BULLETIN DE LA S. M. F.

NICOLAS DUPONT
MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER

Formalité des espaces de lacets libres

Bulletin de la S. M. F., tome 126, n° 1 (1998), p. 141-148
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_1_141_0>

Bull. Soc. math. France,
126, 1998, p. 141–148.

FORMALITÉ DES ESPACES DE LACETS LIBRES

PAR NICOLAS DUPONT ET

MICHELINE VIGUÉ-POIRRIER (*)

RÉSUMÉ. — Soit X un espace topologique simplement connexe dont l'algèbre de cohomologie rationnelle $H^*(X;\mathbb{Q})$ est noethérienne. Nous montrons que l'espace des lacets libres X^{S^1} est formel si et seulement si l'algèbre $H^*(X;\mathbb{Q})$ est libre.

ABSTRACT. — FORMALITY OF THE FREE LOOP SPACE. Let X be a simply connected topological space whose rational cohomology algebra $H^*(X;\mathbb{Q})$ is finitely generated. We show that the free loop space X^{S^1} is formal if and only if the algebra $H^*(X;\mathbb{Q})$ is free.

1. Introduction

Soit X un espace topologique connexe par arcs et de type fini. On peut associer à X son *modèle minimal de Sullivan* [S]. Il s'agit d'une $\mathbb{Q}$-algèbre différentielle graduée commutative libre $(\Lambda V, \mathrm{d})$, où $V = V^{\geq 1}$ est de dimension finie en chaque degré et la différentielle d est décomposable. Si X est de plus nilpotent, une telle algèbre décrit entièrement le type d'homotopie rationnelle de X. Pour plus de détails sur ce modèle, nous renvoyons à [S] ou bien à [FHT].

On dit que X est *formel* s'il existe un morphisme

$$\psi : (\Lambda V, d) \xrightarrow{\simeq} H^*(X;\mathbb{Q})$$

induisant un isomorphisme en cohomologie. Autrement dit, un espace est formel lorsque sa cohomologie rationnelle décrit entièrement son type

(*) Texte reçu le 1er octobre 1997, accepté le 21 novembre 1997.
N. DUPONT, Université des Sciences et Technologies de Lille, U.F.R. de Mathématiques, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX (France). E-mail : Nicolas.Dupont@univ-lille1.fr.
M. VIGUÉ-POIRRIER, Université de Paris-Nord, Institut Galilée, Département de Mathématiques, 93430 Villetaneuse (France). E-mail : vigue@math.univ-paris13.fr.

Classification AMS : 55P62, 55P35.

Mots clés : espace des lacets libres, espace formel, modèle de Sullivan.

d'homotopie rationnelle. Beaucoup d'espaces sont formels, par exemple les sphères, les espaces projectifs ou les variétés kählériennes compactes [DGMS]. Un produit, un wedge d'espaces formels est formel.

On note X^{S^1} *l'ensemble des lacets libres dans* X, i.e. les applications continues du cercle S^1 dans X, muni de la topologie compacte ouverte. Si X est simplement connexe de type fini, alors X^{S^1} est nilpotent de type fini.

Nous nous proposons de caractériser les espaces X pour lesquels X^{S^1} est formel. Nous utilisons pour cela une hypothèse sur la cohomologie rationnelle de X, mais qui n'est probablement pas nécessaire.

THÉORÈME. — *Soit X un espace simplement connexe dont l'algèbre de cohomologie rationnelle $H^*(X;\mathbb{Q})$ est noethérienne. Alors l'espace des lacets libres X^{S^1} est formel si et seulement si l'algèbre $H^*(X;\mathbb{Q})$ est libre, i.e. X a le type d'homotopie rationnelle d'un produit d'espaces d'Eilenberg-MacLane.*

Nous présentons les étapes principales de notre démonstration. Soit $s : V \to \overline{V}$ l'isomorphisme de suspension, défini par $\overline{V}^n = V^{n+1}$, que l'on étend en une dérivation $s : \Lambda V \to \Lambda V \otimes \overline{V}$. Depuis [VS], on sait comment déterminer le modèle minimal de X^{S^1} à partir de celui de X. Il s'agit de l'extension $(\Lambda(V \oplus \overline{V}), D)$ de $(\Lambda V, \mathrm{d})$ où, pour tout générateur $\bar{v}$ de $\overline{V}$, $D(\bar{v}) = -s\,\mathrm{d}(v)$.

Si $H^*(X;\mathbb{Q})$ est libre, le modèle minimal de X possède une différentielle nulle. Il en est donc de même du modèle minimal de X^{S^1} et X^{S^1} est bien formel.

Prouver la proposition inverse demande plus de travail. Soit $(\Lambda V, \mathrm{d})$ le modèle minimal de X et $(\Lambda(V \oplus \overline{V}), D)$ le modèle minimal de X^{S^1}. Il nous faut prouver que si X^{S^1} est formel alors d, et donc D, est nulle. Puisque nous connaissons la forme de cette différentielle, notre idée est de trouver une propriété générale que possède la différentielle du modèle minimal d'un espace formel, et que ne possède pas D si elle est non nulle.

Les espaces formels possèdent un modèle minimal $(\Lambda W, \mathrm{d})$ bigradué [HS]. Cela signifie qu'il existe une décomposition $W = \oplus_{i \geq 0} W_i$ pour laquelle d est de degré -1, telle que $H_*(\Lambda W, \mathrm{d}) = H_0(\Lambda W, \mathrm{d})$. Notre hypothèse sur la cohomologie de X implique que l'on pourra supposer que la dimension de W_0 est finie. La propriété cherchée est la suivante.

LEMME 1. — *Soit $(\Lambda(W_0 \oplus W_+), \mathrm{d})$ le modèle minimal bigradué d'un espace formel tel que $\dim W_0 < \infty$. Alors pour tout élément homogène non nul w de W_+^{pair}, il existe un élément w' de W_+^{impair}, un entier $n \geq 2$ et un élément décomposable Ω dont la composante en w^n est nulle, tels* *que* $\mathrm{d}w' = w^n + \Omega$.

Il nous faut maintenant préciser la structure du modèle minimal bigradué d'un espace de lacets libres formel. Notre premier résultat est que si X^{S^1} est formel, alors X est formel. Nous allons en fait montrer un lemme plus général, intéressant en lui-même. Rappelons l'existence d'une fibration

$$\Omega X \longrightarrow X^{S^1} \xrightarrow{p} X$$

où p applique un lacet sur son origine et ΩX désigne l'espace des lacets de X d'origine fixée. Cette fibration p admet une section s qui applique un point x sur le lacet constant d'origine x.

LEMME 2. — *Soit $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{p} B$ une fibration où B est simplement connexe. Si p admet une section s et E est formel, alors B est formel.*

Nous pouvons maintenant expliciter le modèle minimal bigradué d'un espace de lacets libres formel. On suppose que X^{S^1} est formel donc, d'après le résultat précédent, que X est formel aussi. Soit $(\Lambda V, \mathrm{d})$ le modèle minimal bigradué de X.

LEMME 3. — *Le modèle minimal $(\Lambda(V \oplus \overline{V}), D)$, bigradué par $(\overline{V})_n = \overline{V_n}$, est le modèle minimal bigradué de X^{S^1}.*

En combinant les lemmes 1 et 3, on obtient facilement la preuve de notre théorème. En effet, soit $(\Lambda(V \oplus \overline{V}), D)$ le modèle minimal bigradué de X^{S^1}, obtenu par le lemme 3. D'après notre hypothèse sur la cohomologie de X, V_0 et par suite $V_0 \oplus \overline{V}_0$ est de dimension finie. On peut donc appliquer le lemme 1 à $W_0 = V_0 \oplus \overline{V}_0$. On sait que $D(V) \subset \Lambda V$ et $D(\overline{V}) \subset \Lambda V \otimes \overline{V}$. On en déduit que pour tout $n \geq 2$, $D(V \oplus \overline{V}) \cap \overline{V}^{\otimes n} = 0$. Le lemme 1 implique alors que $\overline{V}_+^{\mathrm{pair}} = 0$, donc que $V_+ = V_+^{\mathrm{pair}}$. Une nouvelle application du lemme 1 au modèle minimal bigradué $(\Lambda V, \mathrm{d})$ prouve qu'en fait $V_+ = 0$. Le modèle minimal de X a donc une différentielle nulle et $H^*(X; \mathbb{Q})$ est bien libre. □

2. Preuve du théorème

Il nous reste dans ce paragraphe à démontrer les lemmes 1, 2 et 3.

Preuve du lemme 1. — On raisonne par l'absurde. Soit w ne satisfaisant pas à la conclusion du lemme. La projection $\pi : (\Lambda W, \mathrm{d}) \to (\Lambda w, 0)$, définie par

$$\pi(w) = w, \quad \pi(w') = 0 \quad \text{si} \quad w' \notin \langle w \rangle$$

et prolongée en un morphisme d'algèbres, commute alors aux différentielles.

Soit $(w_1, \dots, w_r)$ une base de W_0^{pair}. Posons

$$T = \langle t_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle t_r \rangle$$

et étendons $(\Lambda W, \mathrm{d})$ en $(\Lambda(W \oplus T), \mathrm{d})$ en posant pour tout i,

$$\mathrm{d}(t_i) = w_i^2, \quad 1 \leq i \leq r,$$

Puisque $w \in W_+$, la projection π s'étend en un morphisme d'algèbres différentielles

$$\pi : \big(\Lambda(W \oplus T), \mathrm{d}\big) \longrightarrow (\Lambda w, 0)$$

en posant $\pi(T) = 0$.

On remarque que π est surjective. Puisque la catégorie au sens de Lusternik et Schnirelmann de $(\Lambda w, 0)$ est infinie, le « mapping theorem » de [FH] implique que la dimension de la cohomologie de $(\Lambda(W \oplus T), \mathrm{d})$ est infinie.

Rappelons que $(\Lambda W, \mathrm{d})$ est le modèle minimal bigradué d'un espace formel. Il existe donc un quasi-isomorphisme (un morphisme induisant un isomorphisme en cohomologie)

$$(\Lambda(W \oplus T), \mathrm{d}) \longrightarrow (H_0(\Lambda W, d) \otimes \Lambda T, \mathrm{d}')$$

où pour tout i, $1 \leq i \leq r$, $\mathrm{d}'(t_i)$ est la classe de w_i^2. Considérons l'extension

$$H_0(\Lambda W, \mathrm{d}) \xhookrightarrow{\ i\ } \big(H_0(\Lambda W, \mathrm{d}) \otimes \Lambda T, \mathrm{d}'\big).$$

Comme $T = T^{\text{impair}}$, ΛT est de dimension finie, donc

$$(H_0(\Lambda W, \mathrm{d}) \otimes \Lambda T, \mathrm{d}')$$

est un $H_0(\Lambda W, \mathrm{d})$-module de type fini. Il est alors classique que la cohomologie de $(H_0(\Lambda W, \mathrm{d}) \otimes \Lambda T, \mathrm{d}')$ soit un module de type fini sur l'image de i^*. Par construction de T, l'image de i^* est de dimension finie. Ceci implique que la dimension de la cohomologie de $(H_0(\Lambda W, \mathrm{d}) \otimes \Lambda T, \mathrm{d}')$ est finie, d'où une contradiction. $\square$

Preuve du lemme 2. — Comme souvent en homotopie rationnelle, on commence par traduire le problème en termes algébriques. Notons A le foncteur de Sullivan [S].

Le théorème 20.3 de [H] implique que si (m_B, d_B) est le modèle minimal de B, il existe un espace vectoriel gradué

$$Y = \bigoplus_{n \geq 1} Y^n,$$

une différentielle d non nécessairement décomposable sur $m_B \otimes \Lambda Y$ et un diagramme commutatif d'algèbres différentielles graduées

$$\begin{tikzcd} A(B) \arrow[r, "A(p)"] & A(E) \arrow[r, "A(j)"] & A(F) \\ (m_B, \mathrm{d}_B) \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "i"] & (m_B \otimes \Lambda Y, \mathrm{d}) \arrow[u, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

où φ et ψ sont des quasi-isomorphismes. De plus, si q est la projection commutant aux différentielles $(m_B \otimes \Lambda Y, \mathrm{d}) \to (\Lambda Y, \mathrm{d}')$ et si $\eta : (\Lambda Y, \mathrm{d}') \to A(F)$ se déduit de $A(j) \circ \psi$ par passage au quotient, alors d' est décomposable et η est un quasi-isomorphisme.

Rappelons le critère de [BD] de formalité. Un espace X de modèle minimal $(\Lambda V, \mathrm{d})$ est formel si l'application canonique $\operatorname{Ker} \mathrm{d} \to H^*(\Lambda V, \mathrm{d})$ se prolonge en un morphisme d'algèbres différentielles $(\Lambda V, \mathrm{d}) \to H^*(\Lambda V, \mathrm{d})$.

Pour pouvoir appliquer ce critère à notre situation, il faut vérifier que d est décomposable sur $m_B \otimes \Lambda Y$. L'existence de la section s de p implique que la suite exacte longue d'homotopie de la fibration est scindée. On a donc un isomorphisme

$$\pi_1(F) \cong \pi_1(E)$$

et pour tout $n \geq 2$ des isomorphismes

$$\pi_n(E) \cong \pi_n(B) \oplus \pi_n(F).$$

Mais si $(\Lambda V, \mathrm{d})$ est le modèle minimal de X, alors pour tout $n \geq 1$,

$$\operatorname{Hom}\bigl(\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q}, \mathbb{Q}\bigr) = V^n.$$

Ceci prouve bien que d est décomposable sur $m_B \otimes \Lambda Y$.

On a des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} (m_B, \mathrm{d}_B) \arrow[r, "i"] & (m_B \otimes \Lambda Y, \mathrm{d}) \\ \operatorname{Ker} \mathrm{d}_B \arrow[u, "k"] \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Ker} \mathrm{d} \arrow[u, "k'"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ H^*(m_B, d_B) \arrow[r, "i^*"] & H^*(m_B \otimes \Lambda Y, \mathrm{d}) \end{tikzcd}$$

où π et π' désignent les applications canoniques.

Par hypothèse, l'application π' s'étend en un morphisme

$$\theta' : (m_B \otimes \Lambda Y, \mathrm{d}) \longrightarrow H^*(m_B \otimes \Lambda Y, \mathrm{d})$$

tel que $\theta' \circ k' = \pi'$. Posons

$$\theta = (\varphi^*)^{-1} \circ A(s)^* \circ \psi^* \circ \theta' \circ i : (m_B, \mathrm{d}_B) \longrightarrow H^*(m_B, \mathrm{d}_B).$$

Un petit calcul montre que $\theta \circ k = \pi$ et B est donc formel d'après le critère de [BD]. $\square$

Preuve du lemme 3. — Tout d'abord, il est clair que D est bien de degré -1 pour la graduation inférieure. Supposons qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $H_p(\Lambda(V \oplus \overline{V}), D) \neq 0$. On suppose que p est le plus petit entier vérifiant cette propriété. On note ℓ le plus petit entier $n \geq 1$ tel que

$$H_p^n\big(\Lambda(V \oplus \overline{V}), D\big) \neq 0.$$

Soit $[\alpha]$ un élément non nul de $H_p^\ell(\Lambda(V \oplus \overline{V}), D)$.

Remarquons que l'on peut supposer que $[\alpha]$ n'est pas décomposable, c'est-à-dire que

$$[\alpha] \notin H^+ \cdot H^+,$$

où $H = H(\Lambda(V \oplus \overline{V}), D)$. En effet, si tel est le cas, alors $[\alpha]$ contient une composante non nulle dans $H_0^+ \cdot H_p^+$ ou dans $H_n^+ \cdot H_m^+$ avec $n, m > 0$ et $n + m = p$. Le premier cas contredit la minimalité de ℓ et le second la minimalité de p.

On sait que toute classe de cohomologie non décomposable d'un espace formel est sphérique, c'est-à-dire qu'elle ne peut être représentée par un cocycle décomposable du modèle. Il existe donc un représentant de $[\alpha]$ dans $(\Lambda(V \oplus \overline{V}), D)$ de la forme $v + \bar{v} + \Omega$, où $v + \bar{v} \in V_p \oplus \overline{V}_p$ est non nul et Ω est décomposable.

Écrivons

$$\Omega = \beta + \gamma + \eta$$

où $\beta \in (\Lambda V)_p$, $\gamma \in (\Lambda V \otimes \overline{V})_p$ et $\eta \in (\Lambda V \otimes \Lambda^{\geq 2}\overline{V})_p$. Puisque D est homogène pour la longueur des mots en $\overline{V}$, le cocycle $v + \bar{v} + \beta + \gamma + \eta$ est la somme des trois cocycles $v + \beta$, $\bar{v} + \gamma$ et η. Le modèle minimal $(\Lambda V, \mathrm{d})$ étant bigradué, ceci implique que $v + \beta = 0$. Il nous reste à montrer que le cocycle $\bar{v} + \gamma$ est nul, puisque cela contredit la non nullité de $v + \bar{v}$.

Soient

- $(x_i)_{i \in I}$ une base de $\displaystyle\bigoplus_{0 \leq k < p} V_k^{\mathrm{pair}}$;
- $(y_j)_{j \in J}$ une base de $\displaystyle\bigoplus_{0 \leq k < p} V_k^{\mathrm{impair}}$.

Alors $\mathrm{d}v$ est un polynôme P en les variables ordonnées x_i et y_j et par construction

$$-D\bar{v} = sP = \sum_{i\in I} \bar{x}_i \frac{\delta P}{\delta x_i} - \sum_{j\in J}(-1)^j \bar{y}_j \frac{\delta P}{\delta y_j}\cdot$$

Posons maintenant

$$\gamma = \sum_{i\in I} \bar{x}_i a_i + \sum_{j\in J} \bar{y}_j b_j + \sum_{k\in K} \bar{z}_k c_k$$

où les a_i et les b_j sont des éléments de Λ^+V, les c_k des éléments de Λ^+V_0, et les z_k forment une base de V_p.

On pose aussi pour tout i, j et k,

$$\mathrm{d}x_i = X_i, \quad \mathrm{d}y_j = Y_j, \quad \mathrm{d}z_k = Z_k,$$

qui sont des polynômes en les variables ordonnées x_i et y_j. On a alors

$$D\gamma = -\sum_{i\in I} \bar{x}_i \,\mathrm{d}a_i + \sum_{j\in J} \bar{y}_j \,\mathrm{d}b_j - \sum_{i\in I} sX_i a_i - \sum_{j\in J} sY_j b_j - \sum_{k\in K} sZ_k c_k.$$

On utilise la même formule de différentiation que pour sP et l'on regroupe les termes pour obtenir

$$\begin{aligned} D\gamma = -\sum_{i\in I} \bar{x}_i\Big(\mathrm{d}a_i + \sum_{\ell\in I} \frac{\delta X_\ell}{\delta x_i} a_\ell + \sum_{j\in J} \frac{\delta Y_j}{\delta x_i} b_j + \sum_{k\in K} \frac{\delta Z_k}{\delta x_i} c_k\Big) \\ + \sum_{j\in J} \bar{y}_j\Big(\mathrm{d}b_j + \sum_{i\in I}(-1)^j \frac{\delta X_i}{\delta y_j} a_i \\ + \sum_{\ell\in J}(-1)^j \frac{\delta Y_\ell}{\delta y_j} b_\ell + \sum_{k\in K}(-1)^j \frac{\delta Z_k}{\delta y_j} c_k\Big). \end{aligned}$$

L'égalité $D(\bar{v}+\gamma) = 0$ nous donne donc pour tout $i \in I$ et tout $j \in J$

$$-\frac{\delta P}{\delta x_i} = \mathrm{d}a_i + \sum_{\ell\in I} \frac{\delta X_\ell}{\delta x_i} a_\ell + \sum_{j\in J} \frac{\delta Y_j}{\delta x_i} b_j + \sum_{k\in K} \frac{\delta Z_k}{\delta x_i} c_k,$$

$$-\frac{\delta P}{\delta y_j} = (-1)^j \,\mathrm{d}b_j + \sum_{i\in I} \frac{\delta X_i}{\delta y_j} a_i + \sum_{\ell\in J} \frac{\delta Y_\ell}{\delta y_j} b_\ell + \sum_{k\in K} \frac{\delta Z_k}{\delta y_j} c_k.$$

On utilise maintenant la formule d'Euler graduée

$$\mathrm{d}v = P = \frac{1}{p+\ell}\Big(\sum_{i\in I}|x_i|x_i\frac{\delta P}{\delta x_i} - \sum_{j\in J}(-1)^j|y_j|y_j\frac{\delta P}{\delta y_j}\Big)$$

où $|x_i| = p_i + \ell_i$ si $x_i \in V_{p_i}^{\ell_i}$ et de même pour $|y_j|$.

Ceci nous permet d'obtenir $\mathrm{d}v$ en fonction des x_i, y_j, a_i, b_j, c_k, $\mathrm{d}a_i$, $\mathrm{d}b_j$ et des dérivées partielles des X_i, Y_j et Z_k. On utilise la formule d'Euler pour les $\mathrm{d}x_i$, $\mathrm{d}y_j$ et $\mathrm{d}z_k$, pour calculer les $\mathrm{d}(x_ia_i)$, $\mathrm{d}(y_jb_j)$ et $\mathrm{d}(z_kc_k)$. On vérifie alors aisément que

$$(p+\ell)\,\mathrm{d}v = -\mathrm{d}\Big(\sum_{i\in I}|x_i|x_ia_i + \sum_{j\in J}|y_j|y_jb_j + \sum_{k\in K}|z_k|z_kc_k\Big).$$

Il existe donc Ω décomposable tel que $\mathrm{d}v = \mathrm{d}\Omega$. Ceci est impossible puisque $(\Lambda V, \mathrm{d})$ est bigradué et que $v \in V_p$ avec $p > 0$. □

BIBLIOGRAPHIE

[BD] Body (R.), Douglas (R.). — *Rational homotopy and unique factorization*, Pac. J. Math., 1978, p. 331–338.

[DGMS] Deligne (P.), Griffiths (P.), Morgan (J.), Sullivan (D.). — *The real homotopy theory for Kähler manifolds*, Invent. Math., 1975, p. 245–254.

[FH] Félix (Y.), Halperin (S.). — *Rational L.-S. category and its applications*, Trans. A.M.S., 1982, p. 1–37.

[FHT] Félix (Y.), Halperin (S.), Thomas (J.-C.). — *Rational homotopy theory*, Prépublication du département de Mathématiques de l'Université d'Angers, 1997.

[H] Halperin (S.). — *Lectures on minimal models*, Mémoire de la Soc. Math. France 9–10, 1983.

[HS] Halperin (S.), Stasheff (J.D.). — *Obstructions to homotopy equivalences*, Advances in Math. 32, 1979, p. 233–279.

[S] Sullivan (D.). — *Infinitesimal computations in Topology*, Publ. I.H.E.S. 47, 1977, p. 269–331.

[VS] Vigué-poirrier (M.), Sullivan (D.). — *The homology theory of the closed geodesic problem*, J. Diff. Geometry 11, 1976, p. 633–644.