{\mathcal{B}}'^{(m)}\widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}}\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}'}).
\end{aligned}$$

Ainsi, par passage à la limite, $F^{\flat}(\mathcal{D}')$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}$-module à droite et de $\mathcal{D}'$-module à gauche et $F^{*}(\mathcal{D}')$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}$-module à gauche et de $\mathcal{D}'$-module à droite.

2.3.2. — Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}'$-module à gauche, alors $F^{*}\mathcal{E}$ est canoniquement isomorphe à $F^{*}(\mathcal{D}') \otimes_{\mathcal{D}'} \mathcal{E}$, et si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{D}'$-module à droite, alors $F^{\flat}\mathcal{F}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{D}'} F^{\flat}(\mathcal{D}')$.

2.4. PROPOSITION (*cf.* [Be4, 4.1.3, 4.2.4]). — *Le foncteur* F^{*} (*resp.* $F^{\flat}$) *induit une équivalence entre la catégorie des* $\mathcal{D}'$*-modules à gauche* (*resp. à droite*) *et celle des* $\mathcal{D}$*-modules à gauche* (*resp. à droite*).

On en déduit comme en 1.8 :

2.4.1. COROLLAIRE. — *Le foncteur* F^{*} (*resp.* $F^{\flat}$) *induit une équivalence entre la catégorie* $D_{\mathrm{parf}}({}^{g}\mathcal{D}')$ (*resp.* $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}'^{d})$) *et la catégorie* $D_{\mathrm{parf}}({}^{g}\mathcal{D})$ (*resp.* $D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^{d})$).

2.5. Nota Bene. — Par passage à la limite sur les isomorphismes $\mathcal{D}_{X_i}^{(m+1)}$-linéaires à droite $\varphi_i : \omega_{X_i} \cong F_i^\flat \omega_{X_i'}$, on obtient un isomorphisme naturel de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}$-modules à droite (resp. $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^\dagger$-modules à droite) $\varphi : \omega_{\mathcal{X}} \cong F^\flat \omega_{\mathcal{X}'}$.

2.6. Proposition. — *Soient $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}'$-module à gauche et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{D}'$-module à droite. Il existe des isomorphismes canoniques $\mathcal{D}$-linéaires :*

i) $\eta_{\mathcal{E}} : F^\flat(\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} F^*\mathcal{E}$,

ii) $\eta_{\mathcal{F}} : F^\flat\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \omega_{\mathcal{X}}^{-1} \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \omega_{\mathcal{X}'}^{-1})$.

Preuve. — i) Considérons le cas

$$\mathcal{D}' = \widehat{\mathcal{B}}'^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}'}^{(m)}, \quad \mathcal{D} = \widehat{\mathcal{B}}^{(m+1)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(m+1)}.$$

La donnée d'une structure de $\mathcal{D}$-module à gauche ou à droite n'étant plus équivalente à celle d'une PD-stratification, on ne peut pas utiliser les mêmes méthodes qu'en 1.9.

De plus, $\mathcal{E}$ n'étant pas supposé cohérent, on ne peut vérifier l'énoncé modulo $\mathfrak{a}^{i+1}$ et passer à la limite.

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}'$-module à gauche. On construit de la même façon que dans le cas algébrique, grâce à $\varphi : F^\flat\omega_{\mathcal{X}'} \cong \omega_{\mathcal{X}}$ (voir 2.5), un isomorphisme $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-linéaire :

$$\eta_{\mathcal{E}} : F^\flat(\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{E}) \cong F^\flat\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} F^*\mathcal{E} \cong \omega_{\mathcal{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} F^*\mathcal{E}.$$

Il reste donc à vérifier que $\eta_{\mathcal{E}}$ est $\mathcal{D}$-linéaire.

On considère d'abord le cas où $\mathcal{E} = \mathcal{D}'$. Modulo l'idéal $\mathfrak{a}^{i+1}$, l'isomorphisme étant $\mathcal{B}_i^{(m+1)} \otimes_{\mathcal{O}_{X_i}} \mathcal{D}_{X_i}^{(m+1)}$-linéaire à droite, pour tout $i \geq 0$, par passage à la limite $\eta_{\mathcal{D}'}$ est $\mathcal{D}$-linéaire à droite.

Reprenons $\mathcal{E}$ quelconque. On dispose d'un isomorphisme canonique de $\mathcal{D}$-modules à droite (voir 2.3.2) :

$$F^\flat(\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} (\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{D}'} F^\flat(\mathcal{D}').$$

Grâce à l'isomorphisme θ' du chapitre I, § 2.2, i), on sait que le terme de droite est naturellement isomorphe au $\mathcal{D}$-module à gauche $(\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} F^\flat(\mathcal{D}')) \otimes_{\mathcal{D}'} \mathcal{E}$. De plus, on a un isomorphisme $\mathcal{D}$-linéaire à droite et $\mathcal{D}'$-linéaire à droite canonique :

$$\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} F^\flat(\mathcal{D}') \xrightarrow{\sim} F^\flat(\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{D}'),$$

où $F^\flat$ est pris pour la structure naturelle de $\mathcal{D}'$-module à droite de $\mathcal{D}'$. En utilisant l'involution de passage à l'opérateur adjoint $\delta_{\mathcal{D}'}$, définie au chapitre I, § 5.1, on obtient un isomorphisme $\mathcal{D}$-linéaire à droite :

$$F^\flat(\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{D}') \otimes_{\mathcal{D}'} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^\flat(\omega_{\mathcal{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}'}} \mathcal{D}') \otimes_{\mathcal{D}'} \mathcal{E},$$

où, pour le terme de droite, $F^\flat$ est pris pour la structure droite tordue et où le produit tensoriel agit par la multiplication à droite sur $\mathcal{D}'$. Ainsi via l'isomorphisme $\eta_{\mathcal{D}'}$ construit précédemment, le terme de droite est isomorphe à $(\omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} F^*\mathcal{D}') \otimes_{\mathcal{D}'} \mathcal{E}$.

Enfin, en utilisant l'isomorphisme naturel $F^*\mathcal{D}' \otimes_{\mathcal{D}'} \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathcal{E}$ défini en 2.3.2, on obtient par composition un isomorphisme $\mathcal{D}$-linéaire à droite :

$$\eta_{\mathcal{E}} : F^\flat(\omega_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} F^*\mathcal{E},$$

dont on vérifie facilement qu'il coïncide avec $\eta_{\mathcal{E}}$. On conclut ainsi que $\eta_{\mathcal{E}}$ est $\mathcal{D}$-linéaire à droite.

Le cas des autres anneaux considérés pour $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ se traite de façon identique.

ii) On déduit $\eta_{\mathcal{F}}$ comme en 1.9 de $\eta_{\mathcal{E}}$ en prenant $\mathcal{E} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \omega_{\mathfrak{X}'}^{-1}$.

Enfin, les foncteurs considérés étants exacts, on en déduit les corollaires suivants :

2.7. Corollaire. — *Soient $\mathcal{E} \in D_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}')$ et $\mathcal{F} \in D_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}'^d)$. Il existe des isomorphismes $\mathcal{D}$-linéaires canoniques :*

i) $\eta_{\mathcal{E}} : F^\flat(\omega_{\mathfrak{X}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \omega_{\mathfrak{X}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} F^*\mathcal{E}$,

ii) $\eta_{\mathcal{F}} : F^\flat\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \omega_{\mathfrak{X}}^{-1} \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \omega_{\mathfrak{X}'}^{-1})$.

2.8. — On dispose donc dans le cas formel et pour les faisceaux d'anneaux complétés $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}$ des résultats identiques au cas général pour des faisceaux d'anneaux non complétés. On peut montrer également que les diagrammes 1.12.1, 1.13.1, 1.14.1 et 1.15.1 existent encore pour les complétés et sont commutatifs. Il suffit pour cela de passer à la limite sur les diagrammes obtenus par réduction.

3. Commutation des foncteurs D et D' à F^* et $F^\flat$.

3.1. — Revenons à la situation générale de ce chapitre et reprenons les hypothèses 1.5 dans le cas algébrique et 2.1 dans le cas formel. On supposera également, pour pouvoir utiliser le foncteur de dualité du chapitre I, § 3.1, que $\mathcal{B}'$ est une $\mathcal{O}_{X'}$-algèbre plate sur $\mathcal{O}_S$ ou que $\mathcal{B}'^{(m)}$ est une $\mathcal{V}$-algèbre plate, selon les cas. Puisque l'on dispose de résultats analogues dans le cas algébrique et dans le cas formel 2.8, on ne les distinguera que lorsque cela sera nécessaire.

On notera donc $\mathcal{D}'$ l'un quelconque des faisceaux d'anneaux d'opérateurs différentiels sur X' ou $\mathfrak{X}'$ et $\mathcal{D}$ sur X ou $\mathfrak{X}$, à savoir :

$$\mathcal{D}' = \mathcal{B}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}_{X'}^{(m)}, \quad \widehat{\mathcal{B}}'^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}'}^{(m)}, \quad \widehat{\mathcal{B}}'^{(m)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}^{(m)},$$
$$\mathcal{B}'^\dagger \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}^\dagger \mathcal{D}_{\mathfrak{X}'}^\dagger, \quad \mathcal{B}'^\dagger \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}'}}^\dagger \mathcal{D}_{\mathfrak{X}',\mathbb{Q}}^\dagger,$$

$$\mathcal{D} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X^{(m+1)}, \quad \widehat{\mathcal{B}}^{(m+1)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(m+1)}, \quad \widehat{\mathcal{B}}^{(m+1)} \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(m+1)},$$
$$\mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X}}, \qquad \mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}.$$

3.2. THÉORÈME. — *Sous les hypothèses* 3.1, *on a :*

i) *Soit* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}')$. *Il existe un isomorphisme canonique dans* $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D})$

$$\rho : \mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} F^*\mathbb{D}(\mathcal{E}).$$

ii) *Soit* $\mathcal{F} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}'^d)$. *Il existe un isomorphisme canonique dans* $D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}^d)$

$$\rho' : \mathbb{D}'(F^\flat\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} F^\flat\mathbb{D}'(\mathcal{F}).$$

Preuve. — i) Par définition,

$$\mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}\big(F^*\mathcal{E}, \mathcal{D}[d_X]\big) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}.$$

Or $\mathcal{D} \cong F^*F^\flat(\mathcal{D}')$ et F^* est une équivalence de catégories. Donc on a un isomorphisme $\mathcal{D}$-linéaire :

$$\mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}\big(\mathcal{E}, F^\flat\mathcal{D}'[d_X]\big) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}.$$

En outre $F^\flat\mathcal{D}' \cong \mathcal{D}' \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{O}_X^\vee$. On déduit alors du chapitre I, § 1.2.2, l'isomorphisme $\mathcal{D}$-linéaire à droite :

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}\big(\mathcal{E}, F^\flat\mathcal{D}'[d_X]\big) \xrightarrow{\sim} F^\flat\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}\big(\mathcal{E}, \mathcal{D}'[d_X]\big),$$

et donc l'isomorphisme :

$$\mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} F^\flat\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}\big(\mathcal{E}, \mathcal{D}'[d_X]\big) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}.$$

On conclut grâce à l'isomorphisme $\eta_{\mathcal{F}}$ pour $\mathcal{F} = \mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}'[d_X])$, (voir 1.11 ou 2.7).

ii) On construit l'isomorphisme ρ', pour les modules à droites, de façon totalement symétrique.

On dispose donc de la commutation du foncteur de dualité aux images inverses par le morphisme de Frobenius, à la fois pour les modules à gauche et pour les modules à droite. Il s'agit maintenant de s'assurer que ces isomorphismes ρ et ρ' sont compatibles aux passages de gauche à droite dans le dual (chap. I, § 3.5).

Conservons les notations précédentes.

3.3. Théorème. — *Sous les hypothèses et notations de* 3.1, *on a :*

i) *Soit* $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}')$. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\rho"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathbb{D}(\mathcal{E}) \arrow[r, "\eta^{-1}"] & F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathbb{D}(\mathcal{E})) \arrow[d, "F^\flat(\alpha^{-1})"] \\
\mathbb{D}'(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}) \arrow[r, "\mathbb{D}'(\eta)"] & \mathbb{D}'(F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E})) \arrow[r, "\rho'"] & F^\flat(\mathbb{D}'(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E})).
\end{tikzcd}$$

ii) *Soit* $\mathcal{F} \in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}'^d)$. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}'(F^\flat\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \arrow[r, "\rho'\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha'^{-1}"'] & F^\flat\mathbb{D}'(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1} \arrow[r, "\eta"] & F^*(\mathbb{D}'(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}) \arrow[d, "F^*(\alpha'^{-1})"] \\
\mathbb{D}(F^\flat\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}) \arrow[r, "\mathbb{D}(\eta^{-1})"] & \mathbb{D}(F^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1})) \arrow[r, "\rho"] & F^*(\mathbb{D}(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1})).
\end{tikzcd}$$

Preuve. — Je ne donnerai ici que les idées essentielles de la démonstration afin de ne pas alourdir par des diagrammes très encombrants la rédaction de cet article. De plus je ne considèrerai que le cas i), le cas ii) étant totalement symétrique.

Soit $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}')$. Considérons le premier morphisme :

$$F^\flat(\alpha_{\mathcal{E}}^{-1}) \circ \eta^{-1}_{\mathbb{D}(\mathcal{E})} \circ (\mathrm{id}\otimes\rho_{\mathcal{E}}) : \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} F^\flat\big(\mathbb{D}'(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E})\big).$$

Notons pour simplifier $\mathcal{D} = \mathcal{D}[d_X]$ et $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'[d_X]$. Grâce au chapitre I, § 2.1, on a :

$$\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}}(F^*\mathcal{E}, \mathcal{D}),$$
$$F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathbb{D}(\mathcal{E})) \xrightarrow{\sim} F^\flat\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}'}(\mathcal{E}, \mathcal{D}').$$

D'autre part, par définition :

$$F^\flat\big(\mathbb{D}'(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E})\big) = F^\flat\big(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}, \mathcal{D}')\big),$$
$$\mathbb{D}'\big(F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E})\big) = \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}), \mathcal{D}\big).$$

On vérifie facilement que par construction et via I, § 2.1, $\eta^{-1} \circ (\mathrm{id}\otimes\rho)$ correspond au morphisme canonique :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}}(F^*\mathcal{E}, \mathcal{D}) &\xrightarrow{\psi} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}}\big(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat(\mathcal{D}')\big) \\
&\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}'}\big(\mathcal{E}, F^\flat(\mathcal{D}')\big) \xrightarrow{\sim} F^\flat\, \mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}'}(\mathcal{E}, \mathcal{D}').
\end{aligned}$$

De même, $F^\flat(\alpha^{-1})$ correspond au morphisme canonique :

$$\begin{aligned}F^\flat\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E},\mathcal{D}') &\xrightarrow{\sim} F^\flat\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}\big(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E},{}^t(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}')\big)\\ &\xrightarrow{F^\flat(\delta')} F^\flat\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E},\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{D}')\\ &\xrightarrow{\sim} F^\flat\big(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E},\mathcal{D}')\big).\end{aligned}$$

Notons u le morphisme composé :

$$u:\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E},\mathcal{D})\xrightarrow{\sim} F^\flat\big(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E},\mathcal{D}')\big).$$

Considérons ensuite le second morphisme :

$$\rho'_{\omega\otimes\mathcal{E}}\circ\mathbb{D}'(\eta_{\mathcal{E}})\circ\alpha^{-1}_{F^*\mathcal{E}}:\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{D}(F^*\mathcal{E})\xrightarrow{\sim} F^\flat\big(\mathbb{D}'(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E})\big).$$

Alors, toujours par construction et via I, § 2.1, $\mathbb{D}'(\eta)\circ\alpha^{-1}$ correspond au morphisme canonique :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E},\mathcal{D}) &\xrightarrow{\sim}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}F^*\mathcal{E},{}^t(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D})\big)\\ &\xrightarrow{\beta}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}F^*\mathcal{E},\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{D})\\ &\xrightarrow{\sim}\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}F^*\mathcal{E},\mathcal{D}\big)\\ &\xrightarrow{\eta^{-1}}\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(F^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E}),\mathcal{D}\big).\end{aligned}$$

De même, ρ' correspond au morphisme canonique :

$$\begin{aligned}&\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}(F^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E}),\mathcal{D})\\ &\qquad\xrightarrow{\psi}\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(F^\flat(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E}),F^\flat F^*(\mathcal{D}')\big)\\ &\qquad\xrightarrow{\sim}\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}\big(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E},F^*(\mathcal{D}')\big)\\ &\qquad\xrightarrow{\sim}\omega_X\otimes_{\mathcal{O}_X}F^*\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E},\mathcal{D}')\\ &\qquad\xrightarrow{\eta^{-1}}F^\flat\big(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E},\mathcal{D}')\big).\end{aligned}$$

Notons v le morphisme composé :

$$v:\mathbb{R}\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E},\mathcal{D})\xrightarrow{\sim} F^\flat\big(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}(\omega_{X'}\otimes_{\mathcal{O}_{X'}}\mathcal{E},\mathcal{D}')\big).$$

On veut donc montrer que $u=v$.

Reprenons l'isomorphisme f défini en 1.12, 1.16 et 2.8. On obtient après décalage un isomorphisme canonique que l'on note encore f :

$$f : \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} F^\flat\big(F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}')\big).$$

Notons w l'isomorphisme canonique composé :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D})\\
&\quad \xrightarrow{\eta} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}), \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}\big)\\
&\quad \xrightarrow{f} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(F^\flat(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}), F^\flat_d(F^\flat_g(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}'))\big)\\
&\quad \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}\big(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}, F^\flat_g(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}')\big)\\
&\quad \xrightarrow{\sim} F^\flat\big(\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}, \omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{D}')\big)\\
&\quad \xrightarrow{\sim} F^\flat\big(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}, \mathcal{D}')\big).
\end{aligned}$$

Alors, grâce à la proposition 1.12.1, à 1.16 et 2.8, et par fonctorialité, on vérifie que le morphisme u est égal au morphisme composé, noté u' :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}}(F^*\mathcal{E}, \mathcal{D}) &\xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D})\\
&\xrightarrow{\delta} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}(\omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} F^*\mathcal{E}, \omega_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D})\\
&\xrightarrow{w} F^\flat\big(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}(\omega_{X'} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \mathcal{E}, \mathcal{D}')\big).
\end{aligned}$$

Il reste donc à s'assurer que $u' = v$. Or, par définition, on a $f = \eta^{-1} \circ (\mathrm{id} \otimes \psi)$. Le résultat se déduit alors par fonctorialité.

3.4. — On a donc établi la compatibilité des foncteurs $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ à F^* et $F^\flat$ et au passage de gauche à droite ; on aura également besoin de s'assurer que les morphismes de bidualité (chap. I, § 3.6) sont eux-même compatibles aux foncteurs F^* et $F^\flat$. Précisons ce qu'il s'agit de vérifier.

Soit $\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}')$. On sait, d'après 1.8.1 et 2.2, que $F^*\mathcal{E} \in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D})$. On dispose donc de deux isomorphismes de bidualité :

$$\iota^m : \mathcal{E} \cong \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{D}^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}'),$$

$$\iota^{m+1} : F^*\mathcal{E} \cong \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) \quad \text{dans} \quad \mathbb{D}^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}).$$

Par fonctorialité, on déduit de ι^m un isomorphisme $F^*\iota^m$ dans $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D})$:

$$F^*\iota^m : F^*\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} F^*\mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}).$$

On peut alors utiliser le théorème 3.2 à deux reprises pour obtenir le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} F^*\mathcal{E} & \xrightarrow{\iota^{m+1}} & \mathbb{D}\circ\mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) \\ {\scriptstyle F^*\iota^m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}(\rho^m)^{-1}} \\ F^*\mathbb{D}\circ\mathbb{D}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{(\rho^{m+1})^{-1}} & \mathbb{D}(F^*\mathbb{D}(\mathcal{E})). \end{array}$$

On aura donc la compatibilité voulue lorsque l'on aura vérifié que ce diagramme commute, c'est-à-dire $\rho^{m+1}\circ\mathbb{D}(\rho^m)^{-1}\circ\iota^{m+1} = F^*\iota^m$.

De même, si $\mathcal{F}\in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}'^d)$, on a un diagramme naturel :

$$\begin{array}{ccc} F^\flat\mathcal{F} & \xrightarrow{\iota'^{m+1}} & \mathbb{D}'\circ\mathbb{D}'(F^\flat\mathcal{F}) \\ {\scriptstyle F^\flat\iota'^m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}'(\rho'^m)^{-1}} \\ F^\flat\mathbb{D}'\circ\mathbb{D}'(\mathcal{F}) & \xrightarrow{(\rho'^{m+1})^{-1}} & \mathbb{D}'(F^\flat\mathbb{D}'(\mathcal{F})) \end{array}$$

et on veut $\rho'^{m+1}\circ\mathbb{D}'(\rho'^m)^{-1}\circ\iota'^{m+1} = F^\flat\iota'^m$.

3.5. Théorème. — *Sous les hypothèses* 3.1 *et avec les notations de* 3.4, *on a :*

i) *Soit* $\mathcal{E}\in D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}')$. *Alors l'isomorphisme* $\iota^m : \mathcal{E}\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}\circ\mathbb{D}(\mathcal{E})$ *de bidualité est compatible à* F^*.

ii) *Soit* $\mathcal{F}\in D^b_{\mathrm{parf}}(\mathcal{D}'^d)$. *Alors l'isomorphisme* $\iota^{m'} : \mathcal{F}\xrightarrow{\sim}\mathbb{D}'\circ\mathbb{D}'(\mathcal{F})$ *de bidualité est compatible à* $F^\flat$.

Preuve. — i) Il s'agit donc de s'assurer que le diagramme ci-dessus est commutatif. Conservons les notations précédentes.

Soit $\mathcal{I}$ une résolution droite de $\mathcal{D}'$ par des $\mathcal{D}'\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{D}'^0$-modules injectifs (chap. I, § 3.4). Comme F^* et $F^\flat$ sont des équivalences de catégories, $F^*F^\flat\mathcal{I}$ est une résolution droite de $F^*F^\flat\mathcal{D}'$ par des $\mathcal{D}$-bimodules injectifs. Or $F^*F^\flat\mathcal{D}'$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{D}$. Donc $F^*F^\flat\mathcal{I}$ est une résolution droite de $\mathcal{D}$ par des $\mathcal{D}\otimes_{\mathcal{O}_S}\mathcal{D}^0$-modules injectifs.

Reprenons la construction des morphismes de bidualité pour $F^*\mathcal{E}$ et pour $\mathcal{E}$ (chap. I, § 3.6). Il s'agit d'abord des morphimes $\mathcal{O}_X$-linéaires naturels d'évaluation :

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}^{m+1} : F^*\mathcal{E} &\longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat\mathcal{I}), F^*F^\flat\mathcal{I}\big), \\ 1\otimes e &\longmapsto \mathrm{eval}(1\otimes e). \end{aligned}$$

Par fonctorialité :

$$\begin{aligned} F^*\,\mathrm{ev}^m : F^*\mathcal{E} &\longrightarrow F^*\,\mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E},\mathcal{I}),\mathcal{I}\big) \\ 1\otimes e &\longmapsto 1\otimes\mathrm{eval}(e). \end{aligned}$$

Rappelons que l'isomorphisme de bidualité ι^{m+1} est défini en I, § 3.6 comme le morphisme composé de ev^{m+1} et des morphismes canoniques :

$$\begin{aligned}
\theta^{m+1} : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat\mathcal{I}), F^*F^\flat\mathcal{I}\big) \\
\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, {}^t(F^*F^\flat\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1})\big), \\
\beta : \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, {}^t(F^*F^\flat\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1})\big) \\
\longrightarrow \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, F^*F^\flat\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}\big) \\
\cong \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(F^*\mathcal{E}),
\end{aligned}$$

où β correspond au quasi-isomorphisme sur $F^*F^\flat\mathcal{I}\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega_X^{-1}$ défini par l'involution β qui échange les structures gauches sur $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$.

On vérifie d'abord sans difficulté — par des calculs directs — que les deux morphismes d'évaluation coïncident. C'est-à-dire que

$$f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_0 \circ \mathrm{ev}^{m+1} = F^* \mathrm{ev}^m,$$

où f_0, f_1, f_2 et f_3 sont définis naturellement par

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat\mathcal{I}), F^*F^\flat\mathcal{I}\big) \\
&\quad \xrightarrow[\sim]{f_0} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, F^\flat\mathcal{I}), F^*F^\flat\mathcal{I}\big) \\
&\quad \xrightarrow[\sim]{f_1} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^d}\big(F^\flat\, \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}), F^*F^\flat\mathcal{I}\big) \\
&\quad \xrightarrow[\sim]{f_2} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}), F^*\mathcal{I}\big) \\
&\quad \xrightarrow[\sim]{f_3} F^*\, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}'^d}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}), \mathcal{I}\big).
\end{aligned}$$

On vérifie ensuite, par fonctorialité et puisque $F^*, F^\flat$ et $- \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ sont des équivalences de catégories, que, si l'on note :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, F^*F^\flat\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}\big) \\
&\quad \xrightarrow[\sim]{g_0} \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, F^\flat\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, F^*F^\flat\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}\big) \\
&\quad \xrightarrow[\sim]{g_1} \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}\big(F^\flat\, \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, F^*F^\flat\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}\big) \\
&\quad \xrightarrow[\sim]{g_2} \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}}}\big(F^*(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}), F^*(F^*\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1})\big) \\
&\quad \xrightarrow[\sim]{g_3} \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}, F^*\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}\big) \\
&\quad \xrightarrow[\sim]{g_4} F^*\, \mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}\big(\mathcal{H}om_{g_{\mathcal{D}'}}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}\big),
\end{aligned}$$

alors $F^*\theta^m \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_0 = g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g_0 \circ \theta^{m+1}$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} F^*\theta^m \circ F^* \mathrm{ev}^m &= F^*\theta^m \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 \circ f_0 \circ \mathrm{ev}^{m+1} \\ &= g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g_0 \circ \theta^{m+1} \circ \mathrm{ev}^{m+1}. \end{aligned}$$

Remarquons que toutes les structures gauches utilisées pour le foncteur $\mathcal{H}om$ sur$F^*F^\flat \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$, $F^*(F^*\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1})$ et $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}$ sont les structures tordues.

Si on utilise alors les quasi-isomorphismes β sur $F^*F^\flat \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ et β' sur $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} \beta : \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}}\big(&\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}}(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, {}^t(F^*F^\flat\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1})\big) \\ &\longrightarrow \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}}\big(\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}}(F^*\mathcal{E}, F^*F^\flat\mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}, F^*F^\flat\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}\big) \\ &= \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(F^*\mathcal{E}), \\ F^*(\beta') : F^*\, \mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}'}\big(&\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}'}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}, {}^t(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1})\big) \\ &\longrightarrow F^*\big(\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}'}(\mathcal{H}om_{{}^g\mathcal{D}'}(\mathcal{E}, \mathcal{I}) \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_{X'}} \omega_{X'}^{-1}\big) \\ &= F^*\mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Il reste alors à vérifier que

$$\rho^{m+1} \circ \mathbb{D}(\rho^m)^{-1} \circ \beta = F^*(\beta') \circ g_4 \circ g_3 \circ g_2 \circ g_1 \circ g_0.$$

Ce dernier résultat est une conséquence directe de la proposition 1.15.1, de 1.16 et 2.8.

ii) Le cas des modules à droite se déduit sans difficulté du cas i) et des théorèmes 3.7 et 3.3 du chapitre I.

Nota Bene. — On en déduira dans le chapitre suivant que la suite spectrale de bidualité est elle-même compatible au Frobenius.

3.6. — Supposons que l'on dispose d'un morphisme σ sur $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} \mathcal{V}$ relevant le morphisme de Frobenius sur $S = \operatorname{Spec} k$ et que $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{S},\sigma} \mathcal{S}$, l'image inverse de $\mathcal{X}$ par σ. On note encore F le composé de F et de la projection canonique de $\mathcal{X}'$ sur $\mathcal{X}$. On pose

$$\mathcal{D} = \mathcal{B}^\dagger \otimes^\dagger_{\mathcal{O}_\mathcal{X}} \mathcal{D}^\dagger_\mathcal{X}, \quad \mathcal{D}_\mathbb{Q} = \mathcal{D} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}.$$

Soit $\mathcal{E}$ un F-$\mathcal{D}_\mathbb{Q}$-complexe, *i.e.* un objet de $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}_\mathbb{Q})$ muni d'un isomorphisme $\mathcal{D}$-linéaire à gauche $\mathcal{E} \cong F^*\mathcal{E}$. D'après 3.2 et par fonctorialité, $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est aussi muni d'un tel isomorphisme $F^*\mathbb{D}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{D}(\mathcal{E})$. On déduit de 3.5 que l'isomorphisme de bidualité pour $\mathcal{E}$ est compatible à sa structure de F-$\mathcal{D}_\mathbb{Q}$-complexe.

III. Caractérisations homologiques et F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes

Soit k un corps parfait de caractéristique $p > 0$. On suppose que $\mathcal{V} = W(k)$ et $\mathcal{S} = \operatorname{Spf} \mathcal{V}$. Soient $\mathfrak{X}$ un $\mathcal{S}$-schéma formel lisse et $\mathfrak{X}' = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}$ son image inverse par le morphisme de Frobenius sur $\mathcal{S}$. On suppose de plus qu'il existe un $\mathcal{S}$-morphisme $F : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}'$ relevant le Frobenius relatif de $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{S}} S$ sur S, où $S = \operatorname{Spec} k$. On notera toujours F le composé de F et de la projection de $\mathfrak{X}'$ sur $\mathfrak{X}$.

On s'intéresse dans ce chapitre à la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. On montrera qu'ils sont, comme en caractéristiques nulle, de dimension cohomologique majorée par la dimension de $\mathfrak{X}$ et qu'on peut les munir canoniquement d'une filtration par la codimension de leurs sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents. On donnera également une caractérisation homologique des modules holonomes et on en déduira une définition du dual. L'idée essentielle consiste à se ramener à l'étude des $\mathcal{D}^{(0)}_X$-modules grâce aux commutations montrées aux chapitres précédents et à utiliser ensuite les résultats et méthodes de Malgrange [Mal].

1. Dimension des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

Il s'agit d'abord de se donner une bonne définition de la dimension pour un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Rappelons quelques résultats (voir [Be4]).

- Un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche est la donnée d'un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche $\mathcal{E}$ et d'un isomorphisme $\varphi : \mathcal{E} \cong F^*\mathcal{E}$, $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire.

- Un morphisme de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à gauche $u : (\mathcal{E}, \varphi) \to (\mathcal{F}, \theta)$ est morphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $u : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ tel que $\theta \circ u = F^*(u) \circ \varphi$.

- On dit qu'un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module $(\mathcal{E}, \varphi)$ est cohérent si $\mathcal{E}$ est cohérent en tant que $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module. On note $F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}({}^g\mathfrak{X})$ la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à gauche cohérents, (voir [Be4, 4.5.1]).

1.1. Proposition (*cf.* [Be4, 4.5.4]). — *La catégorie $F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}({}^g\mathfrak{X})$ est équivalente à celle des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents $\mathcal{E}^{(0)}$ munis d'un isomorphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\varphi^{(0)} : \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)} \cong F^*\mathcal{E}^{(0)}$, que l'on note $F\mathcal{D}^{(0)}_{\mathrm{coh}}({}^g\mathfrak{X})$.*

1.1.1. — De plus, si $(\mathcal{E}, \varphi)$ et $(\mathcal{E}^{(0)}, \varphi^{(0)})$ se correspondent par cette équivalence, on dispose d'un isomorphisme naturel de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à gauche $\mathcal{E} \cong \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}$ et φ est l'isomorphisme obtenu en composant cet isomorphisme par $\mathrm{id} \otimes \varphi^{(0)}$:

$$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} (\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} F^*\mathcal{E}^{(0)}$$

et l'isomorphisme $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-linéaire

$$\eta : \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} F^{*}\mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{\ \sim\ } F^{*}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}),$$

défini à partir du morphisme $\mathcal{E}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}$ par fonctorialité de F^{*} et extension des scalaires, (voir [Be4, 4.5.2]).

Pour définir la dimension du F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$, on a besoin d'une notion de variété caractéristique. On peut grâce à l'équivalence précédente associer à $\mathcal{E}$ un $\mathcal{D}^{(0)}_{X}$-module cohérent pour lequel on utilise la définition usuelle de variété caractéristique.

De façon générale, soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}}$-module à gauche cohérent. On définit la *variété caractéristique* de $\mathcal{M}$ comme étant celle du $\mathcal{D}^{(0)}_{X}$-module $\mathcal{M}/p\mathcal{M}$, on la note $\mathrm{Car}(\mathcal{M})$.

Si maintenant $\mathcal{E}^{(0)}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, il existe un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}}$-module cohérent $\mathcal{M}$ sans p-torsion, tel que $\mathcal{E}^{(0)} \cong \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (voir [Be3, 3.4.5]). On définit alors la variété caractéristique de $\mathcal{E}^{(0)}$ par $\mathrm{Car}(\mathcal{E}^{(0)}) = \mathrm{Car}(\mathcal{M})$. Notons que $\mathrm{Car}(\mathcal{E}^{(0)})$ est indépendante du choix de $\mathcal{M}$ [Be6].

Soient enfin $(\mathcal{E}, \varphi) \in F\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathrm{coh}}({}^{g}\mathcal{X})$ et $(\mathcal{E}^{(0)}, \varphi(0)) \in F\mathcal{D}^{(0)}_{\mathrm{coh}}({}^{g}\mathcal{X})$ comme précédemment. On définit la variété caractérististique de $\mathcal{E}$ par $\mathrm{Car}(\mathcal{E}) = \mathrm{Car}(\mathcal{E}^{(0)})$.

1.2. Définition. — *Soit $(\mathcal{E}, \varphi) \in F\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathrm{coh}}({}^{g}\mathcal{X})$ (resp. $\mathcal{E}^{(0)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, resp. un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}}$-module cohérent, resp. un $\mathcal{D}^{(0)}_{X}$-module cohérent). On définit la dimension et la codimension de $\mathcal{E}$ (resp. de $\mathcal{E}^{(0)}$) comme étant celles de sa variété caractéristique dans le fibré cotangent T^{*}_{X}.*

On dispose alors de l'inégalité de Bernstein pour les F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents :

1.3. Proposition (*cf.* [Be6]). — *Soit $(\mathcal{E}, \varphi) \in F\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathrm{coh}}({}^{g}\mathcal{X})$. Alors, si $\mathcal{E} \neq 0$, on a*

$$\dim(\mathcal{E}) \geq \dim(\mathcal{X}).$$

1.3.1. — Par définition, on a :

$$\mathrm{codim}(\mathcal{E}) = 2\dim(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{E}).$$

Donc l'inégalité de Bernstein pour les F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents s'exprime de façon équivalente sous la forme :

$$\text{si } \mathcal{E} \neq 0, \text{ alors } \mathrm{codim}(\mathcal{E}) \leq \dim(\mathcal{X}).$$

1.3.2. — Cette inégalité n'est plus vraie pour $\mathcal{D}_X^{(0)}$. En effet, soient k un corps de caractéristique $p > 0$, $S = \operatorname{Spec} k$ et $X = \operatorname{Spec} k[t]$. Le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X/(t^p)$ est muni d'une structure de $\mathcal{D}_X^{(0)}$-module définie par la connexion $\mathcal{M} \to \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$, obtenue par passage au quotient de l'application composée de la dérivation $d : k[t] \to \Omega_X^1$ et de $\varphi : \Omega_X^1 \longrightarrow \Omega_X^1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$, avec $\varphi(\omega) = \omega \otimes 1$.

On définit une bonne filtration sur $\mathcal{M}$ en posant $F_p\mathcal{M} = 0$ si $p < 0$, et $F_p\mathcal{M} = \mathcal{M}$ si $p \geq 0$. Le gradué $\operatorname{gr}\mathcal{M}$ est alors isomorphe à $\mathcal{M}$ placé en degré 0. On a $\operatorname{gr}\mathcal{D}_X^{(0)} = k[t,\delta]$, où δ est l'image de la dérivation $\partial = \partial/\partial t$, et l'annulateur de $\operatorname{gr}\mathcal{M}$ est l'idéal de $k[t,\delta]$ engendré par t^p et δ. Donc le support de $\operatorname{gr}\mathcal{M}$ est réduit à un point et $\dim(\mathcal{M}) = \dim(\operatorname{gr}\mathcal{M}) = 0$, alors que $\dim X = 1$. Ainsi, dans ce cas, l'inégalité de Bernstein n'est plus vérifiée.

On veut, dans la suite de ce chapitre, étudier les faisceaux de cohomologie du dual d'un F-$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module cohérent et en particulier holonome. Vérifions donc d'abord que la notion de F-$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module cohérent se comporte bien par dualité.

1.4. Proposition. — *Soit $(\mathcal{E},\varphi) \in F\mathcal{D}_{\mathrm{coh}}^{\dagger}({}^g\mathfrak{X})$. Alors, pour tout $i \geq 0$,*

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$$

est naturellement muni d'une structure de F-$\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-module à gauche cohérent. De plus, le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(0)}$-module cohérent correspondant est

$$\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0)},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},$$

si $\mathcal{E}^{(0)}$ est le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{(0)}$-module correspondant à $\mathcal{E}$.

Preuve. — Posons

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}.$$

Alors $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{i-d_{\mathfrak{X}}}(\mathbb{D}(\mathcal{E}))$. Remarquons que, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$ étant de dimension cohomologique finie (chap. 0, § 4.3), les catégories $D^b_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ et $D^b_{\mathrm{parf}}({}^g\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ coïncident (voir [IL1, 3.5, 3.6, 5.10]). On peut donc utiliser les résultats des chapitres précédents.

On a vu au chapitre II, § 3.6 que $\mathbb{D}(\mathcal{E})$ est muni d'un isomorphisme $F^*\mathbb{D}(\mathcal{E}) \cong \mathbb{D}(\mathcal{E})$, $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}^{\dagger}$-linéaire, induit par $\varphi : \mathcal{E} \cong F^*\mathcal{E}$, donc

$$\mathcal{H}^{i-d_{\mathfrak{X}}}\big(F^*\mathbb{D}(\mathcal{E})\big) \cong \mathcal{H}^{i-d_{\mathfrak{X}}}\big(\mathbb{D}(\mathcal{E})\big).$$

De plus F^* étant exact, $F^*\mathcal{H}^{i-d_X}(\mathbb{D}(\mathcal{E})) \cong \mathcal{H}^{i-d_X}(F^*\mathbb{D}(\mathcal{E}))$. Donc, on obtient un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\psi : F^*\mathcal{H} \cong \mathcal{H}$ et puisque $\mathbb{D}(\mathcal{E}) \in D^b_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, on en déduit que $\mathcal{H} \in F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}({}^g\mathfrak{X})$. Soit $(\mathcal{E}^{(0)}, \varphi(0))$ le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent correspondant à $(\mathcal{E}, \varphi)$. On a alors les deux isomorphismes :

$$\varphi^{(0)} : \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)} \xrightarrow{\ \sim\ } F^*\mathcal{E}^{(0)}, \quad \mathcal{E} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}$$

avec $\varphi = \eta \circ (\mathrm{id} \otimes \varphi^{(0)})$, (voir 1.1.1). Notons $\mathcal{H}^{(0)}$ le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent

$$\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}},$$

c'est-à-dire $\mathcal{H}^{(0)} = \mathcal{H}^{i-d_X}(\mathbb{D}(\mathcal{E}^{(0)}))$. On veut montrer qu'il existe un isomorphisme naturel :

$$\psi^{(0)} : F^*\mathcal{H}^{(0)} \xrightarrow{\ \sim\ } \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{H}^{(0)}$$

et que $(\mathcal{H}^{(0)}, \psi^{(0)})$ est le F-$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent correspondant à $(\mathcal{H}, \psi)$. Par exactitude de F^* et grâce à II, § 3.2, on a :

$$F^*\mathcal{H}^{(0)} \cong \mathcal{H}^{i-d_X}\big(F^*\mathbb{D}(\mathcal{E}^{(0)})\big) \cong \mathcal{H}^{i-d_X}\big(\mathbb{D}(F^*\mathcal{E}^{(0)})\big).$$

Par fonctorialité, on déduit de $\varphi^{(0)}$ l'isomorphisme :

$$\mathcal{H}^{i-d_X}\big(\mathbb{D}(F^*\mathcal{E}^{(0)})\big) \cong \mathcal{H}^{i-d_X}\big(\mathbb{D}(\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)})\big).$$

Puisque $\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est plat sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ et que $\mathbb{D}$ commute à l'extension des scalaires (chap. I, §§ 5.4, 5.5), on déduit que :

$$\mathcal{H}^{i-d_X}\big(\mathbb{D}(\widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)})\big) \cong \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{H}^{i-d_X}\big(\mathbb{D}(\mathcal{E}^{(0)})\big) \cong \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{H}^{(0)}.$$

Ainsi, en composant tous ces isomorphismes, on obtient $\psi^{(0)}$.

Appliquons le foncteur $\mathbb{D}$ à l'isomorphisme $\mathcal{E} \cong \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}$. Grâce à I, § 5.7 et à la platitude de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$, on a :

$$\mathcal{H}^{i-d_X}\big(\mathbb{D}(\mathcal{E})\big) \cong \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{H}^{i-d_X}\big(\mathbb{D}(\mathcal{E}^{(0)})\big).$$

C'est-à-dire l'isomorphisme voulu $\mathcal{H} \cong \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{H}^{(0)}$ et on vérifie aisément que $\psi = \eta \circ (\mathrm{id} \otimes \psi^{(0)})$.

NOTA BENE. — Soit $(\mathcal{E},\varphi) \in F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$. Alors $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ est muni d'une structure naturelle de $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à droite et on vient de voir que, $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche. On est donc amené — pour simplifier — à introduire la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules à droite.

1.5. DÉFINITION. — *Un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à droite est la donnée d'un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à droite $\mathcal{F}$ et d'un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\psi : F^\flat\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$. On note $F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}^d)$ la catégorie des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules à droite cohérents.*

1.6. PROPOSITION. — *Le foncteur $- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ définit une équivalence de catégories entre les F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules à droite et les F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules à gauche.*

Preuve. — Cela résulte directement de II, § 2.6, avec $\mathcal{B} = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$. En effet, soit $(\mathcal{F},\psi)$ un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à droite. On pose $\mathcal{E} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$. Alors $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent, et on définit un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-linéaire à gauche $\varphi : \mathcal{E} \cong F^*\mathcal{E}$ par :

$$\mathcal{E} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow[\sim]{\psi^{-1}\otimes \mathrm{id}} F^\flat\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \xrightarrow[\sim]{\eta} F^*(\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) = F^*\mathcal{E},$$

où η est l'isomorphisme de II, § 2.6. Alors $(\mathcal{E},\varphi)$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche et on vérifie de la même façon que $\omega_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} -$ est un foncteur quasi-inverse.

1.7. — i) Il résulte facilement de la proposition que, de la même façon que pour les modules à gauche, la catégorie $F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}^d)$ est équivalente à celle des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules à droite cohérents $\mathcal{F}^{(0)}$ munis d'un isomorphisme

$$\varphi^{(0)} : F^\flat\mathcal{F}^{(0)} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^{(0)} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$$

que l'on note $F\mathcal{D}^{(0)}_{\mathrm{coh}}(\mathcal{X}^d)$.

ii) Si $\mathcal{F}$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module (resp. un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module, resp. un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}}$-module, resp. un $\mathcal{D}^{(0)}_X$-module) à droite cohérent, on définit la variété caractéristique de $\mathcal{F}$, sa dimension et sa codimension comme étant celles du F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module (resp. du $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module, resp. du $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}}$-module, resp. du $\mathcal{D}^{(0)}_X$-module) à gauche associé $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}} \omega^{-1}_{\mathcal{X}}$.

2. Théorèmes de nullité des $\mathcal{E}xt^i$.

2.1. — La première étape consiste à établir ces théorèmes de nullité pour les $\mathcal{D}^{(0)}_X$-modules, en s'inspirant du cas complexe développé par Malgrange pour les $\mathcal{D}$-modules [Ma1]. On en déduira des résultats analogues sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$, puis pour les F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules. Rappelons que $\mathcal{D}^{(0)}_X$ est engendré par $\mathcal{O}_X$ et les dérivations, et que, sur tout ouvert où l'on dispose de coordonnées locales $t_1,\dots,t_d$, on a $\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X=\mathcal{O}_X[\delta_1,\dots,\delta_d]$, où δ_i est l'image de la dérivation duale de $\mathrm{d}t_i$ dans le gradué. Ainsi $\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X$ est un faisceau d'anneaux réguliers. En outre, on vérifie facilement, que si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{D}^{(0)}_X$-module à gauche cohérent, il admet une bonne filtration et $\operatorname{gr}\mathcal{M}$ est un $\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X$-module cohérent. La variété caractéristique de $\mathcal{M}$ est alors égale au support de $\operatorname{gr}\mathcal{M}$ dans $\operatorname{Spec}(\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X)$. Ainsi $\mathcal{D}^{(0)}_X$ joue ici le rôle du faisceau d'opérateurs différentiels $\mathcal{D}_X$ qu'étudie Malgrange lorsque X est une variété analytique complexe. On vérifie facilement que les résultats de Malgrange sont encore valables en remplaçant $\mathcal{D}_X$ par $\mathcal{D}^{(0)}_X$.

2.1.1. Lemme (*cf.* [Ma1, 4.2.3]). — *Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}^{(0)}_X$-module à gauche cohérent. On suppose $\mathcal{D}^{(0)}_X$ muni de sa filtration canonique. Alors sur tout ouvert affine de X, il existe une bonne filtration de $\mathcal{M}$ et, pour tout i, une bonne filtration de $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M},\mathcal{D}^{(0)}_X)$, telles que $\operatorname{gr}\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M},\mathcal{D}^{(0)}_X)$ soit un $\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X$-facteur de $\mathcal{E}xt^i_{\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X}(\operatorname{gr}\mathcal{M},\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X)$.*

2.1.2. Proposition (*cf.* [Ma1, 4.2.4]). — *Soient $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$ deux $\mathcal{D}^{(0)}_X$-modules à gauche cohérents munis de bonnes filtrations. Alors :*

i) $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^i_{\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X}(\operatorname{gr}\mathcal{M},\operatorname{gr}\mathcal{N}))\geq i$, *pour tout* $i\geq 0$.

ii) $\mathcal{E}xt^i_{\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X}(\operatorname{gr}\mathcal{M},\operatorname{gr}\mathcal{D}^{(0)}_X)=0$, *pour tout* $i<\operatorname{codim}(\operatorname{gr}\mathcal{M})$.

2.2. Corollaire. — *Soit $\mathcal{M}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$-module à gauche cohérent, sans p-torsion. Alors,*

i) $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}))\geq i$, *pour tout* $i\geq 0$.

ii) $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}}(\mathcal{M},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})=0$, *pour tout* $i<\operatorname{codim}(m)$.

Preuve. — Posons

$$\mathcal{M}^{(0)}=\mathcal{D}^{(0)}_X\otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{M}.$$

Le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$-module $\mathcal{M}$ étant sans p-torsion, on a :

$$\mathcal{D}^{(0)}_X\otimes^{\mathbb{L}}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{M}\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}^{(0)}_X\otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}}\mathcal{M}.$$

On obtient alors grâce à la suite exacte des coefficients universels (chap. I, § 5.8) une injection naturelle :

$$(\$) \qquad \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X} \mathcal{D}^{(0)}_X \hookrightarrow \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X).$$

Par définition, on a :

$$\operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X)\big) = \operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X} \mathcal{D}^{(0)}_X\big).$$

On en déduit que :

$$\operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X)\big) \geq \operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X)\big).$$

La dimension étant une notion locale, on peut supposer que X est affine et, grâce à 2.1.1, on sait qu'on peut munir $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X)$ d'une bonne filtration telle que $\operatorname{gr} \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X)$ soit un $\operatorname{gr} \mathcal{D}^{(0)}_X$-facteur de $\mathcal{E}xt^i_{\operatorname{gr} \mathcal{D}^{(0)}_X}(\operatorname{gr} \mathcal{M}^{(0)}, \operatorname{gr} \mathcal{D}^{(0)}_X)$. Ainsi :

$$\operatorname{codim}\big(\operatorname{gr} \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X)\big) \geq \operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\operatorname{gr} \mathcal{D}^{(0)}_X}(\operatorname{gr} \mathcal{M}^{(0)}, \operatorname{gr} \mathcal{D}^{(0)}_X)\big).$$

D'après 2.1.2, on sait que :

i) $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^i_{\operatorname{gr} \mathcal{D}^{(0)}_X}(\operatorname{gr} \mathcal{M}^{(0)}, \operatorname{gr} \mathcal{D}^{(0)}_X)) \geq i$, pour tout $i \geq 0$,

ii) $\mathcal{E}xt^i_{\operatorname{gr} \mathcal{D}^{(0)}_X}(\operatorname{gr} \mathcal{M}^{(0)}, \operatorname{gr} \mathcal{D}^{(0)}_X) = 0$, pour tout $i < \operatorname{codim}(\operatorname{gr} \mathcal{M}^{(0)})$.

Donc, on a d'une part :

$$\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X)) = \operatorname{codim}(\operatorname{gr} \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X)) \geq i,$$

pour tout $i \geq 0$, ce qui montre la première assertion, et d'autre part :

$$\operatorname{gr} \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X) = 0$$

pour tout $i < \operatorname{codim}(\operatorname{gr} \mathcal{M}^{(0)})$.

La filtration sur $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X)$ étant une bonne filtration, elle est bornée inférieurement, d'où

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{(0)}_X}(\mathcal{M}^{(0)}, \mathcal{D}^{(0)}_X) = 0$$

pour tout $i < \operatorname{codim}(\mathcal{M}^{(0)}) = \operatorname{codim}(\operatorname{gr} \mathcal{M}^{(0)})$. En utilisant à nouveau l'injection ($\$$), on en déduit que :

$$\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X) \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X} \mathcal{D}^{(0)}_X = 0$$

si $i < \operatorname{codim}(\mathcal{M}) = \operatorname{codim}(\mathcal{M}^{(0)})$. En outre, $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X)$ est cohérent et donc séparé pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique. Ainsi $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_X) = 0$, si $i < \operatorname{codim}(\mathcal{M})$.

Nota Bene : contre exemple, lorsque $\mathcal{M}$ est de p-torsion. — Soit

$$\mathcal{M} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}/p\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} \cong \mathcal{D}_X^{(0)}.$$

On dispose donc de la résolution suivante :

$$0 \to \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} \xrightarrow{\times p} \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)} \longrightarrow \mathcal{D}_X^{(0)} \to 0$$

et $\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}(\mathcal{D}_X^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}) \cong \mathcal{D}_X^{(0)}$. Ainsi

$$\dim\big(\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}(\mathcal{D}_X^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})\big) = \dim(\mathcal{D}_X^{(0)}) = 2d_X$$

et donc

$$\operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^1_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}(\mathcal{D}_X^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})\big) = 0.$$

2.3. Corollaire. — *Soit $\mathcal{E}^{(0)}$ un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}$-module à gauche cohérent. Alors :*

i) $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{E}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)})) \geq i$, *pour tout* $i \geq 0$;

ii) $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{E}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}) = 0$, *pour tout* $i < \operatorname{codim}(\mathcal{E}^{(0)})$.

Preuve. — Il existe un $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$-module cohérent $\mathcal{M}$, sans p-torsion, tel que $\mathcal{E}^{(0)} \cong \mathcal{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Alors, $\operatorname{codim}(\mathcal{E}^{(0)}) = \operatorname{codim}(\mathcal{M})$, et d'après I, § 5.5, on a :

$$\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{E}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Soit $\mathcal{N}$ le $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$-module quotient de $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$ par sa partie de p-torsion. Alors,

$$\mathcal{N} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{E}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}),$$

et on a :

$$\operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)}}(\mathcal{E}^{(0)}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}^{(0)})\big) = \operatorname{codim}(\mathcal{N}) \geq \operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}}(\mathcal{M}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})\big).$$

On conclut grâce au corollaire précédent.

Revenons maintenant au cas des F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules. Grâce à l'équivalence entre les catégories $F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$ et $F\mathcal{D}^{(0)}_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$, on obtient immédiatement les résultats analogues.

2.4. Corollaire. — *Soit $\mathcal{E}$ un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent. Alors,*

i) $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}))\geq i$, *pour tout* $i\geq 0$.

ii) $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})=0$, *pour tout* $i<\operatorname{codim}(\mathcal{E})$.

Preuve. — Soit $\mathcal{E}^{(0)}\in F\mathcal{D}^{(0)}_{\mathrm{coh}}({}^g\mathfrak{X})$ correspondant à $\mathcal{E}$. Alors $\operatorname{codim}(\mathcal{E})=\operatorname{codim}(\mathcal{E}^{(0)})$. D'après 1.4,

$$\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0)},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$$

est le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent correspondant à $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. Ils ont donc, par définition, même codimension et il en est de même pour les modules à droite $\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0)},\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ et $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$, (1.7).ii), d'où l'assertion.

3. Dimension cohomologique et filtration par la codimension.

On sait (chap. 0, § 4.3) que $\dim\operatorname{coh}(\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$ est inférieure ou égale à $2d_{\mathfrak{X}}+1$. On conjecture qu'elle est égale à $d_{\mathfrak{X}}$. On va montrer ici un résultat un peu plus faible, à savoir que tout F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent est de dimension cohomologique au plus égale à $d_{\mathfrak{X}}$.

3.1. Proposition. — *Soit $\mathcal{E}$ un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent. Alors,* $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})=0$, *pour tout* $i>d_{\mathfrak{X}}$.

Preuve. — On vient de voir au corollaire précédent que, pour tout $i\geq 0$,

$$\operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\big)\geq i.$$

En outre, puisque $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\otimes_{\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\omega^{-1}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent, (voir 1.4), on dispose de l'inégalité de Bernstein [Be6] et de 1.3.1 : pour tout $i\geq 0$,

$$\operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\big)\leq d_{\mathfrak{X}}\quad\text{ou}\quad\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})=0.$$

Ainsi, si $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\neq 0$, pour tout $i\geq 0$, on a

$$i\leq\operatorname{codim}\big(\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\big)\leq d_{\mathfrak{X}},$$

ce qui n'est possible que pour $i\leq d_{\mathfrak{X}}$.

3.2. Corollaire. — *Soit $\mathcal{E}^{(0)} \in F\mathcal{D}^{(0)}_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$. Alors, pour tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche $\mathcal{F}^{(0)}$, on a*

$$\mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{F}^{(0)}) = 0$$

pour tout $i > d_{\mathcal{X}}$ et pour tout $i < \operatorname{codim}(\mathcal{E}^{(0)})$.

Preuve. — a) Si $\mathcal{F} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, l'assertion se déduit d'une part de la proposition précédente par 1.4 et d'autre part du corollaire 2.3.

b) Puisque $\mathcal{E}^{(0)}$ est cohérent sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $i \geq 0$, on a :

$$(\$\$) \qquad \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0)}, \mathcal{F}^{(0)})_x \cong \operatorname{Ext}^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q},x}}(\mathcal{E}^{(0)}_x, \mathcal{F}^{(0)}_x).$$

Ainsi, la propriété à vérifier étant locale, il suffit de montrer que, pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q},x}$-module à gauche F, on a $\operatorname{Ext}^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q},x}}(\mathcal{E}^{(0)}_x, F) = 0$ pour tout $i > d_{\mathcal{X}}$ et pour tout $i < \operatorname{codim}(\mathcal{E}^{(0)})$. Posons :

$$E = \mathcal{E}^{(0)}_x, \quad D = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q},x}.$$

b.1) Si F est un D-module de type fini, il est quotient d'un D-module libre de type fini L. Soit $K = \ker(L \to F)$. Comme D est noethérien (voir [Be3, 3.3.6]), K est encore de type fini. Considérons la suite exacte longue suivante :

$$\cdots \to \operatorname{Ext}^i_D(E, L) \to \operatorname{Ext}^i_D(E, F) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_D(E, K) \to \operatorname{Ext}^{i+1}_D(E, L) \to \cdots.$$

D'après a) et l'isomorphisme ($$), on a

$$\operatorname{Ext}^i_D(E, L) = 0$$

pour $i > d_{\mathcal{X}}$ et $i < \operatorname{codim}(\mathcal{E}^{(0)})$. Donc, on obtient :

$$\operatorname{Ext}^i_D(E, F) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Ext}^{i+1}_D(E, K)$$

pour tout $i > d_{\mathcal{X}}$ et pour tout $i+1 < \operatorname{codim}(\mathcal{E}^{(0)})$. Puisque $\dim\operatorname{coh}(D) \leq 2d_{\mathcal{X}}+1$, on conclut par récurrence descendante puis ascendante sur i.

b.2) Si F est quelconque, alors $F = \varinjlim_{\alpha} F_\alpha$, où F_α parcourt l'ensemble des sous D-modules de type fini de F. Comme E est de type fini, on a :

$$\operatorname{Ext}^i_D(E, F) \cong \varinjlim_{\alpha} \operatorname{Ext}^i_D(E, F_\alpha).$$

L'assertion se déduit alors du cas précédent.

3.3. COROLLAIRE. — *Soit* $\mathcal{E} \in F\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$. *Pour tout* $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$*-module à gauche* $\mathcal{F}$, *on a, pour tout* $i > d_{\mathcal{X}}$ *et tout* $i < \operatorname{codim}(\mathcal{E})$:

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 0.$$

Preuve. — On a

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \mathcal{H}^i\,\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}).$$

Soit $\mathcal{E}^{(0)}$ le $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent correspondant à $\mathcal{E}$. Alors, $\mathcal{F}$ étant muni d'une structure de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module induite par sa structure de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module,

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)},\mathcal{F}) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0)},\mathcal{F})$$

et on a

$$\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) \cong \mathcal{E}xt^i_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}^{(0)},\mathcal{F}).$$

On conclut grâce au corollaire précédent, puisque $\operatorname{codim}(\mathcal{E}) = \operatorname{codim}(\mathcal{E}^{(0)})$.

Soit $\mathcal{E}$ un F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent. En s'inspirant à nouveau des travaux de Malgrange [Mal], on va construire une suite spectrale de bidualité [EGA] fonctorielle en $\mathcal{E}$. On en déduira d'une part que la codimension de $\mathcal{E}$ est le plus petit entier i tel que $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \neq 0$. D'autre part, grâce à la compatibilité de F^* avec l'isomorphisme de bidualité (chap. II, § 3.6), on obtiendra une filtration décroissante de $\mathcal{E}$, $(\mathcal{E}_p)_{p\geq 0}$, où $\mathcal{E}_p$ est le plus grand sous-F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent de $\mathcal{E}$ de codimension minorée par p.

3.4. Construction de la suite spectrale d'hyperhomologie. — Soit $\mathcal{E} \in F\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$. Notons d la dimension de $\mathcal{X}$ sur $\mathcal{S}$ et k la codimension de $\mathcal{E}$. On suppose $\mathcal{E}$ non nul. Ainsi, d'après l'inégalité de Bernstein 1.3.1, on a $k \leq d$.

Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ un ouvert affine. Puisque $\mathcal{E}$ est cohérent, il admet sur $\mathcal{U}$ une résolution gauche $\mathcal{L}^\bullet \to \mathcal{E}$, où $\mathcal{L}^\bullet$ est un complexe de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules localement projectifs de type fini. De plus, grâce à 3.3, on peut supposer que $\mathcal{L}^\bullet$ est de longueur d. En effet, soit

$$\mathcal{K} = \operatorname{Ker}(\mathcal{L}^{-d+1} \to \mathcal{L}^{-d+2}).$$

Pour tout $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{F}$, on a

$$\mathcal{E}xt^{i-d}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{K},\mathcal{F}) \cong \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}).$$

D'après le corollaire 3.3, $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{F}) = 0$, pour tout $i > d$. Ainsi

$$\mathcal{E}xt^{i-d}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{K},\mathcal{F}) = 0$$

pour tout $i > d$. Donc $\mathcal{E}xt^1_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{K},\mathcal{F}) = 0$ et $\mathcal{K}$ est un $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module localement projectif. On peut donc supposer que $\mathcal{L}^\bullet$ est de longueur d.

Considérons le foncteur contravariant de la catégorie des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à gauche dans celle des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à droite

$$D = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(-,\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$$

et notons $\mathcal{M}^\bullet$ le complexe $D(\mathcal{L}^\bullet)$. C'est un complexe de longeur d dont les termes sont des $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules à droite localement projectifs de type fini et, par construction, pour tout i, on a

$$\mathcal{H}^{-i}(\mathcal{M}^\bullet) = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}).$$

Ainsi, d'après 1.4 et 1.5, $\mathcal{H}^{-i}(\mathcal{M}^\bullet)$ est muni d'une structure de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module à droite cohérent.

Considérons la deuxième suite spectrale d'hyperhomologie de D par rapport au complexe $\mathcal{M}^\bullet$ (*cf.* [EGA, 0, 11.6]) :

$$E_2^{i,j} = \mathcal{H}^i D(\mathcal{H}^j(\mathcal{M}^\bullet)) \implies E^n = \mathcal{H}^n(D(\mathcal{M}^\bullet)).$$

Elle est birégulière puisque $\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ est de dimension cohomologique finie ($\leq 2d+1$), et on a :

i) $E_2^{i,j} = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}xt^{-j}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}),\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})$,

ii) $E^n = \mathcal{H}^n(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{L}^\bullet,\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}),\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}))$.

Chaque $\mathcal{L}^i$ étant projectif de type fini,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}\big(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{L}^i,\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}),\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}\big) \cong \mathcal{L}^i.$$

Ainsi $E^0 = \mathcal{E}$ et $E^n = 0$ si $n \neq 0$. De plus la filtration $(F^i(\mathcal{E}))_{i\geq 0}$ définie par la suite spectrale sur l'aboutissement E^n, qui ici est donc réduit à $\mathcal{E}$, est décroissante est finie, avec $F^0(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ et $F^i(\mathcal{E}) = 0$, pour tout $i > 2d+1$.

iii) $E_\infty^{i,j} = \mathrm{gr}^i(E^{i+j})$, donc $E_\infty^{i,j} = 0$, si $j \neq -i$ et $E_\infty^{i,-i} = \mathrm{gr}^i\,\mathcal{E}$. Donc,

$$\mathrm{gr}\,\mathcal{E} = \bigoplus_{0\leq i\leq 2d+1} \mathrm{gr}^i\,\mathcal{E} = \bigoplus_{0\leq i\leq 2d+1} E_\infty^{i,-i}.$$

Remarquons que, par construction de la suite spectrale et par définition de la filtration, on vérifie facilement que les $F^i(\mathcal{E})$ sont des sous-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents de $\mathcal{E}$, pour tout $i \geq 0$. Il en est donc de même pour les termes $E_\infty^{i,-i}$. En outre, grâce à 1.4 et 1.5, on sait que les termes $E_2^{i,j}$ ont une structure naturelle de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent.

Examinons les cas où $E_2^{i,j} = 0$:

a) si $-j > d$, par 3.1,

b) si $i > d$, par 3.1,

c) si $-j < k$, par 2.4, ii),

d) si $i < -j$, par 2.4, ii), puisque $\operatorname{codim}(\mathcal{E}xt^{-j}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})) \geq -j$ par 2.4, i).

Notons Δ le domaine du plan défini par $k \leq i \leq d$, $-d \leq j \leq -k$ et $i + j \geq 0$.

Ainsi, si $(i,j) \notin \Delta$, on a $E_2^{i,j} = 0$.

De même puisque $E^{i,j}r$ est un sous-quotient de $E_2^{i,j}$ et que la suite est birégulière, si $(i,j) \notin \Delta$, on a $E_r^{i,j} = E_\infty^{i,j} = 0$. On en déduit que

$$\operatorname{gr} \mathcal{E} = \bigoplus_{k \leq i \leq d} \operatorname{gr}^i \mathcal{E} = \bigoplus_{k \leq i \leq d} E_\infty^{i,-i}$$

et donc que $F^i(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, pour tout $0 \leq i \leq k$, et $F^i(\mathcal{E}) = 0$, pour tout $i \geq d+1$.

Montrons que $E_\infty^{i,-i}$ est un sous-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module de $E_2^{i,-i}$ pour tout $i \geq 0$.

Par définition, pour tout r, i, j, on a

$$E_{r+1}^{i,j} \cong Z_{r+1}(E_r^{i,j}) / B_{r+1}(E_r^{i,j})$$

avec $d_r^{ij} : E_r^{i,j} \longrightarrow E_r^{i+r,j-r+1}$

$$Z_{r+1}(E_r^{i,j}) = \operatorname{Ker}(d_r^{ij}), \quad B_{r+1}(E_r^{i,j}) = \operatorname{Im}(d_r^{i-r,j+r-1}).$$

Ainsi, pour tout $i \geq 0$ et tout $r \geq 2$,

$$B_{r+1}(E_r^{i,-i}) = \operatorname{Im}(d_r^{i-r,-i+r-1}),$$

avec

$$d_r^{i-r,-i+r-1} : E_r^{i-r,-i+r-1} \longrightarrow E_r^{i,-i}.$$

Mais $(i-r, -i+r-1) \notin \Delta$. Donc $E_r^{i-r,-i+r-1} = 0$ et $B_{r+1}(E_r^{i,-i}) = 0$. Ainsi, pour tout $i \geq 0$, pour tout $r \geq 2$,

$$E_{r+1}^{i,-i} \cong Z_{r+1}(E_r^{i,-i}).$$

On en déduit donc que $E_r^{i,-i}$ est un sous-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module de $E_2^{i,-i}$ pour tout $r \geq 2$, et puisque la suite est birégulière, il en est de même pour $E_\infty^{i,-i}$.

Récapitulons : on a donc construit une suite spectrale birégulière telle que :

i) $E_2^{i,j} = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}xt^{-j}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ est un F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent,

ii) $E_0 = \mathcal{E}$ est muni d'une filtration décroissante et finie $(F^i(\mathcal{E}))_{i\geq 0}$, où pour tout $i \geq 0$, $F^i(\mathcal{E})$ est un sous-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent de $\mathcal{E}$, et telle que $F^i(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, pour tout $0 \leq i \leq k$, et $F^i(\mathcal{E}) = 0$, pour tout $i \geq d+1$.

iii) $E_\infty^{i,-i}$ est un sous-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent de $E_2^{i,-i}$ pour tout $i \geq 0$ et $\operatorname{gr} \mathcal{E} = \bigoplus_{k\leq i\leq d} E_\infty^{i,-i}$.

Montrons enfin que ces objets héritent par fonctorialité de la suite spectrale d'une structure de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module.

Par définition, on dispose d'un isomorphisme $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-linéaire $\varphi : \mathcal{E} \cong F^*\mathcal{E}$. Reprenons la résolution $\mathcal{L}^\bullet \to \mathcal{E}$ à termes localement projectifs de type fini. Le foncteur F^* étant exact et transformant un projectif en projectif, $F^*\mathcal{L}^\bullet$ est une résolution de $F^*\mathcal{E}$ à termes localement projectifs de type fini. De plus, $\mathcal{L}^\bullet$ étant un complexe à termes localement projectifs, on déduit de φ un morphisme de complexes $\varphi' : \mathcal{L}^\bullet \to F^*\mathcal{L}^\bullet$. On construit à partir de $F^*\mathcal{L}^\bullet$ une suite spectrale d'hyperhomologie de la même façon que pour $\mathcal{L}^\bullet$:

i) $E_2'^{i,j} = \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}xt^{-j}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$,

ii) $E_n' = \mathcal{H}^n(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{L}^\bullet, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}))$, avec

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{L}^\bullet; \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \cong F^*\mathcal{L}^\bullet$$

et donc $E_n' = 0$ si $n \neq 0$ et $E_0' = F^*\mathcal{E}$.

De plus $F^*\mathcal{E}$ est muni d'une filtration décroissante $(F^i(F^*\mathcal{E}))_{i\geq 0}$, où pour tout $i \geq 0$, $F^i(F^*\mathcal{E})$ est un sous-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent de $F^*\mathcal{E}$, et telle que $F^i(F^*\mathcal{E}) = F^*\mathcal{E}$, pour tout $0 \leq i \leq k$, et $F^i(F^*\mathcal{E}) = 0$, pour tout $i \geq d+1$.

iii) $E_\infty'^{i,-i}$ est un sous-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent de $E_2'^{i,-i}$ pour tout $i \geq 0$, et

$$\operatorname{gr} F^*\mathcal{E} = \bigoplus_{k\leq i\leq d} E_\infty'^{i,-i}.$$

La construction de la suite spectrale étant fonctorielle en $\mathcal{L}^\bullet$, le morphisme $\varphi' : \mathcal{L}^\bullet \to F^*\mathcal{L}^\bullet$ induit un morphisme de suites spectrales :

$$u : \left[E_2^{i,j} \Rightarrow E_n\right] \longrightarrow \left[E_2'^{i,j} \Rightarrow E_n'\right],$$

avec

i) $$u_2^{i,j} : \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}\big(\mathcal{E}xt^{-j}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}\big) \longrightarrow \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}\big(\mathcal{E}xt^{-j}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}\big),$$

ii) $u_n : \mathcal{H}^n(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{L}^\bullet, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}))$
$$\longrightarrow \mathcal{H}^n(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{L}^\bullet, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})),$$
compatible aux filtrations,

iii) $u_\infty^{i-i} : E_\infty^{i,-i} \to E_\infty'^{i,-i}$.

Or par fonctorialité le morphisme $u_2^{i,j}$ est un isomorphisme et, puisque F^* et $\mathbb{D}$ commutent, on a un isomorphisme canonique (chap. II, § 3.2) :

$$\rho : \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}xt^{-j}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \xrightarrow{\sim} F^*\, \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}xt^{-j}_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}), \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}).$$

et $\rho \circ u_2^{i,j}$ est l'isomorphisme correspondant à la structure de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module de $E_2^{i,j}$, (§ 1.4).

De plus grâce au chap. II, § 3.6, on sait que l'isomorphisme de bidualité $\mu : \mathcal{E} \cong \mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E})$ est compatible aux structures de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{E}$ et de $F^*\mathcal{E}$. Par définition, on a :

$$\mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{L}^\bullet, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}[d_X]), \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}[d_X]),$$
$$\mathbb{D} \circ \mathbb{D}(F^*\mathcal{E}) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(F^*\mathcal{L}^\bullet, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}[\mathcal{D}_X]), \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}[d_X]),$$
$$F^*\mathbb{D} \circ \mathbb{D}(\mathcal{E}) \cong F^*\, \mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{L}^\bullet, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}[d_X]), \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}[d_X]).$$

Or, si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des complexes de $\mathcal{A}$-modules et d un entier, on sait [Del] que :

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}[d]) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})[d],$$
$$\mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}, \mathcal{F}[d]) \cong \mathcal{H}om_{\mathcal{A}}(\mathcal{E}[-d], \mathcal{F}).$$

On peut donc « supprimer » les décalages dans les isomorphismes ci-dessus. On en déduit que u_n est un isomorphisme pour tout $n \geq 0$, compatible aux filtrations, et que $(F^i(\mathcal{E}))_{i\geq 0}$ est une filtration de $\mathcal{E}$ par des sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules.

Enfin, puisque $E_\infty^{i,-i} = \mathrm{gr}^i\,\mathcal{E}$, pour tout $i \geq 0$, $E_\infty^{i,-i}$ est également muni d'une structure de F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module. C'est donc un sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module de $E_2^{i,-i}$.

3.5. Proposition. — *Soit* $\mathcal{E} \in F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}({}^g\mathfrak{X})$, $\mathcal{E} \neq 0$. *Posons* $k = \mathrm{codim}(\mathcal{E})$. *Alors,*
$$k = \inf\{i \mid \mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \neq 0\}.$$

Preuve. — On a déjà montré que $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) = 0$ si $i < k$, (*cf.* 2.4, ii). Il reste donc à vérifier que $\mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}) \neq 0$. La propriété étant locale, on peut utiliser la suite spectrale d'hyperhomologie que l'on vient de construire.

Supposons que $\mathcal{E}xt^k_{\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E},\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) = 0$. Alors $E_2^{k,-k} = 0$ et donc $E_\infty^{k,-k} = 0$. Ainsi

$$\operatorname{gr}\mathcal{E} = \bigoplus_{k+1\le i\le d} E_\infty^{i,-i}.$$

Or, d'après 2.4, i), $\operatorname{codim}(E_2^{i,-i}) \ge i$. Comme $E_\infty^{i,-i}$ est un sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module de $E_2^{i,-i}$, $\operatorname{codim}(E_\infty^{i,-i}) \ge i$, pour tout $i \ge 0$. Donc $\operatorname{codim}(\operatorname{gr}\mathcal{E}) \ge k+1$. Mais la filtration étant finie, $\operatorname{codim}(\operatorname{gr}\mathcal{E}) = \operatorname{codim}(\mathcal{E}) = k$. On aboutit donc à une contradiction.

3.6. Proposition. — *Soit $\mathcal{E} \in F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$, $\mathcal{E} \neq 0$. Posons $k = \operatorname{codim}(\mathcal{E})$ et $d = \dim(\mathcal{X}/\mathcal{S})$. Alors il existe une filtration $(\mathcal{E}^i)_{i\ge 0}$ de $\mathcal{E}$, décroissante et finie, par des sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules cohérents, telle que :*

i) *pour tout $0 \le i \le k$, $\mathcal{E}^i = \mathcal{E}$,*

ii) *pour tout $d+1 \le i$, $\mathcal{E}^i = 0$,*

iii) *pour tout $k \le i \le d$, $\mathcal{E}^i$ est le plus grand sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent de $\mathcal{E}$ de codimension supérieure ou égale à i.*

Preuve. — Vérifions que l'on peut définir un plus grand sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{E}$ cohérent et de codimension supérieure ou égale à i, pour $k \le i \le d$. Puisque $\mathcal{E} \in F\mathcal{D}^\dagger_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$, il existe un unique $\mathcal{E}^{(0)} \in F\mathcal{D}^{(0)}_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$ et tel que $\mathcal{E} \cong \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}$, (voir 1.1).

Soit $\mathcal{F}$ un sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{E}$ cohérent et de codimension supérieure ou égale à i. Il lui correspond un unique sous-module $\mathcal{F}^{(0)}$ de $\mathcal{E}^{(0)}$ tel que $\mathcal{F}^{(0)} \in F$-$M_{\mathrm{coh}}({}^g\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}})$ et tel que

$$\mathcal{F} \cong \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{F}^{(0)}.$$

De plus $\operatorname{codim}(\mathcal{F}) = \operatorname{codim}(\mathcal{F}^{(0)}) = i$. Or $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$ est un faisceau d'anneaux localement noethérien (voir [Be2, 1.3.2]) et la catégorie $F\mathcal{D}^{(0)}_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$ est abélienne (voir [Be4, 4.5.1]). Donc il existe $\mathcal{G}^{(0)} \in F\mathcal{D}^{(0)}_{\mathrm{coh}}({}^g\mathcal{X})$ tel que $\mathcal{G}^{(0)}$ soit le plus grand sous-module cohérent de $\mathcal{E}^{(0)}$ de codimension $\ge i$. Le plus grand sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module de $\mathcal{E}$ cohérent et de codimension supérieure ou égale à i est alors $\mathcal{G} = \mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X},\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \mathcal{G}^{(0)}$.

Considérons la suite spectrale d'hyperhomologie construite en 3.4 et la filtration $(F^i(\mathcal{E}))_{i\ge 0}$ sur $\mathcal{E}$ qu'elle définit. La construction étant fonctorielle par rapport à la résolution $\mathcal{L}^\bullet$ choisie, on obtient, par recollement, une filtration définie sur $\mathcal{X}$ tout entier. Montrons que $F^i(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^i$, pour tout $i \ge 0$. On a sait que $(F^i(\mathcal{E}))_{i\ge 0}$ est une filtration décroissante, finie et telle que, pour tout

$i \geq 0$, $F^i(\mathcal{E})$ est un sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent de $\mathcal{E}$, et telle que $F^i(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, pour tout $0 \leq i \leq k$, et $F^i(\mathcal{E}) = 0$, pour tout $i \geq d+1$.

Il reste donc à vérifier que $F^i(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^i$, pour tout $k \leq i \leq d$.

On a vu dans la preuve de la proposition précédente que $\operatorname{codim}(E_\infty^{i,-i}) \geq i$, pour tout $i \geq 0$. Donc par récurrence sur $i \geq k$, puisque $F^k(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$, on déduit que, pour tout $i \geq k$,

$$\operatorname{codim}\big(F^i(\mathcal{E})\big) \geq i.$$

Ainsi, par définition de $\mathcal{E}^i$, on a $F^i(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}^i$, pour tout $k \leq i \leq d$.

Montrons par récurrence sur $i \geq k$, que $F^i(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^i$. Supposons que $\mathcal{E}^{i+1} = F^{i+1}(\mathcal{E})$ et posons $\mathcal{F} = \mathcal{E}^i$. Par fonctorialité de la suite spectrale en $\mathcal{E}$, on a le diagramme naturel commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
F^i(\mathcal{F})/F^{i+1}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{F}/F^{i+1}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{F}/\mathcal{F}^{i+1} \\
{\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle v}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow \\
F^i(\mathcal{E})/F^{i+1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}/F^{i+1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{E}/\mathcal{E}^{i+1}.
\end{array}$$

Par hypothèse de récurrence $\mathcal{E}^{i+1} = F^{i+1}(\mathcal{E})$, donc $\beta = \mathrm{id}$.

Par définition, $\mathcal{F}^{i+1}$ est le plus grand sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent de $\mathcal{F}$ de codimension minorée par $i+1$. Or $\mathcal{E}^{i+1}$ est le plus grand sous-F-$\mathcal{D}^\dagger_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent de $\mathcal{E}$ de codimension minorée par $i+1$. Donc $\mathcal{E}^{i+1} \subset \mathcal{E}^i = \mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^{i+1} = \mathcal{E}^{i+1}$. De plus, $\operatorname{codim}(\mathcal{F}) \geq i$. Donc par construction de la filtration, $F^i(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ et $\alpha' = \mathrm{id}$. On obtient alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}/F^{i+1}(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{F}/\mathcal{F}^{i+1} \\
{\scriptstyle u}\downarrow & & {\scriptstyle w}\downarrow \\
F^i(\mathcal{E})/F^{i+1}(\mathcal{E}) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}/\mathcal{E}^{i+1},
\end{array}$$

avec :

i) α injective, puisque $\mathcal{E}^{i+1} = F^{i+1}(\mathcal{E})$,

ii) β' surjective et w injective, par construction.

Donc, on a $\operatorname{Im}(w) = \operatorname{Im}(w \circ \beta') = \operatorname{Im}(\alpha \circ u) \subset \operatorname{Im}(\alpha)$, et on obtient un morphisme injectif

$$w : \mathcal{F}/\mathcal{F}^{i+1} \longrightarrow F^i(\mathcal{E})/F^{i+1}(\mathcal{E}).$$

Soit encore, grâce aux identifications, un morphisme injectif :

$$w : \mathcal{E}^i/\mathcal{E}^{i+1} \longrightarrow F^i(\mathcal{E})/\mathcal{E}^{i+1}.$$

Ainsi $\mathcal{E}^i \subset F^i(\mathcal{E})$, et puisque $F^i(\mathcal{E}) \subset \mathcal{E}^i$, on a l'égalité.

4. Caractérisation homologique de l'holonomie.

Déduisons de ce qui précède une caractérisation homologique des $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes.

4.1. Définition. — *Soit $\mathcal{E}$ un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module à gauche cohérent. On dit que $\mathcal{E}$ est holonome si $\mathcal{E} = 0$ ou* $\dim(\mathcal{E}) = d_{\mathcal{X}}$.

4.2. Théorème. — *Soit $\mathcal{E}$ un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si, pour tout $i \neq d_{\mathcal{X}}$, on a*

$$\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) = 0.$$

Preuve. — Supposons $\mathcal{E}$ non nul. Si $\mathcal{E}$ est holonome, on a par définition $\dim(\mathcal{E}) = \operatorname{codim}(\mathcal{E}) = d_{\mathcal{X}}$. Grâce à 2.4, on sait que $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) = 0$ si $i < d_{\mathcal{X}}$ et par 3.1, que $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) = 0$ si $i > d_{\mathcal{X}}$.

Réciproquement, si $\mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) = 0$, pour tout $i \neq d_{\mathcal{X}}$, montrons que $\mathcal{E}$ est holonome, c'est-à-dire $\operatorname{codim}(\mathcal{E}) = d_{\mathcal{X}}$. Posons $k = \operatorname{codim}(\mathcal{E})$. D'après la proposition 3.5,

$$k = \inf\{i \mid \mathcal{E}xt^{i}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \neq 0\}.$$

Donc $\mathcal{E}xt^{k}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \neq 0$ et $k = d_{\mathcal{X}}$.

4.3. Définition. — *Soit $\mathcal{E}$ un $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-module holonome. On définit le dual de $\mathcal{E}$, que l'on notera $\mathcal{E}^*$, par :*

$$\mathcal{E}^* = \mathcal{E}xt^{d_{\mathcal{X}}}_{\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}}(\mathcal{E}, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}} \omega^{-1}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}.$$

4.4. Proposition. — *On définit ainsi un foncteur de dualité exact de la catégorie des $F\text{-}\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes dans elle même, et on dispose de l'isomorphisme de bidualité : $\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{E}^*)^*$.*

Preuve. — Par 2.4, i), on sait que $\operatorname{codim}(\mathcal{E}^*) \geq d_{\mathcal{X}}$, soit $\dim(\mathcal{E}^*) \leq d_{\mathcal{X}}$. Or l'inégalité de Bernstein nous dit que $\dim(\mathcal{E}^*) \geq d_{\mathcal{X}}$. Donc $\dim(\mathcal{E}^*) = d_{\mathcal{X}}$ et $\mathcal{E}^*$ est holonome, par définition. De plus, $\mathcal{E}^* = \mathcal{H}^0\mathbb{D}(\mathcal{E})$ et grâce au théorème précédent, on a $\mathcal{H}^i\mathbb{D}(\mathcal{E}) = 0$, si $i \neq 0$. Donc $\mathbb{D}(\mathcal{E}) \cong \mathcal{E}^*$, si $\mathcal{E}$ est holonome. L'isomorphisme de bidualité $\mu : \mathcal{E} \cong (\mathcal{E}^*)^*$ se déduit alors du théorème de bidualité du chapitre I, § 3.6.

BIBLIOGRAPHIE

[EGA] Grothendieck (A.). — *Éléments de géométrie algébrique*, Publ. Math. I.H.E.S., t. **11**, 1961.

[Be1] Berthelot (P.). — *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique* $p > 0$, Lecture Note **407**, Springer-Verlag, 1974.

[Be2] Berthelot (P.). — *Cohomologie rigide et théorie des* $\mathcal{D}$*-modules, Proc. Conf. p-adic Analysis (Trento 1989)*, Lecture Notes in Math. **1454**, Springer-Verlag, 1990, p. 78–124,.

[Be3] Berthelot (P.). — $\mathcal{D}$*-modules arithmétiques I. Opérateurs différentiels de niveau fini*, Ann. Scient. École Norm. Sup., 4e série, t. **29**, 1996, p. 185–272.

[Be4] Berthelot (P.). — $\mathcal{D}$*-modules arithmétiques II. Descente par Frobenius*, Mémoires Soc. Math. France **81**, 2000.

[Be5] Berthelot (P.). — $\mathcal{D}$*-modules arithmétiques III. Images directes et réciproques*, en préparation.

[Be6] Berthelot (P.). — $\mathcal{D}$*-modules arithmétiques IV. Variété caractéristique*, en préparation.

[Be7] Berthelot (P.). — *Cohérence différentielle des algèbres de fonctions surconvergentes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **323**, Série I, 1996, p. 35–40.

[Bo1] Borel (A.)et al.. — *Algebraic* $\mathcal{D}$*-modules*, Perspectives in Math., Academic Press, t. **2**, 1987.

[Bj1] Björk (J.-E.). — *Analytic* $\mathcal{D}$*-modules and applications*, Mathematics and its applications, Kluwer Academic Publishers, 1993.

[CE1] Cartan (H.), Eilenberg (S.). — *Homological Algebra.* — Princeton University Press, 1956.

[De1] Deligne (P.). — *Cohomologie à support propre, SGA4, Exposé XVII*, Lecture Notes **305**, Springer-Verlag, 1973.

[Gr1] Grothendieck (A.). — *Crystals and the De Rham Cohomology of Schemes (notes by I. Coates and O. Jussila), IHES, Décembre 1966, Dix exposés sur la cohomologie des schémas.* — Advanced Studies in Pure Mathematics, Masson, 1968.

[Ha1] Hartshorne (R.). — *Residues and Duality*, Lecture Notes **20**, Springer-Verlag, 1966.

[Hu1] Huyghe (C.). — *Finitude de la dimension cohomologique de* $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}({}^{\dagger}Z)_{\mathbb{Q}}$, en cours de rédaction.

[Il1] Illusie (L.). — *Généralités sur les conditions de finitude dans les catégories dérivées, SGA6, Exposé I*, Lecture Notes **225**, Springer-Verlag, 1971.

[Il2] Illusie (L.). — *Complexe cotangent et déformations II*, Lecture Notes **283**, Springer-Verlag, 1972.

[Ka1] KASHIWARA (M.). — *Algebraic study of systems of partial differentiel equations, Master's Thesis, Tokyo University, December 1970*, Mémoire Soc. Math. France **63**, 1995.

[Ma1] MALGRANGE (B.). — *Caractérisation homologique de la dimension, Séminaire Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels, Exposé IV*, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1975–1976.

[Me1] MEBKHOUT (Z.). — *Systèmes différentiels, le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents*, Travaux en cours, Hermann, 1989.

[Me2] MEBKHOUT (Z.). — *Théorèmes de dualité pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **285**, 1977, p. 785–787.

[Me3] MEBKHOUT (Z.). — *Théorèmes de bidualité locale pour les $\mathcal{D}_X$-modules*, Arkiv für Math., t. **20**, 1982, p. 111–124.

[Me4] MEBKHOUT (Z.). — *Théorèmes de dualité globale pour les $\mathcal{D}_X$-modules cohérents*, Math. Scand., t. **50**, 1982, p. 25–43.

[Ra1] RAYNAUD (M.). — *Géométrie analytique rigide, d'après Tate, Kiehl et al.*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **39/40**, 1974, p. 319–327.

[Sa1] SAITO (M.). — *Induced $\mathcal{D}$-modules and differential complexes*, Bulletin de la S.M.F., t. **117**, 1989, p. 361–387.

[Sa2] SAITO (M.). — *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS, Kyoto University, t. **24**, 1988, p. 849–995.

[Sc1] SCHNEIDERS (J.-P.). — *Un théorème de dualité relative pour les modules différentiels*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **303**, 1986, p. 235–238.

[Sc2] SCHNEIDERS (J.-P.). — *Dualité pour les modules différentiels*, Thèse, Université de Liège, 1986.

[Sc3] SCHNEIDERS (J.-P.), SCHAPIRA (P.). — *Index theorems for elliptic pairs*, Astérisque **224**, 1994.

[Vi1] VIRRION (A.). — *Théorème de bidualité et caractérisation des F-$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes*, C. R. Acad. Sciences Paris, t. **319**, Série I, 1994, p. 1283–1286.

[Vi2] VIRRION (A.). — *Théorème de dualité relative pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. **321**, Série I, 1995, p. 751–754.

[Vi3] VIRRION (A.). — *Morphisme trace et théorème de dualité relative pour les $\mathcal{D}$-modules arithmétiques*, en préparation.