BULLETIN DE LA S. M. F.

ANTOINE DOUAI

Très bonnes bases du réseau de Brieskorn d'un polynôme modéré

Bulletin de la S. M. F., tome 127, n° 2 (1999), p. 255-287

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1999__127_2_255_0>

Bull. Soc. math. France,
127, 1999, p. 255–287.

TRÈS BONNES BASES DU RÉSEAU DE BRIESKORN D'UN POLYNÔME MODÉRÉ

PAR ANTOINE DOUAI (*)

RÉSUMÉ. — Étant donné un polynôme modéré défini sur l'espace affine de dimension n, nous montrons comment obtenir explicitement des très bonnes bases (au sens de M. Saito) du réseau de Brieskorn. La situation devient très concrète si l'on suppose en particulier le polynôme non dégénéré et commode par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini : ce cas est traité en détail et est illustré d'exemples.

ABSTRACT. — VERY GOOD BASES OF THE BRIESKORN LATTICE OF A TAME POLYNOMIAL. — Given a tame polynomial we show how to compute explicitely very good bases (in the sense of M. Saito) of the Brieskorn lattice. The situation becomes very concrete if the polynomial is non degenerate and convenient with respect to its Newton polyhedron at infinity : this case is discussed in detail and we give some examples.

1. Introduction

Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ une fonction polynomiale non constante que l'on suppose *modérée* (*tame* dans la terminologie de Broughton [Br]). En particulier, ses points critiques sont isolés et l'infini n'apporte pas de contribution à l'analyse de la cohomologie de ses fibres. Ce travail prend sa source dans l'étude d'intégrales du type

$$I(s) = \int_\gamma f^s \omega,$$

ω étant une n-forme algébrique sur $\mathbb{C}^n$ et γ un n-cycle à coefficients dans un système local $\mathcal{L}$ qui fait de I une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Il fait suite aux travaux de Varchenko [V1], de Loeser et de Sabbah [LS] qui

(*) Texte reçu le 18 mai 1998, révisé le 7 janvier 1999, accepté le 25 janvier 1999.
A. DOUAI, Membre du projet INTAS 97-1644, Laboratoire J.A Dieudonné, UMR 6621, Université de Nice, Parc Valrose 06108 Nice CEDEX 2. Email : douai@math.unice.fr.
Mots clés : système de Gauss-Manin, réseau de Brieskorn.
Classification AMS : 32S40.

ont calculé le déterminant d'une matrice («matrice de périodes») dont les éléments sont de telles intégrales, les formes différentielles parcourant un ensemble donné (voir aussi [V2] et [DT] pour le cas de plusieurs fonctions).

Si l'hypersurface $f^{-1}(0)$ est lisse, Loeser et Sabbah [LS, th. 4.2.10] ont montré qu'il existe des formes différentielles telles que ce déterminant soit égal (à une fonction périodique de s près) à

$$c^s \Gamma(s)^\mu \prod_{1\leq i\leq \mu} \Gamma(s+\beta_i)^{-1}$$

où μ est un entier positif, c le produit des valeurs critiques de f et $\beta_1, \cdots, \beta_\mu$ des nombres rationnels, logarithmes de valeurs propres de la monodromie de f à l'infini. Ceci n'est plus vrai pour des formes quelconques.

Si l'on veut préciser ce résultat, il est alors naturel de définir une collection de nombres rationnels $\{\beta_1, \ldots, \beta_\mu\}$ privilégiée (le *spectre* du polynôme f) et d'expliciter une famille de formes différentielles qui réalisent la formule avec l'ensemble $\{\beta_1, \ldots, \beta_\mu\}$ considéré. Une démarche dans ce sens est entreprise dans [D] : si f est non-dégénérée et commode par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini (et est donc modérée [Br]), la famille de rationnels y est définie via la filtration de Newton sur l'anneau $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$: celle-ci induit par projection une filtration $\mathcal{N}$ sur l'espace vectoriel de dimension finie

$$\Omega_f \overset{\text{déf}}{=\!=} \Omega^n / \mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1}$$

(Ω^p désigne l'espace des p-formes à coefficients polynomiaux) et par définition le spectre de f est égal au spectre de la filtration de Newton définie sur Ω_f, c'est-à-dire l'ensemble des rationnels β tels que $\mathrm{gr}^\beta_{\mathcal{N}} \Omega_f$ ne soit pas nul. Si f est plus généralement modérée, on cherche un spectre qui «prolonge» le spectre de la filtration de Newton. Comme l'a remarqué C. Sabbah [S], un bon candidat est le spectre de la V-filtration de Malgrange-Kashiwara (qui mesure les développements asymptotiques quand τ tend vers 0 d'intégrales du type $\int_\gamma e^{\tau f}\omega$, où ω est une n-forme différentielle comme ci-dessus et γ un «onglet» de Lefschetz [Ph1]) définie sur Ω_f.

Ce choix étant fait, nous nous proposons de déterminer un ensemble de formes différentielles adéquat. Lorsque l'on calcule le déterminant de la matrice de périodes les formes différentielles sont définies comme suit : soient $X = \mathbb{C}^n - f^{-1}(0)$ et $\Omega^p(X)$ l'espace des p-formes régulières sur X. On considère le complexe de De Rham «tordu par f^s», traditionnellement appelé *complexe d'Aomoto*,

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{C}(s) \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^p(X) \xrightarrow{\mathrm{d}_s} \mathbb{C}(s) \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^{p+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

muni de la différentielle $\mathbb{C}(s)$-linéaire

$$\mathrm{d}_s(1 \otimes \omega) = 1 \otimes \mathrm{d}\omega + s \otimes \frac{\mathrm{d}f}{f} \wedge \omega.$$

Comme f est modérée, ce complexe n'a qu'un groupe de cohomologie non nul, le n-ième (notons-le $H^n(s)$), qui est un $\mathbb{C}(s)$-espace vectoriel de dimension finie $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_f$. Puisque le déterminant doit être non nul, on choisit des formes qui relèvent une base de cet espace vectoriel.

Tout revient donc à étudier $H^n(s)$. Pour ce faire, il est naturel de considérer le système de Gauss-Manin M du polynôme f (sa transformée de Mellin [LS] est égale à $H^n(s)$). C'est un $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module holonome régulier, défini de la même manière que dans le cas local [Ph] (en dehors des valeurs critiques de f, M est une connexion, la fibre en un point s du faisceau de ses sections horizontales étant égale à $H^{n-1}(f^{-1}(s), \mathbb{C})$) et qui jouit des mêmes propriétés : en particulier ∂_t y est inversible. Le module M contient un réseau G_0, appelé *le réseau de Brieskorn*. C'est le $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$-module libre de rang μ, muni d'une action de t, défini par

$$G_0 = \Omega^n / \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}\Omega^{n-2}.$$

Comme dans le cas local, ∂_t^{-1} (resp. t) associe à la classe d'un élément ω de Ω^n celle de $\mathrm{d}f \wedge \eta$ (resp. celle de $f\omega$) où η est n'importe quelle forme de degré $n-1$ telle que $d\eta = \omega$.

L'idée (en germe dans [D] où sont définies de bonnes bases de $H^n(s)$) est dans un premier temps de trouver des bases de G_0 sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$ dans lesquelles l'action de t devienne aussi simple que possible. Ainsi, nous dirons qu'une base de G_0 est une *très bonne base* si il existe une matrice constante A_0 et une matrice diagonale A_1 dont les valeurs propres coïncident avec le spectre de f précédemment défini telles que la matrice de t dans cette base s'écrive

$$A_0 + A_1 \partial_t^{-1}.$$

(Cette notion apparaît déjà chez Malgrange [M, th. 5.9] ; K. Saito [SK, § 4] a remarqué que l'existence de formes primitives se ramène à celle de très bonnes bases et M. Saito [S1] en a montré l'existence si f définie une singularité isolée.)

Il s'avère que si 0 n'est pas valeur critique de f, une très bonne base de G_0 se relève en une base de $H^n(s)$ et fournit, car les valeurs propres de A_1 coïncident avec le spectre de f, la famille de formes différentielles voulue.

L'objet de cet article est de donner une démonstration constructive d'un résultat de C. Sabbah [S] qui, dans le cas plus général où f est cohomologiquement modérée, a montré l'existence de très bonnes bases en adaptant les arguments de M. Saito [S1].

Nous procédons de la manière suivante : appelons *E-base* de G_0 toute base de G_0 sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$ qui se projette en une base de

$$\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{spec}_V} \mathrm{gr}_\alpha^V(G_0/\partial_t^{-1}G_0).$$

De telles bases existent car l'action de ∂_t^{-1} est stricte pour la filtration V. La matrice de t dans une E-base quelconque s'écrit *a priori* $B_0 + B_1\partial_t^{-1}$ avec B_0 constante et B_1 à coefficients dans $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$. Dans un premier temps, nous construisons des très bonnes bases lorsqu'il existe une E-base qui satisfait une condition (« condition (B) ») qui demande entre autre que la partie constante de la matrice B_1 soit diagonalisable. Lorsque la monodromie du polynôme f à l'infini est semi-simple, toute E-base vérifie la condition (B).

La deuxième étape consiste à montrer qu'il existe toujours une E-base qui vérifie la condition (B). Pour montrer ce dernier résultat, nous faisons appel à la théorie de Hodge dans la mesure où nous devons montrer qu'un opérateur nilpotent (la « partie nilpotente de la monodromie à l'infini ») préserve strictement une filtration (de Hodge) ce qui se produit en particulier si l'opérateur considéré est un morphisme de structure de Hodge (mixte).

Les très bonnes bases construites ne sont pas uniques et dépendent du choix d'une E-base. Une manière de les rendre « canoniques » serait de les demander adaptées à une dualité analogue à la dualité de Poincaré microlocale dans le cas local [S1, 2.7], [SK].

Ce travail a été motivé par la lecture des articles de M. Saito [S1], [S2] et de C. Sabbah [S] et s'en inspire peu ou prou : l'objectif initial était de comprendre le rôle joué par la théorie de Hodge dans ces deux articles. Notons aussi que les calculs entrepris ici permettent de retrouver (via une transformation de Mellin) les bonnes bases du complexe d'Aomoto construites « à la main » dans [D] sous des hypothèses plus restrictives.

Cet article est organisé de la manière suivante : au paragraphe 2, nous définissons le réseau de Briekorn et ses très bonnes bases. Au paragraphe 3, nous introduisons la notion de E-base. Le paragraphe 4 est consacrée au théorème principal et à sa preuve. Nous traitons le cas non-dégénéré et commode et nous donnons quelques exemples au § 5. Enfin, au paragraphe 6, nous discutons sommairement du comportement des bases construites vis à vis des « higher residue pairings » de K. Saito et nous concluons au paragraphe 7 par une application au calcul du déterminant de matrices de périodes.

Je tiens à exprimer ma gratitude à C. Sabbah pour de fructueuses discussions et ses remarques à propos d'une première version de ce travail. Notamment lui est due la preuve du théorème 3.2.1 présentée ici.

2. Le réseau de Brieskorn et ses très bonnes bases

Dans tout ce qui suit on suppose la fonction polynomiale $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ *modérée* (tame) . Il est alors connu [Br] que l'ensemble de bifurcation α_f de f (c'est-à-dire le plus petit ensemble fini tel que

$$f : \mathbb{C}^n - f^{-1}(\alpha_f) \longrightarrow \mathbb{C} - \alpha_f$$

soit une fibration localement triviale) coïncide avec l'ensemble des valeurs critiques de f (il n'y a donc aucune contribution de l'infini) et que pour tout $s \in \alpha_f$, les fibres $f^{-1}(s)$ ont seulement des singularités isolées. Pour $s \in \alpha_f$, on note μ_s la somme des nombres de Milnor des singularités (isolées) de $f^{-1}(s)$ et

$$\mu = \sum_{s\in\alpha_f} \mu_s$$

le nombre de Milnor de f. D'après [Br, th. 1.2], pour tout $c \in \mathbb{C}$, $f^{-1}(c)$ a le type d'homotopie d'un bouquet de $\mu - \mu_c$ sphères.

Soient Ω^p l'espace des p-formes à coefficients polynomiaux et

$$\Omega_f \overset{\text{déf}}{=\!=} \Omega^n / \mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1}.$$

On a aussi $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_f$.

2.1. Le réseau de Brieskorn.

Soit $\mathcal{O}$ le faisceau des fonctions régulières sur $\mathbb{C}^n$. Le complexe de Gauss-Manin du polynôme f est le complexe de $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules $f_+\mathcal{O}$. Il est représenté par le complexe de De Rham relatif

$$\big(\Omega^{*+n}[\partial_t], \mathrm{d}_f\big)$$

des polynômes d'une indéterminée ∂_t dont les coefficients sont des formes différentielles à coefficients polynomiaux, la différentielle d_f étant définie par

$$\mathrm{d}_f(\omega_i\partial_t^i) = \mathrm{d}\,\omega_i\partial_t^i - \mathrm{d}f\wedge\omega_i\partial_t^{i+1}.$$

Les groupes de cohomologie $\mathcal{H}^j(f_+\mathcal{O})$ sont des $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-modules holonomes réguliers (même à l'infini) [Bo, p. 308], la structure de $\mathbb{C}[t]\langle\partial_t\rangle$-module étant donnée par [DS, 2.6]

$$\partial_t(\omega\partial_t^k) = \omega\partial_t^{k+1}, \quad t(\omega\partial_t^k) = f\omega\partial_t^k - k\omega\partial_t^{k-1}.$$

Soit $M = \mathcal{H}^0(f_+\mathcal{O})$; on appelle M *système de Gauss-Manin* de f. Sur M est défini une filtration croissante $F_\bullet$ dont le terme F_p d'ordre p est défini comme l'ensemble des classes de cohomologie des éléments

$$\omega_0 + \omega_1\partial_t + \cdots + \omega_p\partial_t^p$$

de $\Omega^n[\partial_t]$. On note

$$G_0 \overset{\text{déf}}{=\!=} F_0M.$$

Proposition 2.1.1.

(i) *$\mathcal{H}^j(f_+\mathcal{O})$ est nul pour j différent de $-n+1$ et 0 ;*

(ii) *∂_t est inversible sur M ;*

(iii) *$G_0 = \Omega^n/\mathrm{d}f\wedge\mathrm{d}\Omega^{n-2}$;*

(iv) *∂_t^{-1} laisse stable G_0 et associe à la classe de $\omega\in\Omega^n$ la classe de $\mathrm{d}f\wedge\eta$ où η est n'importe quelle forme telle que $\mathrm{d}\eta=\omega$;*

(v) *G_0 est un $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$-module libre de rang μ.*

Preuve. — On procède comme dans le cas local (*cf.* [Ph, p. 159–162]) parce que la suite des dérivées partielles de f est régulière (et donc le complexe de Koszul $(\Omega^*, \mathrm{d}f\wedge)$ n'a de cohomologie non-nulle qu'en degré n). La dernière assertion est montrée dans [S, th. 10.1]. □

Remarques 2.1.2.

(i) Si $f : U \to \mathbb{A}^1$, où U est une variété affine lisse de dimension n telle que $U \neq \mathbb{C}^n$, l'image dans M de $\Omega^n(U)$ n'est pas stable par ∂_t^{-1} en général.

(ii) On a $G_0/\partial_t^{-1}G_0 = \Omega_f$ (donc $\dim_{\mathbb{C}} G_0/\partial_t^{-1}G_0 = \mu$).

(iii) t agit sur G_0 par $t\omega \overset{\text{déf}}{=\!=} f\omega$.

On complète la filtration $F_\bullet$ en posant, pour $p < 0$,

$$F_pM = \partial_t^{-p} F_0 M.$$

LEMME 2.1.3. — *Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\partial_t F_p M = F_{p+1} M \quad \textit{et} \quad \partial_t^{-1} F_{p+1} M = F_p M.$$

Preuve. — Le résultat se déduit de la bijectivité de ∂_t : si $p \geq 0$, la forme $\omega_0 + \omega_1 \partial_t + \cdots + \omega_{p+1} \partial_t^{p+1}$ est cohomologue à

$$\mathrm{d}f \wedge \eta_0 \partial_t + \omega_1 \partial_t + \cdots + \omega_{p+1} \partial_t^{p+1}$$

où η_0 est telle que $\mathrm{d}\eta_0 = \omega_0$, d'où la première égalité. La deuxième se montre de la même façon. Et si $p < 0$, il s'agit juste de la définition de $F_\bullet$. $\square$

En particulier, pour tout $m \in M$ il existe $m_0 \in G_0$ et $k \in \mathbb{Z}$ tels que $\partial_t^k m_0 = m$. Par conséquent,

$$M = \mathbb{C}[\partial_t, \partial_t^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]} G_0.$$

DÉFINITION 2.1.4. — *On appelle G_0 le réseau de Brieskorn du polynôme f.*

Comme l'a remarqué Malgrange [M, § 5], on peut traduire ce qui précède en termes de connexions sur $\mathbb{P}^1$ via une transformation de Fourier. Soit G la transformée de Fourier de M : c'est le $\mathbb{C}[\tau, \tau^{-1}]$-module libre de rang μ muni d'une action de ∂_τ obtenu en posant $\tau = \partial_t$ et $\partial_\tau = -t$. La transformée de Fourier G est par définition une connexion méromorphe dont les points singuliers sont 0 (régulier) et $+\infty$ (*a priori* irrégulier). Pour étudier nature du point singulier à l'infini on pose

$$\theta \overset{\text{déf}}{=\!=} \tau^{-1} = \partial_t^{-1}$$

(et donc $t = \theta^2 \partial_\theta$). Il résulte de ce qui précède que G_0 est un réseau de G, c'est-à-dire un $\mathbb{C}[\theta]$-sous-module libre de rang μ tel que

$$\mathbb{C}[\theta, \theta^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}[\theta]} G_0 = G.$$

Désormais, nous utiliserons librement la notation $\theta = \partial_t^{-1}$.

2.2. La V-Filtration et le spectre.

Soit $V_\bullet G$ la filtration de Malgrange-Kashiwara de G en $\tau = 0$. Dans notre situation, $V_\bullet G$ est l'unique filtration indexée par $\mathbb{Q}$ vérifiant les propriétés suivantes (voir aussi, par exemple, [S4, 3.1]) :

(i) $V_\bullet$ est croissante et $\bigcup_{\alpha\in\mathbb{Q}} V_\alpha G = G$;

(ii) pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $V_\alpha G$ est libre de rang μ sur $\mathbb{C}[\tau]$;

(iii) $\tau V_\alpha G \subset V_{\alpha-1} G$ (avec égalité si $\alpha < 0$) et $\partial_\tau V_\alpha G \subset V_{\alpha+1} G$;

(iv) $\tau\partial_\tau + \alpha$ est nilpotente sur $\mathrm{gr}_\alpha^V G$ ($\mathrm{gr}_\alpha^V \overset{\text{déf}}{=\!=} V_\alpha / \cup_{\beta<\alpha} V_\beta$).

Remarquons que comme τ est bijective sur G,

$$\theta : V_\alpha G \longrightarrow V_{\alpha+1} G$$

est bijective.

La filtration $V_\bullet$ induit une filtration sur $\Omega_f = G_0/\theta G_0$:

$$V_\alpha \Omega_f \overset{\text{déf}}{=\!=} V_\alpha G \cap G_0 / V_\alpha G \cap \theta G_0.$$

DÉFINITION 2.2.1. — *On appelle spectre de (G, G_0) l'ensemble, noté* spec_V, *des rationnels α tels que $\mathrm{gr}_\alpha^V(G_0/\theta G_0)$ ne soit pas nul, la multiplicité de chaque α étant égale à $\dim_{\mathbb{C}} \mathrm{gr}_\alpha^V(G_0/\theta G_0)$.*

En général il est délicat d'identifier ce spectre. Néammoins, et c'est ce qui motive le choix de cette filtration, si f est un polynôme non-dégénéré et commode par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini on peut donner son expression via la filtration de Newton (voir proposition 5.1.3 ci-dessous).

La filtration $V_\bullet$ définie ici a la même signification que celle utilisée dans le cas local à cette nuance près : on s'intéresse au comportement asymptotique d'intégrales du type $\int_\gamma e^{-\tau f}\omega$ quand $\tau \to 0$ (ce qui donne des informations quand f tend vers l'infini) et non pas quand $\tau \to \infty$. Ainsi, elle décrit algébriquement le développement asymptotique des sections de G quand $\tau \to 0$.

2.3. Très bonnes bases.

L'objet de cet article est d'expliciter des bases de G_0 définies de la manière suivante :

DÉFINITION 2.3.1. — *Soit $\mathcal{V}$ une base de G_0 sur $\mathbb{C}[\partial_t^{-1}]$. On dit que $\mathcal{V}$ est une très bonne base si il existe deux matrices $\mu \times \mu$ constantes A_0*

et A_1, la matrice A_1 étant de plus diagonale, son spectre coïncidant avec spec_V, *telles que la matrice de t dans cette base s'écrive*

$$A_0 + A_1\partial_t^{-1}.$$

Comme en 2.1 (dont on garde les notations), on peut reformuler cette définition en termes de connexion sur $\mathbb{P}^1$: comme on a

$$tG_0 \subset G_0 + \partial_t^{-1}G_0 + \sum_{j\geq 2} \partial_t^{-j}G_0,$$

on obtient, en utilisant l'identification $t = \theta^2\partial_\theta$,

$$\theta^2\partial_\theta G_0 \subset G_0 + \theta G_0 + \sum_{j\geq 2} \theta^j G_0.$$

L'existence de très bonnes bases pour le $\mathbb{C}[\theta]$-module G_0 implique entre autre que problème de Birkhoff [B] pour G_0

> *existe-t-il une base de G_0 telle que la matrice de $\theta^2\partial_\theta$ dans cette base s'écrive $A_0 + \theta A_1$ avec A_0 et A_1 constantes ?*

admet une solution (voir [M, th. 2.2] où ce problème est résolu dans certains cas).

Le lemme suivant précise le comportement de t par changement de base.

LEMME 2.3.2. — *Soit $\mathcal{U}$ une base de G_0 dans laquelle la matrice de t s'écrit $A_0 + \theta A_1$, avec A_0 matrice constante et $A_1 \in \mathcal{M}_\mu(\mathbb{C}[\theta])$. Soient $P \in \mathrm{GL}_\mu(\mathbb{C}[\theta])$ et $\mathcal{V} = P\mathcal{U}$. Alors la matrice de t dans la base $\mathcal{V}$ s'écrit $B_0 + \theta B_1$ avec*

$$B_0 + \theta B_1 = \theta^2\partial_\theta(P)P^{-1} + P(A_0 + \theta A_1)P^{-1}.$$

Si de plus A_1^0 et B_1^0 désignent respectivement les parties constantes de A_1 et B_1, on a $\mathrm{tr}\, B_1^0 = \mathrm{tr}\, A_1^0$.

Preuve. — Il suffit d'utiliser la relation $tP = Pt + \theta^2\partial_\theta(P)$ et de vérifier que

$$B_1^0 = P_0(A_1^0 - A_0P_0^{-1}P_1 + P_0^{-1}P_1A_0)P_0^{-1}$$

si $P = \sum_{j\geq 0} P_j\theta^j$ (P_j, $j \geq 0$, matrices constantes). □

3. E-bases

On donne dans cette se paragraphe une condition suffisante pour l'existence de très bonnes bases (théorème 3.2.1).

3.1. Définitions. Structure de l'action de t dans une E-base.

Soit $V_\bullet G$ la filtration de Malgrange-Kashiwara de G et spec_V l'ensemble de rationnels définis en 2.2.

DÉFINITION 3.1.1. — *On appelle E-base de G_0 toute base de G_0 sur $\mathbb{C}[\theta]$ qui se projette en une base de $\bigoplus_\alpha \mathrm{gr}_\alpha^V(G_0/\theta G_0)$.*

On choisit, pour chaque α dans spec_V, un sous-espace vectoriel

$$E_\alpha \subset V_\alpha G_0 := V_\alpha G \cap G_0$$

isomorphe, par la projection naturelle, à $\mathrm{gr}_\alpha^V(G_0/\theta G_0)$. On note

$$E = \bigoplus_{\mathrm{spec}_V} E_\alpha\,;$$

c'est un espace vectoriel de dimension μ sur $\mathbb{C}$.

La proposition suivante montre l'existence de E-bases.

PROPOSITION 3.1.2. — *Toute base de E sur $\mathbb{C}$ se relève en une E-base de G_0 sur $\mathbb{C}[\theta]$.*

Preuve. — Elle repose sur le lemme suivant.

LEMME 3.1.3. — *Pour tout α, on a*

$$V_\alpha G_0 = \sum_{\beta\le\alpha} E_\beta + \theta \sum_{\beta\le\alpha-1} E_\beta + \cdots + \theta^k \sum_{\beta\le\alpha-k} E_\beta + \cdots.$$

Preuve. — Par définition,

$$V_\alpha G_0 = \sum_{\beta\le\alpha} E_\beta + V_\alpha \theta G_0.$$

Comme de plus θ est strict pour V (c'est-à-dire $\theta V_{\alpha-1} = Im\theta \cap V_\alpha$), on en déduit

$$V_\alpha G_0 = \sum_{\beta\le\alpha} E_\beta + \theta V_{\alpha-1} G_0$$

et l'on conclut par récurrence sur α. □

D'après ce lemme toute base de E se relève en un système de générateurs de G_0 sur $\mathbb{C}[\theta]$. Comme $\bigoplus_\alpha \mathrm{gr}_\alpha^V(G_0/\theta G_0)$ est isomorphe à $G_0/\theta G_0$ ce système est libre sur $\mathbb{C}[\theta]$ ce qui achève la preuve de la proposition. □

Si $\omega \in G_0$, on note $\alpha(\omega)$ le plus grand rationnel α tel que la classe de ω dans $\mathrm{gr}_\alpha^V G_0$ ne soit pas nulle. Une E-base $\{\omega_1, \dots, \omega_\mu\}$ de G_0 est *ordonnée* si

$$\alpha(\omega_1) \leq \cdots \leq \alpha(\omega_\mu).$$

Nous considérerons toujours des E-bases ordonnées.

Si $\mathcal{U}$ est une E-base de G_0, on note $\mathcal{U}_\alpha$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{U}$ qui se projettent en une base de $\mathrm{gr}_\alpha^V(G/\theta G_0)$ et E_α l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ engendré par $\mathcal{U}_\alpha$. L'action de t dans une E-base quelconque de G_0 est précisée par le lemme suivant.

LEMME 3.1.4. — *Pour tout α, on a*

$$(t - \alpha\theta)E_\alpha \subset \sum_{\beta \leq \alpha+1} E_\beta + \theta \sum_{\beta \leq \alpha} E_\beta + \theta^2 \sum_{\beta \leq \alpha-1} E_\beta + \cdots.$$

Preuve. — Par definition on a $tV_\alpha G_0 \subset V_{\alpha+1} G_0$ donc, en utilisant le lemme 3.1.3,

$$(t - \alpha\theta)E_\alpha \subset \theta V_\alpha G_0 + V_{\alpha+1} G_0 \;=\; \sum_{\beta \leq \alpha+1} E_\beta + \theta \sum_{\beta \leq \alpha} E_\beta + \cdots.$$

D'où le résultat. $\square$

DÉFINITION 3.1.5. — *On dit que la E-base $\mathcal{U}$ vérifie la condition (B) si*

$$(t - \alpha\theta)E_\alpha \subset \sum_{\beta \leq \alpha+1} E_\beta + \theta \sum_{\beta < \alpha} E_\beta + \theta^2 \sum_{\beta < \alpha-1} E_\beta + \cdots.$$

EXEMPLE 3.1.6. — On suppose que $\theta\partial_\theta - \alpha$ induit 0 sur $\mathrm{gr}_V^\alpha G$ pour tout α. Alors toute E-base de G_0 vérifie la condition (B).

NOTATION 3.1.7. — *Soit S l'ensemble des $\alpha + \mathbb{Z}$, pour α dans* spec_V, *que l'on numérote par $k \in \mathbb{Z}$. On note a l'entier tel que*

$$\alpha_{k+a} = \alpha_k + 1.$$

On pose

$$E_k = \begin{cases} E_{\alpha_k} & \textit{si } \alpha_k \textit{ est dans le spectre,} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

On a donc $E = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} E_k$. On note D la matrice diagonale qui vaut $\alpha_k Id_{E_k}$ sur E_k.

DÉFINITION 3.1.8. — *Si $M : E \to E$ est une application linéaire, on dit qu'elle est homogène de degré ℓ si pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $ME_k \subset E_{k+\ell}$.*

Avec ces notations, on peut reformuler le lemme 3.1.4 et la définition 3.1.5 de la manière suivante :

PROPOSITION 3.1.9. — *Soit $\mathcal{U}$ une E-base de G_0. Alors la matrice de t dans cette base s'écrit*

$$A(\theta) = A^{(0)}_{\leq a} + \theta\big(D + A^{(1)}_{\leq 0}\big) + \cdots + \theta^{j+1} A^{(j+1)}_{\leq -aj} + \cdots$$

où $A_{\leq \ell}$ est somme de matrices homogènes de degré $\leq \ell$ et l'exposant dans les matrices A rappelle le degré en $\theta = \partial_t^{-1}$. Si de plus $\mathcal{U}$ vérifie la condition (B), on a

$$A(\theta) = A^{(0)}_{\leq a} + \theta(D + A^{(1)}_{\leq -1}) + \cdots + \theta^{j+1} A^{(j+1)}_{\leq -aj-1} + \cdots .$$

Dans ce cas, le coefficient de θ est une matrice triangulaire inférieure diagonalisable dont la diagonale coïncide avec le spectre de la filtration $V_\bullet$.

Remarquons que pour tout $j > 0$, les matrices $A^{(j+1)}_{\leq -aj}$ sont nilpotentes, triangulaires supérieures.

3.2. Une condition suffisante pour l'existence de très bonnes bases.

THÉORÈME 3.2.1. — *Soit $\mathcal{U}$ une E-base de G_0 vérifiant la condition (B),*

$$A(\theta) = A^{(0)}_{\leq a} + \theta\big(D + A^{(1)}_{\leq -1}\big) + \cdots + \theta^{j+1} A^{(j+1)}_{\leq -aj-1} + \cdots$$

la matrice de t dans cette base. On suppose qu'il existe une matrice Z diagonale telle que l'on puisse compléter $A^{(0)}_a$, Z en sl_2-triplet. Alors il existe une E-base $\mathcal{V}$ de G_0 dans laquelle la matrice de t s'écrit $B^{(0)}_{\leq a} + \theta D$. De plus, la matrice de changement de base de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{V}$ s'écrit comme un produit de matrices de la forme $\exp(-M_{<-aj}\theta^j)$ avec , pour tout j, $M_{<-aj}$ somme de matrices homogènes de degré strictement inférieur à $-aj$. En particulier, $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ se projettent en une même base de $\bigoplus_\alpha \mathrm{gr}^V_\alpha(G_0/\theta G_0)$.

REMARQUE 3.2.2. — Les valeurs propres de la matrice Z sont entières et Z vérifie $[Z, A^0_a] = -2A^0_a$. Si $A^0_a = 0$ on prend $Z = 0$.

Preuve. — La preuve présentée ici est due à C. Sabbah. Nous utiliserons le lemme suivant. Comme de coutume, on note $\mathrm{ad}\, D(M) := [D, M]$.

LEMME 3.2.3. — *Toute matrice homogène de degré $< -a\ell$ est dans l'image de* $\mathrm{ad}\, D + \ell\, \mathrm{Id}$.

Preuve. — Soit $e_{i,j}$ la matrice carré de rang μ ayant le coefficient 1 à la position (i,j), les autres coefficients valant 0. Si $M_{-a\ell-v}$ (où $v \geq 1$) une matrice (homogène) de degré $-a\ell - v < -a\ell$, elle s'écrit comme combinaison linéaire de matrices $e_{i,i-\ell-v}$. Pour montrer le lemme, il suffit de remarquer que $(\mathrm{ad}\, D + \ell\, \mathrm{Id})(e_{i,i-l-v}) = (\alpha_{i-a\ell-v} - \alpha_i + \ell) e_{i,i-\ell-v}$ et que par définition $\alpha_{i-a\ell-v} - \alpha_i + \ell \neq 0$. $\square$

Pour montrer le théorème, on montre (par récurrence) que pour tout $k \geq 1$, il existe une base de G_0 dans laquelle la matrice $A(\theta)$ de l'action de t a la forme

$$(H_k) \quad A(\theta) = A^{(0)}_{\leq a} + \theta D + \theta A^{(1)}_{\leq -k} + \theta^2 A^{(2)}_{\leq -a-k} + \cdots + \theta^\ell A^{(\ell)}_{\leq -a(\ell-1)-k} + \theta^{\ell+1} A^{(\ell+1)}_{\leq -a\ell-k} + \cdots.$$

Cette hypothèse est vraie pour $k = 1$: c'est la condition (B).

1) Traitons tout d'abord le cas $A^{(0)}_a = 0$. Pour montrer que (H_k) implique (H_{k+1}) on utilise une récurrence sur $\ell \geq 0$. On suppose que l'on a, pour $k \geq 1$ et $\ell \geq 0$,

$$(H_{k,\ell}) \quad A(\theta) = A^{(0)}_{<a} + \theta D + \theta A^{(1)}_{\leq -k-1} + \theta^2 A^{(2)}_{\leq -a-k-1} + \cdots + \theta^\ell A^{(\ell)}_{\leq -a(\ell-1)-k-1} + \theta^{\ell+1} A^{(\ell+1)}_{\leq -a\ell-k} + \cdots.$$

On veut éliminer le terme $\theta^{\ell+1} A^{(\ell+1)}_{-a\ell-k}$. Pour cela, on fait un changement de base du type $P = \exp(-\theta^\ell M_{-a\ell-k})$ avec $M_{-a\ell-k}$ homogène de degré $-a\ell - k$. On calcule ce changement entre autre grâce à la formule

$$(\exp M)L(\exp M)^{-1} = \exp(\operatorname{ad} M)(L).$$

La partie $\theta^2 \partial_\theta(P)P^{-1}$ du changement de base de la connexion se réduit à $-\ell\theta^{\ell+1} M_{-a\ell-k}$. La nouvelle matrice est

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= PA(\theta)P^{-1} + \theta^2\partial_\theta(P)P^{-1} \\ &= A(\theta) - \theta^\ell[M_{-a\ell-k}, A(\theta)] - \ell\theta^{\ell+1}M_{-a\ell-k} \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\theta^{2\ell}\big[M_{-a\ell-k}, [M_{-a\ell-k}, A(\theta)]\big] + \cdots. \end{aligned}$$

Si $\ell \neq 1$, le coefficient de θ^ℓ de cette matrice est

$$A^{(\ell)}_{\leq -a(\ell-1)-k-1} - [M_{-a\ell-k}, A^{(0)}_{<a}]$$

et celui de $\theta^{\ell+1}$ est

$$A^{(\ell+1)}_{-a\ell-k} - [M_{-a\ell-k}, D] - [M_{-a\ell-k}, A^{(1)}_{\leq -k-1}] - \ell M_{-a\ell-k}.$$

Maintenant,

- $[M_{-a\ell-k}, A^{(0)}_{<a}]$ est de degré strictement inférieur à $-a(\ell-1)-k$,
- $[M_{-a\ell-k}, A^{(1)}_{\leq -k-1}]$ est de degré strictement inférieur à $-a\ell - k$

et comme $\operatorname{ad} D + \ell \operatorname{Id}$ est surjectif sur les matrices de degré $< -a\ell$ on peut choisir $M_{-a\ell-k}$ telle que

$$A^{(\ell+1)}_{-a\ell-k} = [M_{-a\ell-k}, D] + \ell M_{-a\ell-k}.$$

Le cas $\ell = 1$ se traite de la même manière.

Si $A_a^{(0)} = 0$, on montre ainsi que (H_k) implique (H_{k+1}), d'où la première assertion du théorème.

2) Lorsque $A_a^{(0)} \neq 0$, le coefficient de θ^ℓ contient le terme

$$\theta^\ell [M_{-a\ell-k}, A_a^{(0)}]$$

qui est de degré $-a(\ell-1)-k$, et viole ainsi l'hypothèse de récurence $(H_{k,\ell})$ du point 1. Nous devons donc procéder de manière différente. Par hypothèse, il existe une matrice Z diagonale qui donne les poids de la filtration monodromique de $A_a^{(0)}$. On dit que M est une *matrice homogène de poids* w si

$$[Z, M] = wM.$$

Par définition, la matrice $A_a^{(0)}$ est de poids -2. Comme Z et D commutent, on peut regarder degré et poids simultanément. Par exemple $A_a^{(0)}$ est de degré a et de poids -2. Dans ce qui suit, on note en indice d'une matrice son degré puis son poids.

La raison pour introduire le poids est que le terme $[M_{-a\ell-k}, A_a^{(0)}]$ est de poids $w(M_{-a\ell-k}) - 2$.

LEMME 3.2.4. — *Pour pour tout $w \in \mathbb{Z}$ il existe une base de G_0 dans laquelle*

$$\begin{aligned}(H_{k,w}) \quad A(\theta) = A_a^{(0)} + \theta D + A_{<a}^{(0)} &+ \theta\big[A^{(1)}_{-k,\leq w} + A^{(1)}_{<-k}\big] \\ &+ \theta^2\big[A^{(2)}_{-a-k,\leq w+1} + A^{(2)}_{<-a-k}\big] + \cdots \\ &+ \theta^\ell\big[A^{(\ell)}_{-a(\ell-1)-k,\leq w+\ell} + A^{(\ell)}_{<-a(\ell-1)-k}\big] \\ &+ \theta^{\ell+1}\big[A^{(\ell+1)}_{-a\ell-k,\leq w+\ell+1} + A^{(\ell+1)}_{<-a\ell-k}\big] + \cdots .\end{aligned}$$

Preuve. — On montre le lemme par récurrence sur w. Pour montrer que $(H_{k,w})$ entraîne $(H_{k,w-1})$, on utilise une récurrence sur ℓ : on suppose que la matrice $A(\theta)$ a la forme

$$\begin{aligned}(H_{k,w,\ell}) \quad A(\theta) = A_a^{(0)} + \theta D + A_{<a}^{(0)} &+ \theta\big[A^{(1)}_{-k,\leq w-1} + A^{(1)}_{<-k}\big] \\ &+ \theta^2\big[A^{(2)}_{-a-k,\leq w} + A^{(2)}_{<-a-k}\big] + \cdots \\ &+ \theta^\ell\big[A^{(\ell)}_{-a(\ell-1)-k,\leq w+\ell-1} + A^{(\ell)}_{<-a(\ell-1)-k}\big] \\ &+ \theta^{\ell+1}\big[A^{(\ell+1)}_{-a\ell-k,\leq w+\ell+1} + A^{(\ell+1)}_{<-a\ell-k}\big] + \cdots .\end{aligned}$$

On veut éliminer le terme $\theta^{\ell+1}A^{(\ell+1)}_{-a\ell-k,w+\ell+1}$ qui est de degré $-a\ell-k$ et de poids $w+\ell+1$. Comme en 1), on fait un changement de base du type

$$P=\exp\bigl(-\theta^{\ell}M_{-a\ell-k,w+\ell+1}\bigr).$$

La matrice de t dans la nouvelle base s'écrit

$$A(\theta)'=PA^{(0)}_{a}P^{-1}+P(A(\theta)-A^{(0)}_{a})P^{-1}+\theta^2\partial_\theta(P)P^{-1}.$$

On a

$$\begin{aligned}PA^{(0)}_{a}P^{-1}&=A^{(0)}_{a}-\theta^{\ell}[M_{-a\ell-k,w+\ell+1},A^{(0)}_{a}]\\&\qquad+\tfrac{1}{2}\theta^{2\ell}\bigl[M_{-a\ell-k,w+\ell+1},[M_{-a\ell-k,w+\ell+1},A^{(0)}_{a}]\bigr]+\cdots.\end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite est de type

$$\bigl(-a(\ell-1)-k,w+\ell-1\bigr),$$

le troisième de degré $-a(2\ell-1)-2k<-a(2\ell-1)-k$ (car $k\geq 1$), *etc.*

De même

$$\begin{aligned}P\bigl(A(\theta)-A^{(0)}_{a}\bigr)P^{-1}&+\theta^2\partial_\theta(P)P^{-1}\\&=A(\theta)-A^{(0)}_{a}-\theta^{\ell}[M_{-a\ell-k,w+\ell+1},A(\theta)-A^{(0)}_{a}]\\&\quad-\ell\theta^{\ell+1}M_{-a\ell-k,w+\ell+1}\\&\quad+\tfrac{1}{2}\theta^{2\ell}\bigl[M_{-a\ell-k,w+\ell+1},[M_{-a\ell-k,w+\ell+1},A(\theta)-A^{(0)}_{a}]\bigr]+\cdots.\end{aligned}$$

Si $\ell\neq 1$,

- le coefficient de θ^{ℓ} de degré $-a(\ell-1)-k$ est $A^{(\ell)}_{-a(\ell-1)-k,w+\ell-1}$
- celui de $\theta^{\ell+1}$, de type $(-a\ell-k,w+\ell+1)$, est (puisque D est de poids 0)

$$A^{(\ell+1)}_{-a\ell-k,w+\ell+1}-[M_{-a\ell-k,w+\ell+1},D]-\ell M_{-a\ell-k,w+\ell+1}.$$

De la même manière qu'en 1), on peut choisir la matrice $M_{-a\ell-k,w+\ell+1}$ de sorte que cette dernière expression s'annule. On termine la preuve du lemme en remarquant que le coefficient de $\theta^{2\ell}$ est de degré strictement inférieur à $-a(2\ell-1)-k$, *etc.*

Le lemme précédent montre entre autre que (H_k) implique (H_{k+1}) ce qui achève la preuve du théorème. $\square$

EXEMPLE 3.2.5. — On suppose que $\theta\partial_\theta-\alpha$ induit 0 sur $\operatorname{gr}^{\alpha}_{V}G$ pour tout $\alpha\in\operatorname{spec}_V$. Alors les conclusions du théorème sont vérifiées pour toute E-base de G_0 : en effet, toute E-base vérifie la condition (B) et l'on a $A^0_a=0$.

4. Le théorème

Rappelons que toutes les E-bases de G_0 considérées sont ordonnées (§ 3.1). Le théorème principal de cet article est le suivant.

THÉORÈME 4.0.6. — *Soient f une fonction polynomiale modérée et $\mathcal{U}$ une E-base de G_0. Il existe une très bonne base $\mathcal{V}$ de G_0, une matrice inversible $M_{\leq 0}$ et, pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, des matrices $M_{\leq -ai}$ (somme de matrices homogènes de degré inférieur ou égal à $-ai$) telles que la matrice de passage de la base $\mathcal{U}$ à la base $\mathcal{V}$ s'écrive*

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_{\leq -ai} \partial_t^{-i}.$$

REMARQUES 4.0.7.

(i) La matrice de t dans la base $\mathcal{V} = \{v_i\ ;\ 1 \leq i \leq \mu\}$ s'écrit donc

$$A_0 + A_1 \partial_t^{-1},$$

la matrice A_0 (resp. A_1) étant constante (resp. diagonale, ses valeurs propres coïncidant avec le spectre défini en 2.2.1). Par définition, A_0 représente la multiplication par f sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel

$$\Omega^n / \mathrm{d}f \wedge \Omega^{n-1} \stackrel{\text{déf}}{=\!=} \Omega_f$$

dans la base $\mathrm{pr}(\mathcal{V}) = \{\mathrm{pr}(v_i)\ ;\ 1 \leq i \leq \mu\}$ (où pr désigne la projection $G_0 \to \Omega_f$). Ses valeurs propres sont les valeurs critiques du polynôme f et A_0 n'est pas nilpotente en général.

(ii) Nous savons déjà que de telles bases existent, par exemple lorsque $\partial_t t - \alpha$ induit 0 sur $\mathrm{gr}_V^\alpha G$ pour tout $\alpha \in \mathrm{spec}_V$ (exemple 3.2.5). Mieux : étant donnée une E-base quelconque de G_0, la preuve du théorème 3.2.1 nous montre comment les construire explicitement.

COROLLAIRE 4.0.8. — *Soit $\mathcal{U}$ une E-base quelconque de G_0. Si la matrice de t dans cette base s'écrit $B_0 + B_1 \partial_t^{-1}$ (avec $B_1 \in \mathrm{GL}_\mu(\mathbb{C}[\partial_t^{-1}])$), la trace de B_1 est égale à la somme des éléments de* spec_V *(comptés avec multiplicités).*

Preuve. — De la proposition 3.1.9, on déduit que la trace de B_1 est égale à la trace de sa partie constante B_1^0. Le résultat se déduit alors du lemme 2.3.2 et du théorème précédent. □

4.1. Preuve du théorème.

L'idée est de montrer qu'à partir d'une E-base de G_0, on peut en construire une qui vérifie les conditions du théorème 3.2.1. Rappelons que l'on a posé $\theta = \partial_t^{-1}$ et qu'avec ces notations $\theta \partial_\theta = \partial_t t$.

4.1.1. Préliminaires. — Soit $H = V_1G/V_0G$: c'est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension μ muni d'une action de $\theta\partial_\theta$. L'espace H hérite d'une filtration V : $V_\alpha H = V_\alpha G/V_0G$. On a

$$\operatorname{gr}_\alpha^V H = \operatorname{gr}_\alpha^V G$$

pour $\alpha \in]0,1]$ et par définition $N_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \theta\partial_\theta - \alpha$ est nilpotente sur $H_\alpha \overset{\text{déf}}{=} \operatorname{gr}_\alpha^V H$.

Soit $\alpha \in \operatorname{spec}_V$. On note $\overline{\alpha}$ l'unique rationnel appartenant à $]0,1]$ tel que $\alpha - \overline{\alpha} = p \in \mathbb{N}$ et $\overline{\operatorname{spec}_V} = \{\overline{\alpha}\,;\ \alpha \in \operatorname{spec}_V\}$.

Si u est un élément de G, soit $u = \sum_j u_j$, $u_j \in \operatorname{gr}_V^{\overline{\alpha}_j + p_j} G$, sa décomposition en éléments homogènes ($\overline{\alpha}_j \in]0,1]$). On note

$$\bar{u} = \sum_j \theta^{-p_j} u_j.$$

LEMME 4.1.1. — *Si $\mathcal{U} = \{u_i\,;\ 1 \leq i \leq \mu\}$ est une E-base de G_0, la famille $\overline{\mathcal{U}} = \{\bar{u}_i\,;\ 1 \leq i \leq \mu\}$ est une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel H.*

Preuve. — Elle résulte de ce que $V_\alpha G = V_\alpha G_0 + \theta^{-1} V_{\alpha+1} G_0 + \cdots$. $\square$

Pour $\alpha \in \overline{\operatorname{spec}_V}$, on définit $F^p H_\alpha$ comme l'espace vectoriel engendré par $\{v \in H_\alpha\,;\ \theta^p v \in G_0\}$. On définit alors une filtration (croissante) F sur H en posant

$$F^p H = \bigoplus_{\overline{\operatorname{spec}_V}} F^p H_\alpha.$$

(On peut, si on le souhaite, travailler avec une filtration décroissante en considérant F_{n-p} au lieu de F^p.)

LEMME 4.1.2. — *Soit $\alpha \in \overline{\operatorname{spec}_V}$. Alors N_α $(= \theta\partial_\theta - \alpha)$ induit un homomorphisme*

$$N_{\alpha,p}^F : \operatorname{Gr}_p^F H_\alpha \longrightarrow \operatorname{Gr}_{p+1}^F H_\alpha.$$

Preuve. — Si $x \in \operatorname{Gr}_p^F H_\alpha$, on a $N_{\alpha,p}^F(x) = \theta\partial_\theta x$ modulo F_p. $\square$

Soient $N = \bigoplus_\alpha N_\alpha$ l'opérateur nilpotent de $\bigoplus_\alpha H_\alpha$ qui vaut N_α sur H_α et N^F l'opérateur induit sur $\operatorname{Gr}^F H$ (on a $N^F = \bigoplus_\alpha N_\alpha^F$ avec $N_\alpha^F = \bigoplus_p N_{\alpha,p}^F$).

Le résultat clef est le suivant :

LEMME 4.1.3. — *Le morphisme N et toutes ses puissances sont strictement compatibles avec la filtration F (i.e. $N^k(F^p) = \mathrm{Im}(N^k) \cap F^{p+k}$ pour tous p, k).*

Preuve. — Elle résulte de ce que $\bigoplus_{0<\alpha\leq 1} F^\bullet H_\alpha$ est la filtration de Hodge d'une structure de Hodge mixte pour laquelle la filtration par le poids $W_\bullet$ satisfait $NW_\bullet \subset W_{\bullet-2}$. Ceci est montré en [S, cor. 13.3]. □

REMARQUES 4.1.4.

(i) Du lemme précédent, on tire que N et N^F ont même structure de Jordan.

(ii) La multiplication par f sur $G_0/\theta G_0 := \Omega_f$ envoie $\mathrm{Gr}_V^\alpha \Omega_f$ dans $\mathrm{Gr}_V^{\alpha+1} \Omega_f$ et définit un endomorphisme (gradué, de degré 1) nilpotent $\{f\} : \mathrm{Gr}_V \Omega_f \to \mathrm{Gr}_V \Omega_f$. De la même manière qu'en [Ss, th. 7.1], on montre que $\{f\}$ et N^F et par conséquent $\{f\}$ et N ont même structure de Jordan.

4.1.2. La preuve. — Soit $\{w_1, \ldots, w_\mu\}$ des n-formes (que l'on suppose sans perdre de généralité monomiales, c'est-à-dire de la forme $u\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_n$ où u est un monôme de $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$) qui se projettent en une base de $\bigoplus_\alpha \mathrm{gr}_\alpha^V(G_0/\theta G_0)$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, on note u_i la classe de w_i dans G_0. Alors $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_\mu\}$ une E-base de G_0 (proposition 3.1.2). La famille $\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{u}_i\,;\ 1 \leq i \leq \mu\}$ est une base de H (lemme 4.1.1). Pour $\alpha \in \overline{\mathrm{spec}}_V$ soit $\overline{\mathcal{U}}_\alpha$ l'ensemble des éléments de $\overline{\mathcal{U}}$ appartenant à H_α. Alors, avec les notations du § 3.1, parce que $\theta^{-p}E_{\alpha+p} = \mathrm{Gr}_p^F H_\alpha$, $\overline{\mathcal{U}}_\alpha$ induit aussi une base (notée de même $\overline{\mathcal{U}}_\alpha$) de $\mathrm{Gr}^F H_\alpha$. On note

$$J_\alpha^F = \{\overline{U}_i, \ldots, (N_\alpha^F)^{k_i-1}(\overline{U}_i), 1 \leq i \leq r\}$$

une base de $\mathrm{Gr}^F H_\alpha$ dans laquelle la matrice de N_α^F est sous forme de Jordan ($(N_\alpha^F)^{k_i}(\overline{U}_i) = 0$ pour tout i). En particulier, si les bases J_α^F et $\overline{\mathcal{U}}_\alpha$ sont convenablement ordonnées, il existe une matrice inversible Q_α, diagonale par blocs, telle que $J_\alpha^F = Q_\alpha \overline{\mathcal{U}}_\alpha$. On exprime ceci en écrivant $Q_\alpha = \bigoplus_p Q_\alpha^p$ où Q_α^p est la matrice d'un automorphisme de $\mathrm{Gr}_p^F H_\alpha$.

LEMME 4.1.5. — *Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$. Il existe un élément U_i de H_α dont la classe dans $\mathrm{Gr}^F H_\alpha$ coïncide avec $\overline{U}_i$ et tel que $N_\alpha^{k_i}(U_i) = 0$.*

Preuve. — On suppose que $\overline{U}_i \in \mathrm{Gr}_p^F H_\alpha$. Comme $(N_\alpha^F)^{k_i}(\overline{U}_i) = 0$ on a, dans H_α, $N_\alpha^{k_i}(\overline{U}_i) = V_i$ avec $V_i \in F^{k_i+p-1}H_\alpha$. Si $V_i \neq 0$, comme N^{k_i}

est strict (lemme 4.1.3), on a $p \geq 1$ et il existe $W_i \in F^{p-1}H_\alpha$ tel que $V_i = N_\alpha^{k_i}(W_i)$. Il suffit donc de poser $U_i = \overline{U}_i - W_i$. ▯

On note alors

$$J_\alpha = \{U_i, \ldots, N_\alpha^{k_i-1}(U_i)\,;\ 1 \leq i \leq r\}.$$

C'est une base de H_α dans laquelle la matrice de N_α est sous forme de Jordan. Soit $i \in \{1, \ldots, r\}$, $U_i \in J_\alpha$ comme ci-dessus : $U_i \in F^p H_\alpha$ et si $U_i = \overline{U}_i^p + \overline{U}_i^{p-1} + \cdots$ est sa décomposition en éléments homogènes, $\overline{U}_i^j \in \operatorname{Gr}_j^F H_\alpha$, on a $\overline{U}_i^p \neq 0$ dans $\operatorname{Gr}_p^F H_\alpha$. On pose

$$U_i = \theta^{-p}(e_i^0)$$

où e_i^0 est un élément de G_0 de poids $\alpha + p$. Pour tout $1 \leq j \leq k_i - 1$, on a $N_\alpha^j(U_i) \in F^{p+j}H_\alpha$ et si

$$N_\alpha^j(U_i) = \overline{U}_i^{p+j} + \overline{U}_i^{p+j-1} + \cdots$$

est sa décomposition en éléments homogènes, on a $\overline{U}_i^{p+j} \neq 0$ dans $\operatorname{Gr}_{p+j}^F H_\alpha$. On pose

$$N_\alpha^j(U_i) = \theta^{-(p+j)}(e_i^j)$$

où e_i^j est un élément de G_0 de poids $\alpha + p + j$. On construit ainsi une famille $\{e_i^0, \ldots, e_i^{k_i-1}\,;\ 1 \leq i \leq r\}$ d'éléments de G_0. Comme on a

$$(\theta\partial_\theta - \alpha)N_\alpha^j(U_i) = N_\alpha^{j+1}(U_i)$$

dans H_α, on en déduit

$$(t - (\alpha + p + j)\theta)e_i^j = e_i^{j+1} \tag{1}$$

modulo $V_{<\alpha+p+j+1}G_0$ pour $0 \leq j \leq k_i - 2$ et

$$(t - (\alpha + k_i - 1)\theta)e_i^{k_i-1} = 0 \tag{2}$$

modulo $V_{<\alpha+p+k_i}G_0$.

En itérant cette construction pour tout $\alpha \in \overline{\operatorname{spec}}_V$, on obtient une famille $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_\mu\}$ d'éléments de G_0, que l'on ordonne comme expliqué au § 2. Par construction, $\mathcal{E}$ est une E-base de G_0 : en effet, $\mathcal{U}$ l'est et si l'on écrit $\mathcal{E} = P\mathcal{U}$ on a

$$P = P_0 + P_{-a}\theta + \cdots + P_{-ak}\theta^k + \cdots$$

avec P_{-aj} homogène de degré $-aj$ (notation 3.1.7 et définition 3.1.8) pour tout $j \geq 0$, P_0 étant de plus diagonale par blocs, inversible et laisse stable chaque E_β pour $\beta \in \operatorname{spec}_V$ (si $\beta = \bar{\beta} + p$ comme en 4.1.1, la restriction de P_0 à E_β vaut $Q_{\bar{\beta}}^p$, cette dernière matrice étant définie juste avant le lemme 4.1.5). Résumons :

Proposition 4.1.6.

(i) *$\mathcal{E}$ est une E- base de G_0 vérifiant la condition (B),*

(ii) *si $A_0 + A_1\theta$ (A_0 constante et $A_1 \in \mathrm{Gl}(\mu, \mathbb{C}[\theta])$) désigne la matrice de t dans cette base on a*

$$A_0 = A_a^{(0)} + A_{<a}^{(0)},$$

la matrice $A_a^{(0)}$ (homogène de degré a) vérifiant :

- *$A_a^{(0)}(j,i) = 1$ si $(t - \alpha\theta)e_i = e_j$ modulo $V_{<\alpha+1}G_0$,*
- *$A_a^{(0)}(j,i) = 0$ sinon.*

Preuve. — Il reste à vérifier que $\mathcal{E}$ vérifie la condition (B), ce qui résulte immédiatement des égalités (1) et (2) ci-dessus. □

Le théorème 4.0.6 résulte maintenant du théorème 3.2.1 si l'on montre l'existence de la matrice Z. Si $A_a^{(0)} = 0$ on prend $Z = 0$. Supposons $A_a^{(0)} \neq 0$: soit L la matrice de N dans la base $\bigcup_\alpha J_\alpha$ de H ; cette matrice est nilpotente et sous forme de Jordan. Il existe donc une matrice Z' diagonale, dont les valeurs propres sont entières, telle que $[Z', L] = -2L$ (rappelons que si L a un seul bloc de Jordan (de taille μ), les valeurs propres de Z' sont $\mu - 1, \mu - 3, \ldots, -\mu + 1$ et le cas général s'en déduit). Par construction, la matrice $A_a^{(0)}$ est égale, à une permutation près, à la matrice L : il existe une matrice P inversible (la matrice de la permutation) telle que $A_a^{(0)} = P^{-1}LP$. Il suffit de prendre $Z = P^{-1}Z'P$. Tout est maintenant prouvé. □

5. Le cas non-dégénéré et commode

Nous supposons dans ce paragraphe que le polynôme f est non dégénéré et commode par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini [K]. Un tel polynôme est modéré [Br, prop. 3.4]. L'objet de ce paragraphe est de concrétiser les résultats précédents : nous donnons en particulier tous les outils nécessaires aux calculs. Dans tout ce qui suit, on note

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n.$$

5.1. Les outils.

Pour une face Γ de dimension $n-1$ du polyèdre de Newton (à l'infini) du polynôme f ne contenant pas l'origine,

$$L_\Gamma = \sum_{i=1}^{n} b_{i,\Gamma} x_i$$

désigne la forme linéaire à coefficients rationnels qui vaut 1 sur Γ. Si $u \in \mathbb{C}[x]$, on note

$$\alpha_\Gamma(u) = \max_a L_\Gamma(a+1)$$

où $a \in \mathbb{N}^n$ est l'exposant d'un monôme de u et

$$\alpha(u) = \max_\Gamma \alpha_\Gamma(u).$$

De manière analogue, on définit

$$\alpha'_\Gamma(u) = \max_a L_\Gamma(a) \quad \text{et} \quad \alpha'(u) = \max_\Gamma \alpha'_\Gamma(u).$$

Remarquons que $\alpha'(f) = 1$.

Soit Ω^n l'espace des n-formes différentielles à coefficients polynomiaux. Pour $\alpha \in \mathbb{Q}$, on note

$$\mathcal{N}_\alpha \Omega^n = \{u\,\mathrm{d}x\,;\ \alpha(u) \le \alpha\}.$$

Ceci définit une filtration croissante de Ω^n par des espaces vectoriels de dimension finie. On définit aussi

$$\mathcal{N}_{<\alpha}\Omega^n = \{u\,\mathrm{d}x\,;\ \alpha(u) < \alpha\} \quad \text{et} \quad \Omega^n_\alpha = \mathcal{N}_\alpha\Omega^n / \mathcal{N}_{<\alpha}\Omega^n.$$

Si $\alpha(u) = \alpha$, $\mathrm{in}(udx)$ (la *partie initiale*) désigne la classe de $u\,\mathrm{d}x$ dans Ω^n_α. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$. La notation $\mathcal{N}_\alpha G_0$ désigne l'image de $\mathcal{N}_\alpha \Omega^n$ dans G_0. Ceci définit une filtration croissante sur G_0 et sur G si l'on pose

$$\mathcal{N}_\alpha G = \sum_{j \ge 0} \theta^{-j} \mathcal{N}_{\alpha+j} G_0.$$

Cette filtration est appelée *filtration de Newton.* D'après le lemme de division [D, lemme 2.2.1], l'action de θ est stricte pour $\mathcal{N}$. Remarquons de plus que $t\mathcal{N}_\alpha G \subset \mathcal{N}_{\alpha+1} G$ et $\partial_t \mathcal{N}_\alpha G \subset \mathcal{N}_{\alpha-1} G$.

Le spectre de Newton de f, noté $\mathrm{spec}_{\mathcal{N}}(f)$, est le spectre de la filtration de Newton définie sur $G_0/\theta G_0$, c'est-à-dire l'ensemble des rationnels α, comptés avec multiplicité, tels que $\mathrm{gr}^V_\alpha(G_0/\theta G_0)$ soit non nul. Rappelons que dans cette situation $\mathrm{spec}_{\mathcal{N}}(f)$ est contenu dans $]0, n[$ et qu'il est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}n$ (voir [D, prop. 7.3.3]).

La proposition suivante permet de préciser la structure de l'opérateur t dans une E-base quelconque de G_0 et fournit l'analogue explicite de la proposition 3.1.9. Comme de coutume, on note $\Gamma(u)$ le nombre de faces Γ pour lesquelles $\alpha_\Gamma(u) = \alpha(u)$ et si $u_i \in G_0$, on note $\Gamma(u_i)$ l'entier $\max\{\Gamma(u)\,;\ u\,\mathrm{d}x \in \Omega^n,\ [u\,\mathrm{d}x] = u_i\}$.

PROPOSITION 5.1.1. — *Soit* $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_\mu\}$ *une* E*-base de* G_0. *Pour tout* $1 \leq i \leq \mu$, *on a*

$$tu_i = \alpha(u_i)\theta u_i + \sum_{\substack{0 \leq k \leq [\alpha(u_i)]+1 \\ 1 \leq j \leq \mu}} a_k^{ij}\theta^k u_j$$

avec $a_k^{ij} \in \mathbb{C}$ *et* $\alpha(u_j) \leq \alpha(u_i) + 1 - k$ *pour tout* $1 \leq j \leq \mu$ *(la notation* $[x]$ *désigne la partie entière de* x*). Ces inégalités deviennent strictes en particulier si* $\Gamma(u_i) = 1$.

Preuve. — Soit Γ une face de dimension $n-1$ du polyèdre et $B_\Gamma = (b_{1,\Gamma}, \ldots, b_{n,\Gamma})$. On note

$$\chi_\Gamma = \sum_{j=1}^{n} b_{j,\Gamma} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad \text{et} \quad h_\Gamma = \chi_\Gamma(f) - f.$$

Si $u \in \mathbb{C}[x]$ on a, pour toute face Γ de dimension $n-1$ du polyèdre du polyèdre de Newton de f telle que $\alpha_\Gamma(u) = \alpha(u)$ et modulo d_f,

$$(*) \qquad (t - \alpha(u)\theta)u\,\mathrm{d}x = \big[uh_\Gamma + \theta(-\alpha'(u)u + \chi_\Gamma(u))\big]\,\mathrm{d}x$$

avec de plus les inégalités

$$\alpha_\Gamma(uh_\Gamma) < \alpha(u) + 1,\ \alpha(uh_\Gamma) \leq \alpha(u) + 1,\ \alpha\big(\alpha'(u)u - \chi_\Gamma(u)\big) \leq \alpha(u).$$

Il suffit, en utilisant [D, lemme 2.2.1], de diviser uh_Γ (modulo d_f, on a $uh_\Gamma\,\mathrm{d}x = v\,\mathrm{d}x + \theta(w\,\mathrm{d}x)$ avec $[v\,\mathrm{d}x]$ dans $\mathcal{N}_{\leq \alpha(u)+1}G_0$ et $[w\,\mathrm{d}x]$ dans $\mathcal{N}_{\leq \alpha(u)}G_0$) et $-\alpha'(u)u + \chi_\Gamma(u)$ pour obtenir l'égalité annoncée. On a aussi $k \leq [\alpha(u_i)] + 1 (\leq n)$ puisque si $k > [\alpha(u_i)] + 1$ on a $\alpha(u_j) < 1$ et donc u_j est irréductible (u_j correspond à une forme « sous-diagramme »). Et si $\Gamma(u_i) = 1$, les inégalités deviennent strictes car $\alpha(u_i h_\Gamma) < \alpha(u_i) + 1$. □

Avec les notations de la proposition 3.1.9, on obtient :

COROLLAIRE 5.1.2. — *Si* $\Gamma(u_i) = 1$ *pour tout* $i \in \{1, \ldots, \mu\}$, *la* E*-base* $\mathcal{U} = \{u_1, \ldots, u_\mu\}$ *vérifie la condition* (B) *et la matrice* $A_a^{(0)}$ *est nulle.*

La proposition suivante motive le choix de la V-filtration définie en 2.2.

PROPOSITION 5.1.3 (voir [S, th. 12.1 et lemme 12.2]). — *La filtration* $\mathcal{N}_\bullet G$ *est égale à la filtration* $V_\bullet G$ *et le spectre de Newton de* f *est égal au spectre* spec_V *de* (G, G_0).

Idée de la preuve. — Il s'agit essentiellement de montrer que (comme dans le cas d'une singularité isolée [S3], [KV]) la filtration $\mathcal{N}$ vérifie les conditions de 2.2 et de conclure par unicité. Ceci est fait en utilisant [D, lemme 2.2.1] et la formule (*) donnée dans la preuve de la proposition 5.1.1. □

REMARQUES 5.1.4.

(i) En dimension 2, le spectre de Newton de f est entièrement décrit par le «papillon d'Arnold» [D, § 3].

(ii) Si f est un polynôme de Laurent non dégénéré commode par rapport à son polyèdre de Newton (à l'infini), on définit de la même manière une filtration de Newton sur l'anneau $\mathbb{C}[x, x^{-1}]$ (et donc un spectre noté aussi $\operatorname{spec}_{\mathcal{N}}(f)$), les deux résultats ci dessus restant inchangés. Remarquons néammoins que, dans cette situation, ∂_t n'est pas inversible sur M et que $\operatorname{spec}_{\mathcal{N}}(f)$ n'est plus a priori contenu dans $]0, n[$.

5.2. Quelques cas spéciaux.

PROPOSITION 5.2.1. — *Soit f un polynôme quasi-homogène. Alors toute E-base homogène (en particulier monomiale) Ω de G_0 est une très bonne base et la matrice de t dans cette base s'écrit θA_1.*

Preuve. — Elle résulte de la preuve de la proposition précédente : il suffit de remarquer que $h_\Gamma = 0$ et que $-\alpha'(u)u + \chi_\Gamma(u) = 0$ si u est homogène. □

Soit $m = (m_1, \ldots, m_n)$ un système de poids rationnels strictement positifs. On dit qu'un polynôme f est à *singularité m-isolée* (ou *semi-quasi-homogène*) si sa partie initiale relative à m (*i.e.* sa composante de poids maximal) est à singularité isolée. Pour un tel polynôme on obtient des très bonnes bases en utilisant la première partie de la preuve du théorème 3.2.1. En effet,

PROPOSITION 5.2.2. — *Soit f un polynôme à singularité m-isolée. Toute E-base de G_0 vérifie la condition (B) et la matrice $A_a^{(0)}$ calculée dans cette base est nulle.*

Preuve. — Il suffit d'appliquer le corollaire 5.1.2. □

Comme corollaire, on obtient un résultat de «type Malgrange» [M]. Soit $m = (m_1, \ldots, m_n)$ un système de poids comme ci dessus et f un polynôme quasi-homogène de poids m et de degré 1.

COROLLAIRE 5.2.3. — *Soit f_λ une déformation à singularité m-isolée de f et G_0 (resp. G_0^λ) le réseau de Brieskorn associé à f (resp. f_λ). Soit $\mathcal{U}$ une E-base homogène de G_0. Il existe une unique E_λ-base $\mathcal{U}_\lambda$ de G_0^λ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$;

(ii) *la matrice de t dans la base $\mathcal{U}_\lambda$ s'écrit*

$$A_0(\lambda) + A_1\theta$$

où $A_0(\lambda)$ est une matrice à coefficients polynomiaux en λ telle que $A_0(0) = 0$ et où A_1 est une matrice diagonale dont les éléments coïncident avec $\mathrm{spec}_{\mathcal{N}}(f)$;

(iii) *Les parties initiales des éléments de $\mathcal{U}_\lambda$ coïncident avec les éléments de $\mathcal{U}$.*

Preuve. — Soient $g_1(x), \ldots, g_\mu(x)$ des monômes tels que

$$\{g_1(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, g_\mu(x)\,\mathrm{d}x\}$$

se projettent en une base de $\bigoplus_\alpha \mathrm{gr}_\alpha^V \Omega_f$ sur $\mathbb{C}$ (cette famille fournit donc une base de Ω_f sur $\mathbb{C}$). On peut écrire

$$f_\lambda = f + \sum_{i \mid \alpha'(g_i(x)) \leq 1} \lambda_i g_i(x)$$

et supposer que $\lambda_i = 0$ pour $\alpha'(g_i(x)) = 1$ en remplacant f par $f + \sum_{i \mid \alpha'(g_i(x))=1} \lambda_i g_i(x)$. Dans ces conditions, si $\mathcal{U}$ est la E-base de G_0 induite par la base $\{g_i(x)\,\mathrm{d}x\,;\ 1 \leq i \leq \mu\}$, $\mathcal{U}$ est aussi une E $(= E_\lambda)$-base de G_0^λ et d'après le théorème 3.2.1, il existe une base de G_0^λ, notée $\mathcal{U}_\lambda$, telle que dans cette base la matrice de t s'écrive

$$A_0(\lambda) + A_1.$$

De plus, $\mathcal{U}_\lambda = P(\lambda)\,\mathcal{U}$ (où $P(\lambda)$ est une matrice à coefficients polynomiaux en λ telle que $P(0) = I$ d'après la preuve du théorème 3.2.1),

$$P(\lambda) = P_0(\lambda) + P_1(\lambda)\theta + \cdots,$$

la diagonale de $P_0(\lambda)$ (qui est une matrice triangulaire inférieure) coïncidant avec l'identité. Comme $A_0(\lambda) = P_0(\lambda) A_0 P_0^{-1}(\lambda)$, cette matrice est à coefficients polynomiaux en λ. Il reste à vérifier l'unicité de la E_λ-base $\mathcal{U}_\lambda$, ce qui est immédiat car si u_i et v_i sont deux éléments de G_0 ayant la même partie initiale et vérifiant $tu_i = (\ ) + \alpha_i\theta u_i$ et $tv_i = (\ ) + \alpha_i\theta v_i$ on a en particulier $t(u_i - v_i) = (\ ) + \alpha_i\theta(u_i - v_i)$. D'après la proposition 5.1.1, ceci impose que $\omega_i = \eta_i$ car $\alpha(\omega_i - \eta_i) < \alpha_i$. □

5.3. Exemples.

On écrit une base comme un vecteur colonne : les matrices considérées ci-dessous sont les transposées des matrices usuelles considérées jusqu'à présent.

Pour trouver des très bonnes bases du réseau de Brieskorn, on procède de la manière suivante :

1) on détermine $\operatorname{spec}_{\mathcal{N}}(f)$ et une E-base de G_0 ;

2) on explicite l'action de t dans cette base : ceci se fait au moyen de la proposition 5.1.1 ;

3) on en déduit les matrices nilpotentes N_α ($\alpha \in \overline{\operatorname{spec}}_N(f)$) définies dans le lemme 4.1.2 puis la base $\mathcal{E}$ construite en proposition 4.1.6 ;

4) enfin, on utilise le théorème 3.2.1 et sa preuve.

Exemple 5.3.1. — Soit $f_\lambda(x,y) = x^3 + y^3 + \lambda xy$. On a $\mu(f) = 4$ et $\operatorname{spec}_{\mathcal{N}} = \{\frac{2}{3}, 1, 1, \frac{4}{3}\}$. Une E-base $\mathcal{U}$ de G_0^λ est donnée par les classes des formes

$$\{1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\}.$$

La proposition 5.1.1 donne

$$\mathrm{t}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{3} \\ 0 & \frac{\lambda^3}{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^3}{27} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda^3}{27} \end{pmatrix} \mathcal{U} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\lambda^2}{27} & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \partial_{\mathrm{t}}^{-1}\mathcal{U}.$$

Si $\lambda = 0$, le polynôme f est quasi-homogène et on a, dans $G_0 (= G_0^0)$,

$$t\mathcal{U} = A_1 \theta \mathcal{U}$$

avec A_1 diagonale, $\operatorname{spec} A_1 = \{\frac{2}{3}, 1, 1, \frac{4}{3}\}$. Posons $\mathcal{U}_\lambda = \{1, x, y, xy - \frac{\lambda^2}{18}\}$:

$$\mathcal{U}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\lambda^2}{18} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{U}.$$

Alors

$$t\mathcal{U}_\lambda = A_0(\lambda)\mathcal{U}_\lambda + A_1 \partial_t^{-1} \mathcal{U}_\lambda$$

avec A_1 diagonale, $\operatorname{spec} A_1 = \{\frac{2}{3}, 1, 1, \frac{4}{3}\} = \operatorname{spec}(f)$ et

$$\mathrm{A}_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda^3}{54} & 0 & 0 & \frac{\lambda}{3} \\ 0 & \frac{\lambda^3}{27} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda^3}{27} & 0 \\ \frac{\lambda^5}{18\times 54} & 0 & 0 & \frac{\lambda^3}{54} \end{pmatrix}.$$

Bien évidemment, $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$. Remarquons que la matrice $A_0(\lambda)$ est symétrique par rapport à l'antidiagonale c'est-à-dire $a^0_{i,j} = a^0_{\mu+1-j,\mu+1-i}$ si l'on pose $A_0(\lambda) = (a^0_{i,j})_{1\leq i,j\leq\mu}$.

Exemple 5.3.2. — Soit $f(x,y,z) = x + y + z + x^2y^2z^2$. On a $\mu = 5$, $\mathrm{spec}_{\mathcal{N}}(f) = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\}$ et une E-base $\mathcal{U}$ de G_0 est donnée par les classes des formes

$$\big\{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, x^2y^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, x^3y^3z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, x^4y^4z^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\big\}.$$

On a

$$t\mathcal{U} = A_0\mathcal{U} + A_1\theta\mathcal{U}$$

avec

$$\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ \frac{5}{8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{8} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 5\theta & 0 & -3 & 0 \\ -\frac{5}{8}\theta^2 & 0 & \frac{65}{4}\theta & 0 & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'en accord avec le corollaire 4.0.8, la trace de la matrice A_1 vaut $\frac{15}{2} = \frac{3}{2}\mu$. L'espace H défini en 4.1.1 est engendré par

$$\big\{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \theta^{-1}x^2y^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
$$\theta^{-1}x^3y^3z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \theta^{-2}x^4y^4z^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\big\}.$$

On a $H = H_{\frac{1}{2}} \oplus H_1$ où $H_{\frac{1}{2}}$ (resp. H_1) est engendré par

$$\big\{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \theta^{-1}x^2y^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \theta^{-2}x^4y^4z^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\big\}$$

(resp. $H_1 = \{xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \theta^{-1}x^3y^3z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\}$). Avec les notations du § 4.1.1, on a

$$N_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -5 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} & -5 \\ -\frac{5}{8} & \frac{65}{4} & -10 \end{pmatrix}, \quad N_1 = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix},$$

et

$$J_{\frac{1}{2}} = \big\{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, N_{\frac{1}{2}}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z), N^2_{\frac{1}{2}}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\big\},$$
$$J_1 = \big\{xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, N_1(xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)\big\}.$$

En accord avec la proposition 4.1.6, on obtient une base $\mathcal{E}$ de G_0,

$$\begin{aligned}\mathcal{E} = \big\{ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \tfrac{5}{2}\theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 5x^2y^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\\ 5\theta xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 5x^3y^3z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\big\}\\ \cup \big\{ \tfrac{25}{4}\theta^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - 50\theta x^2y^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + 25x^4y^4z^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\big\}.\end{aligned}$$

On vérifie que

$$t\,\mathcal{E} = A_0\mathcal{E} + A_1\theta\mathcal{E}$$

avec

$$\mathrm{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -\frac{25}{8} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \frac{125}{8} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la matrice A_0 n'est pas symétrique (par rapport à l'antidiagonale) dans la base considérée. Elle l'est dans la très bonne base $\mathcal{E}' = P\mathcal{E}$ avec

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{25} \end{pmatrix}$$

et dans ce cas elle est égale à la matrice A_0 calculée dans la base $\mathcal{U}$. Signalons enfin que le calcul précédent montre que la monodromie à l'infini du polynôme f a un bloc de Jordan de taille 2 pour la valeur propre 1 et un bloc de taille 3 pour la valeur propre -1.

EXEMPLE 5.3.3. — Soit $f = x^2 + y^2 + x^2y^2$. Une E-base de G_0 est donnée par

$$\mathcal{U} = \big\{ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big\}$$

et H est l'espace vectoriel engendré par

$$\big\{ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \theta^{-1}x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\big\}.$$

On a

$$\mathrm{t}\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\mathcal{U} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{4}\theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\theta\mathcal{U}.$$

Dans la base

$$\mathcal{E} = \left\{ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - x^2y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right\}$$

de G_0, on a

$$\mathrm{t}\,\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \omega + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \theta\omega.$$

Une très bonne base $\mathcal{V}$ s'obtient en posant $\mathcal{V} = \exp(M)\mathcal{E}$ avec

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et alors

$$\mathrm{t}\,\mathcal{V} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathcal{V} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \theta\mathcal{V}.$$

6. Remarques sur la dualité

La construction précédente repose sur le choix arbitraire d'une E-base. Si l'on veut affiner ce choix, on peut en suivant K. Saito [SK] et M. Saito [S1, 3.10] demander que les très bonnes bases construites soient *adaptées* (en fait orthogonales) pour une dualité S sur G_0 (dans le cas local il s'agit de la dualité de Poincaré microlocale [S1, 2.7] qui correspond en fait aux « higher residue pairings » de K. Saito [SK, § 2]).

Plus précisément, en adaptant les arguments de [S1, 2.7], on montre [S, § 11], qu'il existe un accouplement non-dégénéré

$$S : G_0 \times G_0 \longrightarrow \mathbb{C}[\theta]\theta^n$$

qui possède les propriétés suivantes :

(i) $S(\theta\bullet\,,\bullet) = -\theta S(\bullet\,,\bullet)$,

(ii) $S(\bullet\,,\theta\bullet) = \theta S(\bullet\,,\bullet)$,

(iii) $\big[t, S(\omega,\eta)\big] = S(t\omega,\eta) - S(\omega,t\eta)$,

(iv) $S^{-k}(\omega,\eta) = (-1)^{n+k} S^{-k}(\eta,\omega)$

où l'on a écrit $S(\omega,\eta)=\sum_{k\geq n} S^{-k}(\omega,\eta)\theta^k$.

DÉFINITION 6.0.4. — *Soit $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_\mu\}$ une très bonne base de G_0. On dit que Ω est adaptée si, pour tout i, j,*

$$S(\omega_i,\omega_j)\in\mathbb{C}\theta^n.$$

On suppose dans le reste de ce paragraphe que spec_V est symétrique par rapport à $\frac{1}{2}n$ et qu'il est contenu dans l'intervalle $]0,n[$ (c'est le cas en particulier si f est non dégénéré et commode par rapport à son polyèdre de Newton à l'infini, *cf.* 5.1).

On note $A_0=(a^0_{i,\ell})_{1\leq i,\ell\leq\mu}$.

PROPOSITION 6.0.5. — *Soit $\Omega=\{\omega_1,\dots,\omega_\mu\}$ une très bonne base de G_0. Alors :*

(i) $S(\omega_i,\omega_j)=S^{-n}(\omega_i,\omega_j)\theta^n+\cdots+S^{-2n+1}\theta^{2n-1}(\omega_i,\omega_j)$,

(ii) *pour tout $1\leq p\leq n-1$, on a*

$$\begin{aligned}-\sum_{\ell=1}^{\mu} a^0_{i,\ell}S^{-n-p}(\omega_\ell,\omega_j)&\\ +\sum_{k=1}^{\mu} a^0_{j,k}S^{-n-p}(\omega_i,\omega_k)&+(\alpha_i+\alpha_j)S^{-n-p+1}(\omega_i,\omega_j)\\ &=(n+p-1)S^{-n-p+1}(\omega_i,\omega_j),\end{aligned}$$

$$(\alpha_i+\alpha_j)S^{-2n+1}(\omega_i,\omega_j)=(2n-1)S^{-2n+1}(\omega_i,\omega_j)\,;$$

$$\text{(iii)}\qquad \sum_{\ell=1}^{\mu} a^0_{i,\ell}S^{-n}(\omega_\ell,\omega_j)=\sum_{k=1}^{\mu} a^0_{j,k}S^{-n}(\omega_i,\omega_k).$$

Preuve. — On écrit

$$S(\omega_i,\omega_j)=S^{-n}(\omega_i,\omega_j)\theta^n+\cdots+S^{-n-n_0}(\omega_i,\omega_j)\theta^{n+n_0}.$$

On a

$$\begin{aligned}S(t\omega_i,\omega_j)-S(\omega_i,t\omega_j)=nS^{-n}(\omega_i,\omega_j)\theta^{n+1}&\\ +\cdots+(n+n_0)S^{-n-n_0}(\omega_i,\omega_j)\theta^{n+n_0+1}&\end{aligned}$$

mais aussi

$$S(t\omega_i,\omega_j)-S(\omega_i,t\omega_j)=\sum_{\ell=1}^{\mu}a^0_{i,\ell}S(\omega_\ell,\omega_j)-\sum_{k=1}^{\mu}a^0_{j,k}S(\omega_i,\omega_k)$$
$$+(\alpha_i+\alpha_j)\theta S(\omega_i,\omega_j).$$

En comparant les facteurs de θ^{n+n_0+1} de ces deux expressions, on obtient

$$(\alpha_i+\alpha_j)S^{-n-n_0}(\omega_i,\omega_j)=(n+n_0)S^{-n-n_0}(\omega_i,\omega_j).$$

Donc $S^{-n-n_0}(\omega_i,\omega_j)=0$ si $\alpha_i+\alpha_j\neq n+n_0$ et comme $\alpha_i+\alpha_j<2n$ on obtient le point (i). Les deux autres points s'obtiennent de la même manière. ▯

COROLLAIRE 6.0.6. — *Si $\alpha_i+\alpha_j<p$ alors $S^{-k}(\omega_i,\omega_j)=0$ pour tout $k\geq p$. En particulier, si $\alpha_i+\alpha_j<n$ alors $S(\omega_i,\omega_j)=0$.*

Preuve. — Par récurrence descendante sur p en utilisant (ii) de la proposition précédente en remarquant que (avec les notations de ladite proposition) $a^0_{i,\ell}=0$ si $\alpha_\ell>\alpha_i+1$ (et $a^0_{j,k}=0$ si $\alpha_k>\alpha_j+1$). ▯

COROLLAIRE 6.0.7. — *On suppose que l'on a $\alpha_i\neq\alpha_j$ modulo $\mathbb{Z}^*$ pour tous $i\neq j$. Alors :*

(i) *$S^{-n-p}(\omega_i,\omega_j)=0$ pour tout $p\geq 1$. En particulier, toute très bonne base est adaptée.*

(ii) *Si $\alpha_i+\alpha_j\neq n$, on a $S^{-n}(\omega_i,\omega_j)=0$.*

Si l'on fait de plus l'hypothèse $\alpha_i\neq\alpha_j$ modulo $\mathbb{Z}$ on obtient :

(iii) *$S^{-n}(\omega_i,\omega_j)\neq 0$ si et seulement si $\alpha_i+\alpha_j=n$.*

Preuve. — Si $S^{-2n+1}(\omega_i,\omega_j)\neq 0$, alors $\alpha_i+\alpha_j=2n-1$. Mais ceci est impossible car sinon, on aurait $\alpha_i=n-1+\alpha_j^s$ où α_j^s désigne le symétrique de α_j par rapport à n ce qui est exclu par hypothèse. En répétant ces observations et en utilisant le point (ii) de la proposition 6.0.5, on obtient (ii). Pour obtenir (iii) il suffit d'utiliser le fait que S^{-n} est non-dégénérée. ▯

Par exemple, en dimension 2, on a toujours

$$S(\omega_i,\omega_j)=S^{-2}(\omega_i,\omega_j)\theta^2+S^{-3}(\omega_i,\omega_j)\theta^3$$

avec

$$(\alpha_i+\alpha_j)S^{-3}(\omega_i,\omega_j)=3S^{-3}(\omega_i,\omega_j).$$

En particulier, si $\alpha_i+\alpha_j\neq 3$, on a $S^{-3}(\omega_i,\omega_j)=0$, ce qui se produit toujours si $\alpha_i\neq\alpha_j$ mod $\mathbb{Z}^*$.

On vérifie à l'aide de ce qui précède que les très bonnes bases construites dans les exemples du § 5.3 sont adaptées.

Propriétés de symétrie pour la matrice A_0. — Il résulte de la proposition 6.0.5 (iii) que si l'on choisit une E-base $\mathcal{U}$ qui se projette en une base orthonormée (pour $S^{-n}(\bullet,\bullet)$) de Ω_f la matrice A_0 possède certaines propiétés de symétrie. Plaçons-nous par exemple dans la situation du corollaire 6.0.7 (iii) : on note $\mu+1-i$ l'unique entier tel que $\alpha(\omega_i)+\alpha(\omega_{\mu+1-i})=n$. Alors on obtient

$$a^0_{i,j}=a^0_{\mu+1-j,\mu+1-i}$$

(voir aussi les exemples du § 5.3).

7. Application au calcul du déterminant de la matrice de périodes

Soit $\mathcal{M}=M[t^{-1}]$ le localisé du système de Gauss-Manin de f (*cf.* 2.1) et posons $s=-\partial_t t$ (en particulier $ts=(s+1)t$). Nous définissons sa *transformée de Mellin*, notée $\mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$, par

$$\mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)=\mathbb{C}(s)\otimes_{\mathbb{C}[s]}\mathfrak{M}(\mathcal{M})$$

où $\mathfrak{M}(\mathcal{M})$ désigne $\mathcal{M}$ vu comme $\mathbb{C}[s]\langle t,t^{-1}\rangle$-module. Alors $\mathfrak{M}(\mathcal{M})(s)$ est un $\mathbb{C}(s)\langle t,t^{-1}\rangle$-module qui est de plus de dimension finie sur $\mathbb{C}(s)$ (voir [LS, th. 1.2.1]).

Considérons le complexe $\Omega^{*+n}[1/f][\partial_t]$ muni de la différentielle $\mathrm{d}\omega-(\mathrm{d}f/f)\wedge\omega\partial_t t$. Avec les notations ci-dessus, ce complexe est égal au complexe $(\Omega^{*+n}[1/f][s])$ muni de la différentielle $\mathrm{d}+s(\mathrm{d}f/f)\wedge$. Ainsi, la transformée de Mellin du système de Gauss-Manin localisée est égale à $H^n(s)$, le n-ième groupe de cohomologie du complexe d'Aomoto défini en introduction.

On suppose ici $f^{-1}(0)$ lisse. Alors, parce que le $(n-1)$-ième nombre de Betti de $f^{-1}(0)$ vaut μ [Br, th. 1.2], la dimension de $H^n(s)$ sur $\mathbb{C}(s)$ est égale à μ [LS, p. 498].

Si $\beta\in\mathrm{spec}_V$, on note $\gamma(\beta)$ sa multiplicité. On pose de plus

$$\pi=\prod f(a_i)^{\mu_i}$$

où a_i parcourt l'ensemble des points critiques de f, la notation μ_i désignant sa multiplicité.

PROPOSITION 7.0.8. — *Soit $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_\mu\}$ une très bonne base du réseau de Brieskorn G_0. Si $\{w_1, \dots, w_\mu\}$ sont des n-formes qui relèvent $\{v_1, \dots, v_\mu\}$, leurs classes $\{[w_1], \dots, [w_\mu]\}$ dans $H^n(s)$ forment une base de ce $\mathbb{C}(s)$-espace vectoriel. De plus le déterminant de t dans cette base s'écrit*

$$\det t = \pi \prod_{\beta \in \mathrm{spec}_V} (s+1)^\mu / (s+\beta+1)^{\gamma(\beta)}.$$

Preuve. — Remarquons que par définition $\{[w_1], \dots, [w_\mu]\}$ engendre $H^n(s)$ sur $\mathbb{C}(s)\langle t, t^{-1}\rangle$. Mais par hypothèse, on a

$$\big((s+1)I + A_1\big)t[\omega] = (s+1)A_0[\omega]$$

avec A_0 inversible car $f^{-1}(0)$ est lisse (remarque 4.0.7). On en déduit que $[\omega]$ est stable par t et t^{-1} et donc engendre $H^n(s)$ sur $\mathbb{C}(s)$ (cet argument est emprunté à [S, prop. 7.3]). La formule pour le déterminant de t est alors immédiate. $\square$

Comme corollaire, on obtient en recopiant la preuve du théorème 4.2.10 de [LS] (les cycles γ_j sont définis en [LS, § 4]) que le déterminant de la matrice de périodes $(\int_{\gamma_j} f^s \omega_i)_{1 \le i,j \le \mu}$ s'écrit, à une fonction périodique de s près,

$$\pi^s \prod_{\beta \in \mathrm{spec}_V} \Gamma(s+1)^\mu / \Gamma(s+\beta+1)^{\gamma(\beta)}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[B] BIRKHOFF (G.D.). — *Equivalent singular points of ordinary linear differential equations*, Math. Annalen, t. **74**, 1913, p. 134–139.

[Bo] BOREL (A.) *et al.* — *Algebraic D-Modules.* — Perspective in Mathematics, vol. 2, Academic Press, 1987.

[BGMM] BRIANÇON (J.), GRANGER (M.), MAISONOBE (Ph.), MINICONI (M.). — *Algorithme de calcul du polynôme de Bernstein, le cas non-dégénéré*, Ann. Inst. Fourier, t. **39**, 1989, p. 553–610.

[Br] BROUGHTON (S.A.). — *Milnor numbers and the topology of polynomial hypersurfaces*, Invent. Math., t. **92**, 1988, p. 217–241.

[D] DOUAI (A.). — *Équations aux différences finies, intégrales de fonctions multiformes et polyèdres de Newton*, Compositio Math., t. **87**, 1993, p. 311–355.

[DT] DOUAI (A.), TERAO (H.). — *The determinant of a hypergeometric period matrix*, Invent. Math., t. **128**, 1997, p. 417–436.

[DS] DIMCA (A.), SAITO (M.). — *On the cohomology of a general fiber of a polynomial map*, Compositio Math., t. **85**, 1993, p. 299–309.

[K] KOUCHNIRENKO (A.G.). — *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. Math., t. **32**, 1976, p. 1–31.

[KV] KHOVANSKII (A.), VARCHENKO (A.N.). — *Asymptotics of integrals over vanishing cycles and the Newton polyhedron*, Soviet. Math. Dokl., t. **32**, 1985, p. 122–127.

[LS] LOESER (F.), SABBAH (C.). — *Équations aux différences finies et déterminants d'intégrales de fonctions multiformes*, Comment. Math. Helv., t. **66**, 1991, p. 458–503.

[M] MALGRANGE (B.). — *Déformations de systèmes différentiels et microdifférentiels*, dans Mathématique et Physique, Prog. in Math., Birkhauser, t. **37**, 1983, p. 353–379.

[Ph] PHAM (F.). — *Singularités des systèmes de Gauss-Manin.* — Progress in Math, vol.2, Birkhauser, Boston, 1980.

[Ph1] PHAM (F.). — *Vanishing homologies and the n variable saddlepoint method*, A.M.S Proc. Symp. Pure Math., t. **40**, 1983, p. 319–333.

[S] SABBAH (S.). — *Hypergeometric periods for a tame polynomial.* — Preprint.

[S1] SAITO (M.). — *On the structure of Brieskorn lattice*, Ann. Inst. Fourier, t. **39**, 1989, p. 27–72.

[S2] SAITO (M.). — *Comment lire mon article "On the structure of Brieskorn lattice" ?.* — Notes manuscrites.

[S3] SAITO (M.). — *Exponents and Newton polyhedra of isolated hypersurface singularities*, Math. Ann., t. **281**, 1988, p. 411–417.

[S4] SAITO (M.). — *Modules de Hodge polarisables*, Publ. RIMS, Kyoto Univ, t. **24**, 1988, p. 849–995.

[SK] SAITO (K.). — *The higher residue pairings $K_F^{(k)}$ for a family of hypersurfaces singular points*, Proc. Symposia Pure Math., t. **40**, 1983, p. 441–463.

[Ss] STEENBRINK (J.), SCHERK (J.). — *On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber*, Math. Ann., t. **271**, 1985, p. 641–655.

[V1] VARCHENKO (A.N.). — *Critical values and the determinant of periods*, Russian Math. Surveys, t. **44**, 1989, p. 209–210.

[V2] VARCHENKO (A.N.). — *The Euler Beta-function, the Vandermonde determinant, Legendre's equation and critical values of linear functions on a configuration of hyperplanes*, Math. USSR Isvestija, t. **35**, 1990, p. 543–572; t. **36**, 1991, p. 155–168.