BULLETIN DE LA S. M. F.

PEROTT

Sur un théorème de Gauss

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 87-88

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__87_1>

Sur un théorème de Gauss; par M. Perott.

(Séance du 7 avril 1882.)

L'illustre Gauss a démontré, dans son Mémoire intitulé : *Summatio quarumdam serierum singularium,* que, dans le cas où m et μ sont des nombres entiers et $m > \mu$, l'expression

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\mu)}$$

est une fonction entière de x. Nous nous proposons de donner une nouvelle démonstration de ce théorème.

On sait que, d étant un diviseur de n, et f_d le produit des facteurs linéaires de $x^n - 1$ qui correspondent aux racines primitives de $x^d - 1 = 0$, on a toujours l'identité

$$x^n - 1 = \prod_{(n)} f_d,$$

où le produit s'étend à tous les diviseurs de n.

On aura par conséquent

$$\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x^{m-\mu+1})}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\mu)}$$

$$=\frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})\ldots(1-x)}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^\mu)(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m-\mu})}$$

$$=\frac{\prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \cdots \prod_{(m)} f_d}{\prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \cdots \prod_{(\mu)} f_d \prod_{(1)} f_d \prod_{(2)} f_d \cdots \prod_{(m-\mu)} f_d}$$

$$=\prod_{d=1}^{d=m} f_d^{\,\mathrm{E}\left(\frac{m}{d}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{\mu}{d}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m-\mu}{d}\right)}.$$

L'expression

$$\mathrm{E}\left(\frac{m}{d}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{\mu}{d}\right)-\mathrm{E}\left(\frac{m-\mu}{d}\right)$$

ne peut jamais devenir négative et par conséquent la proposition énoncée se trouve démontrée.