BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur une série d'Abel

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 67-87

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__67_1>

Sur une série d'Abel; par M. Halphen.

(Séance du 16 décembre 1881.)

Dans le Tome II des *Œuvres d'Abel,* comprenant les Mémoires que l'illustre géomètre n'avait pas publiés lui-même, se trouve (page 82 de la 1re édition, 73 de la 2e) une série très remarquable dont l'étude n'a pas encore été faite d'une manière satisfaisante. C'est cette étude que j'ai entreprise et que l'on trouvera dans le présent Mémoire.

1. Considérons la suite indéfinie des polynômes P_0, $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., que voici :

$$P_0 = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{x(x-2\beta)}{2}, \quad \ldots, \quad P_n(x) = \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\ldots n},$$

où β est une constante quelconque. Les degrés de ces polynômes successifs reproduisent la suite des nombres naturels. Il est donc évident que tout polynôme entier pourra être développé suivant les polynômes P, en cette sorte :

$$(1) \qquad \varphi(x) = \mu_0 P_0 + \mu_1 P_1(x) + \mu_2 P_2(x) + \ldots + \mu_n P_n(x).$$

Les coefficients μ seront indépendants de x, et l'indice n, celui du dernier terme, sera le degré de $\varphi(x)$.

Pour trouver les coefficients μ, observons deux propriétés des polynômes P : 1° ils s'évanouissent tous, sauf P_0, pour $x = 0$;

2° ils vérifient la relation

$$\frac{dP_n(x)}{dx} = P_{n-1}(x-\beta),$$

et, par suite, aussi la relation plus générale

$$\frac{d^m P_n(x)}{dx^m} = P_{n-m}(x - m\beta).$$

En dérivant m fois l'identité (1), on obtient donc

$$\varphi^m(x) = \mu_m P_0 + \mu_{m+1} P_1(x - m\beta) + \mu_{m+2} P_2(x - m\beta) + \dots.$$

Prenant enfin $x = m\beta$, on a

$$\mu_m = \varphi^{(m)}(m\beta).$$

Donc, *tout polynôme entier* $\varphi(x)$ *peut être mis sous la forme*

$$(2) \quad \begin{cases} \varphi(x) = \varphi(0) + x\varphi'(\beta) + \dfrac{x(x-2\beta)}{2}\varphi''(2\beta)\dots \\ \qquad + \dfrac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\dots n}\varphi^{(n)}(n\beta) + \dots, \end{cases}$$

dans laquelle β *est une quantité arbitraire.*

Cette formule (2) est celle d'Abel. Le problème que je me propose ici est d'étudier sous quelles conditions la série (2), formée avec une fonction quelconque, et indéfiniment prolongée, représente effectivement cette fonction.

Voici comment je procéderai. Je prendrai la série générale

$$(3) \quad F(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 \frac{x(x-2\beta)}{2} + \dots + \mu_n \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{2.3\dots n} \dots,$$

où les coefficients μ seront indépendants de x, et d'ailleurs quelconques, assujettis seulement à rendre la série convergente. J'étudierai la fonction $F(x)$ ainsi définie, et je montrerai que cette fonction a plusieurs propriétés caractéristiques. De là découlent des conditions nécessaires pour qu'une fonction $\varphi(x)$ puisse vérifier la formule (2). Je prouverai ensuite que ces mêmes conditions sont aussi suffisantes, et le problème se trouvera résolu.

2. Considérons le terme de rang $(n+1)$ dans la série (3), et

écrivons-le ainsi

$$T_n = (-1)^{n-1} \frac{x(n\beta)^{n-1}\left(1-\frac{x}{n\beta}\right)^{n-1}}{1.2\ldots n}\,\mu_n. \tag{4}$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\frac{x}{\beta} = \xi.$$

La quantité T_n, pour n infiniment grand, a, d'après la formule de Stirling, l'expression asymptotique

$$T_n = \frac{(-1)^{n-1}\xi e^{-\xi}}{\sqrt{2\pi}} \frac{(e\beta)^n \mu_n}{n^{\frac{3}{2}}}, \tag{5}$$

d'où je tire cette première conclusion : *Pour que les termes de la série* (3) *convergent vers zéro, il faut et il suffit que l'on ait*

$$\mu_n = (-1)^{n-1} n^{\frac{3}{2}} (e\beta)^{-n} u_n, \tag{6}$$

u_n *étant infiniment petit avec* $\frac{1}{n}$.

C'est là une première condition nécessaire, mais non suffisante, à la convergence de la série (3).

Si la série dont le terme général est u_n est absolument convergente, aucune condition ultérieure n'est plus nécessaire à la convergence de la série (3). D'ailleurs u_n est indépendant de x. Donc, dans un tel cas, la série (3) définit la fonction $F(x)$ pour toute valeur de x. Cette fonction est finie et uniforme dans tout le plan.

Je vais étendre ce résultat aux autres cas. Pour y parvenir, je prendrai une expression asymptotique de T_n, plus approchée que l'expression (5).

3. Développant $\left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{n-1}$ suivant les puissances décroissantes de n, j'ai d'abord

$$\begin{cases} \left(1-\frac{\xi}{n}\right)^{n-1} = e^{-\xi}\left[1+\frac{1}{n}\left(\xi-\frac{1}{2}\xi^2\right)+\frac{c_n}{n^2}\right], \\ (\lim c_n)_{n=\infty} = \frac{1}{8}\xi^4 - \frac{2}{3}\xi^3 + \xi^2. \end{cases} \tag{7}$$

J'obtiens de même, par la formule de Stirling,

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{1.2\ldots n} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, n^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)} e^{n}\left(1 - \dfrac{1}{12n} + \dfrac{c'_n}{n^2}\right), \\ (\lim c'_n)_{n=\infty} = \dfrac{1}{288}. \end{cases}$$

De ces deux formules, je conclus, en tenant compte de (6),

$$T_n = \frac{\xi e^{-\xi}}{\sqrt{2\pi}}\left[u_n + \left(\xi - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{12}\right)\frac{u_n}{n} + b_n \frac{u_n}{n^2}\right],$$

$$(\lim b_n)_{n=\infty} = \frac{1}{8}\xi^4 - \frac{2}{3}\xi^3 + \frac{25}{24}\xi^2 - \frac{1}{12}\xi + \frac{1}{288}.$$

Dès que u_n est supposé infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, la série, dont le terme général est $\frac{b_n u_n}{n^2}$, est absolument convergente. La série (3) converge ou diverge en même temps que la série s, dont le terme général est

$$s_n = u_n + \left(\xi - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{12}\right)\frac{u_n}{n}.$$

Si maintenant la série (3) converge, non plus pour une valeur particulière de x, mais pour une suite de valeurs attribuées à cette variable, la convergence séparée des deux séries, ayant pour termes généraux respectivement u_n et $\frac{u_n}{n}$, est nécessaire. Elle est d'ailleurs suffisante. Cette condition même se présente si l'on exige simplement que la série (3) converge pour deux valeurs différentes attribuées à x, pourvu que la somme de ces valeurs ne soit pas 2β. Mais c'est là un détail sans importance.

D'après un théorème d'Abel, la série dont le terme général est $\frac{u_n}{n}$ converge dès que celle dont le terme général est u_n est convergente. Je fais allusion ici au théorème III du Mémoire sur la série du binôme (¹) (t. I, p. 69 des *Œuvres complètes*, p. 222 de la 2ᵉ édition). J'ai donc, en conclusion :

La condition nécessaire et suffisante à la convergence de la

(¹) Cette application du théorème d'Abel m'a été indiquée par M. Jordan.

série (3), *pour* x *variable, consiste dans la convergence de la série, indépendante de* x, *qui a pour terme général*

$$u_n = (-1)^{n-1}(e\beta)^n n^{-\frac{3}{2}}\mu_n.$$

Cette condition satisfaite, la série (3) *représente une fonction synectique dans tout le plan.*

Je dis *synectique,* quoique la démonstration établisse simplement que $F(x)$ est finie et uniforme. Mais il est très aisé de démontrer encore que la série (3) peut être différentiée; il n'est pas besoin de s'y arrêter.

4. De la définition (3) résulte, pour la fonction $F(x)$, la même conclusion qui a été tirée de (1) pour un polynôme entier,

$$(9)\quad \begin{cases} F^{(m)}(x) = \mu_m + \mu_{m+1}P_1(x - m\beta) + \mu_{m+2}P_2(x - m\beta) + \ldots, \\ F^{(m)}(m\beta) = \mu_m. \end{cases}$$

Il n'est donc pas douteux que la série (3) n'est pas plus générale que la série d'Abel, formée avec une fonction quelconque. Il faut toutefois observer que la fonction $F(x)$, définie par la série (3), où les coefficients μ peuvent être liés à β d'une manière quelconque n'est généralement pas indépendante de β.

C'est de l'égalité (9) que je vais tirer les propriétés caractéristiques de la fonction $F(x)$. Je ferai croître au delà de toute limite l'indice de dérivation m, et, en même temps, je supposerai x de la forme suivante :

$$(10)\qquad x = (\eta + p)\beta,$$

η désignant une quantité quelconque invariable avec m, et p un nombre positif, variant avec m d'une manière arbitraire, mais ne dépassant pas m.

Si, pour m infini, $(m - p)$ reste fini, les propriétés de $F^{(m)}(x)$ se déduisent immédiatement de l'analyse qui précède. En désignant maintenant par ξ la quantité finie $\frac{x - m\beta}{\beta}$, je pourrai employer les mêmes formules qu'au numéro précédent.

Posant

$$v_n = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\left[1 + \frac{1}{n}\left(\xi - \frac{1}{2}\xi^2 - \frac{1}{12}\right) + \frac{b_n}{n^2}\right]u_{m+n}, \quad \xi = \frac{x - m\beta}{\beta},$$

et désignant par T_n le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme du développement (9), j'obtiens

$$m^{-\frac{3}{2}} e^m \beta^m T_n = (-1)^m \frac{\xi e^{-\xi}}{\sqrt{2\pi}} v_n.$$

Suivant les hypothèses, la série $v_1 + v_2 + v_3 + \dots$ converge vers zéro avec $\frac{1}{m}$. J'ai donc le résultat suivant, où je mets la lettre y au lieu de $\eta_1\beta$:

Quand m est infiniment grand et que y reste fini, le produit $m^{-\frac{3}{2}} e^m \beta^m F^{(m)}(y + m\beta)$ *converge vers zéro.*

5. Je vais maintenant généraliser ce résultat en envisageant pour x une valeur quelconque de la forme (10), dans laquelle on devra supposer $(m - p)$ infini avec m.

Pour la démonstration, je suppose η_1 réel, et je ferai disparaître cette restriction *a posteriori*.

D'après les hypothèses, $\left(\frac{x - m\beta}{\beta}\right)$ est réel et négatif pour m suffisamment grand.

J'écris maintenant le $(n+1)^{\text{ième}}$ terme T_n de (9) en me servant toujours des formules (6) et (8), mais sans faire usage de la formule (7). Posant

$$w_n = \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{1}{12n} + \frac{c'_n}{n^2}\right) u_{m+n},$$

j'obtiens le résultat suivant :

$$(11) \quad m^{-\frac{5}{2}} e^p \beta^m T_n = \frac{(-1)^{m-1}}{\sqrt{2\pi}} e^{p-m} \frac{m - \eta_1 - p}{m} \left(1 + \frac{m - \eta_1 - p}{n}\right)^{n-1} w_n.$$

Dans le second membre de cette formule (11), abstraction faite des trois premiers facteurs, indépendants de n, nous multiplions w_n par la fonction $\left(1 + \frac{m - \eta_1 - p}{n}\right)^{n-1}$, *qui est toujours croissante avec n*. C'est ce qui résulte de la supposition $(m - \eta_1 - p) > 0$. La limite de la série se trouve alors au moyen du théorème d'Abel cité précédemment, et auquel on fait une modification insignifiante. Voici ce théorème modifié comme il convient ici :

En désignant par $w_1, w_2, \dots, w_n$ *une série de quantités quel-*

conques, et supposant $p_n = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$ *de module toujours moindre qu'une quantité déterminée* δ, *quel que soit* n, *on aura*

$$\text{mod.}(\varepsilon_1 w_1 + \varepsilon_2 w_2 + \ldots + \varepsilon_n w_n) < \delta\varepsilon_1 + (p_n - \delta)\varepsilon_n,$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ *étant des quantités positives croissantes.*

Appliquant ici cette proposition, en prenant pour w_n les quantités précédentes, et pour ε_n cette autre :

$$\varepsilon_n = e^{p-m}\left(1 + \frac{m - r_1 - p}{n}\right)^{n-1},$$

nous aurons pour δ et pour p_n des quantités infiniment petites avec $\frac{1}{m}$; pour ε_1, la quantité infiniment petite e^{p-m}; quant à ε_n, son maximum a lieu pour n infini; c'est une quantité finie e^{-r_1}.

La somme est donc infiniment petite, et j'ai ce résultat :

Quand m *est infiniment grand et que* y *reste fini, le produit* $m^{-\frac{5}{2}} e^p \beta^m \mathrm{F}^{(m)}(y + p\beta)$ *converge vers zéro,* p *étant un nombre positif variant arbitrairement avec* m, *mais ne surpassant pas* m.

Comme je l'ai fait observer, cette proposition n'est encore établie que pour le cas où $y : \beta$ est réel. Faisons maintenant disparaître cette restriction.

6. Posons, pour un instant,

$$e^p \mathrm{F}(y + p\beta) = f(y).$$

La fonction $f(y)$ est synectique dans tout le plan (n° 3); je peux donc appliquer la série de Taylor, quels que soient y et h :

$$f^{(m)}(y + h) = f^{(m)}(y) + \frac{h}{1} f^{(m+1)}(y) + \frac{h^2}{1.2} f^{(m+2)}(y) + \ldots.$$

Soit β_1 une quantité de module moindre que β. D'après la dernière proposition, j'ai

$$\frac{\beta_1^{m+n}}{\beta^{m+n}} f^{(m+n)}(y) = \omega_n,$$

où ω_n est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$. Employant ces quantités ω_n, je

transforme ainsi l'expression de $f^{(m)}(y+h)$,

$$\beta_1^m f^{(m)}(y+h) = \omega_0 + \frac{h}{\beta_1}\omega_1 + \frac{1}{1.2}\left(\frac{h}{\beta_1}\right)^2 \omega_2 + \ldots + \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{h}{\beta_1}\right)^n \omega_n + \ldots,$$

et il devient évident que, h étant une quantité finie quelconque, $\beta_1^m f^{(m)}(y+h)$ est infiniment petit avec $\frac{1}{m}$. La proposition s'offre donc en toute généralité sous cette forme :

m étant infiniment grand, p étant positif, moindre que m et d'ailleurs quelconque, y étant une quantité fixe réelle ou imaginaire, et β_1 *ayant un module inférieur à celui de* β, *le produit* $e^p \beta_1^m \mathrm{F}^{(m)}(y+p\beta)$ *converge vers zéro ; c'est le terme général d'une série absolument convergente.*

Je vais encore la transformer ; à cet effet, *je suppose* β_1 *de même argument que* β, et je considère le produit $e^{p_1}\beta_1^m \mathrm{F}^{(m)}(y+p_1\beta_1)$, dans lequel p_1 est supposé, comme précédemment p, un nombre positif quelconque, ayant m pour limite supérieure. Je pose $p_1\beta_1 = p\beta$. D'après les hypothèses, p sera un nombre satisfaisant encore à ces mêmes conditions.

Je dis qu'on a

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^m e^{p_1-p} < 1.$$

Soit, en effet, $\frac{\beta_1}{\beta} = 1-\lambda$, d'où résulte $p_1 - p = p_1\lambda$; on aura

$$\left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^m e^{p_1-p} = \left[(1-\lambda)e^{\frac{p_1}{m}\lambda}\right]^m,$$

La fraction $\frac{p_1}{m}$ étant positive et plus petite que l'unité, j'ai

$$e^{-\frac{p_1}{m}\lambda} > 1 - \frac{p_1}{m}\lambda > 1-\lambda.$$

Par suite

$$(1-\lambda)e^{\frac{p_1}{m}\lambda} < 1,$$

ce qu'il fallait prouver. J'ai en conséquence

$$e^{p_1}\beta_1^m \mathrm{F}^{(m)}(y+p_1\beta_1)$$
$$= \left(\frac{\beta_1}{\beta}\right)^m e^{p_1-p} \times e^p \beta^m \mathrm{F}^{(m)}(y+p\beta) < e^p \beta^m \mathrm{F}^{(m)}(y+p\beta),$$

ces relations étant entendues s'appliquer aux modules des quantités envisagées. Je peux donc énoncer le résultat sous cette forme, qui est définitive.

La fonction $F(x)$, *définie par la série* (3), *jouit de la propriété suivante :*

Soit z *une quantité quelconque de même argument que* β *et de module moindre que celui de* β, *soit* p *un nombre positif variant avec* m *d'une manière arbitraire, sans surpasser* m, *et soit enfin* y *une quantité arbitraire, mais fixe; le produit* $z^m e^p F^{(m)}(y + pz)$ *converge vers zéro avec* $\frac{1}{m}$. *C'est le terme général d'une série absolument convergente.*

7. J'en ai fini maintenant avec l'étude des propriétés qui résultent de la définition d'une fonction par la série (3), et j'arrive à la solution du problème proposé. Mais d'abord je fais deux remarques concernant toute fonction F jouissant de la propriété qui vient d'être énoncée.

Formons la série d'Abel avec cette fonction F et en prenant z au lieu de β pour construire la série. Nous obtenons ainsi

$$(12)\quad \mathcal{F}(x, z) = F(0) + \frac{x}{1} F'(z) + \ldots + \frac{x(x - mz)^{m-1}}{1.2\ldots m} F^{(m)}(mz) + \ldots.$$

Cette série converge, comme il résulte de la règle énoncée à la fin du n° 3; car on a

$$u_m = (-1)^{m-1}(ez)^m m^{-\frac{3}{2}} F^{(m)}(mz).$$

D'après la proposition ci-dessus, où l'on suppose $y = 0$, $p = m$, u_m est le terme général d'une série convergente.

La fonction $\mathcal{F}(x, z)$ est donc définie par la série (12) pour toute valeur de x, et pour les valeurs de z dont l'argument est celui de β, et le module moindre. Quant aux valeurs de z dont l'argument diffère de celui de β, on ne sait, jusqu'à présent, si, pour ces valeurs, la série (12) converge.

La seconde remarque se rapporte à la conséquence obtenue en supposant $p = 0$; et je peux l'énoncer ainsi :

Théorème I. — *Pour que la série d'Abel puisse être appli-*

quée à une fonction $f(x)$, il faut qu'il existe des constantes α laissant le produit $\alpha^m f^{(m)}(x)$ fini, pour m infini.

8. Rien n'est plus aisé que de concevoir, de la manière la plus générale, une fonction $f(x)$ jouissant de cette dernière propriété, et de caractériser le maximum a du module des constantes α. Que l'on prenne une série procédant suivant les puissances croissantes de x, et dont le cercle de convergence ait le rayon a, et soit

$$\psi(x) = v_0 + v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + \ldots + v_m x^m + \ldots$$

cette série. En posant

$$f(x) = v_0 + v_1 \frac{x}{1} + v_2 \frac{x^2}{1.2} + v_3 \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots + v_m \frac{x^m}{1.2\ldots m} + \ldots,$$

on aura la fonction demandée $f(x)$. On peut encore figurer sa liaison avec $\psi(x)$ de cette manière,

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi} \int \psi(z) e^{\frac{x}{z}} \frac{dz}{z},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé, embrassant l'origine, et de rayon maximum moindre que a. Les deux fonctions f et ψ jouent ainsi, l'une par rapport à l'autre, le rôle de *génératrice et de déterminante* au sens qu'Abel donne à ces mots dans le Mémoire où se trouve la série dont je m'occupe ici. Mais je ne ferai pas usage de cette notion.

Si la série $\psi(x)$ est convergente dans tout le plan, la constante a dépasse toute limite. On a alors une classe de fonctions $f(x)$, parmi lesquelles se rangent les fonctions de Bessel, dont on a l'exemple le plus simple en prenant $\psi(x) = e^x$. La fonction $\cos\sqrt{x}$ appartient aussi à cette classe, et de même $\sqrt{x}\sin\sqrt{x}$.

La fonction $e^{\frac{x}{\alpha}}$ est le type le plus simple des fonctions $f(x)$ qui correspondent à la constante a, ou mieux $e^{\frac{x}{\alpha}}$, α ayant le module a et un argument quelconque.

9. Prenons une fonction $f(x)$ répondant à la constante a. Soit α_1 une quantité, d'argument quelconque et de module inférieur à a. Quel que soit x, le produit $\alpha_1^m f^{(m)}(x)$ a pour limite zéro. Les

termes du développement de $f(x)$ par la série de Maclaurin sont infiniment petits par rapport aux termes correspondants du développement de $e^{\frac{x}{\alpha_1}}$. Il en est de même pour les dérivées d'ordre quelconque de ces fonctions, en sorte qu'en désignant par ε un infiniment petit, terme général d'une série absolument convergente, on a

$$f^{(m)}(x) = \frac{\varepsilon}{\alpha_1^n} e^{\frac{x}{\alpha_1}}.$$

Cette conséquence a lieu, même si x varie, en sorte que, mettant mz au lieu de x, j'ai

$$f^{(m)}(mz) = \varepsilon\left(\frac{e^{\frac{z}{\alpha_1}}}{\alpha_1}\right)^m. \tag{13}$$

Considérons maintenant l'équation transcendante

$$ue^{1+u} = 1, \tag{14}$$

qui a une racine positive et une seule, égale environ à 0,27, et que nous désignerons par u.

Choisissons pour z une quantité, ayant le même argument que α_1, et astreinte à la condition

$$\frac{z}{\alpha_1} \leqq u.$$

Comme u est racine de (14), il en résulte

$$\frac{z}{\alpha_1} e^{\frac{z}{\alpha_1}} \leqq \frac{1}{e},$$

et, à cause de (13),

$$f^{(m)}(mz) = \varepsilon'(ez)^{-m}, \tag{15}$$

ε' étant comme ε, un infiniment petit, terme général d'une série absolument convergente. Ainsi, $f(x)$ étant une fonction quelconque satisfaisant à la condition que $a^m f^{(m)}(x)$ ne devienne pas infini avec m, cette fonction, comme on le voit, satisfait en même temps à la condition (15), pourvu qu'on prenne pour z une quantité d'argument quelconque, et de module moindre que ua.

La condition (15) est précisément celle qui permet de déduire de $f(x)$ une fonction $\mathfrak{F}(x, z)$, comme on l'a fait pour $\mathrm{F}(x)$, au

moyen de la formule (12). En prenant donc

$$(16)\quad \mathfrak{F}(x,z)=f(0)+\frac{x}{1}f(z)+\ldots+\frac{x(x-mz)^{m-1}}{1.2\ldots m}f^{(m)}(mz)\ldots,$$

je définis $\mathfrak{F}(x,z)$, fonction synectique de x dans tout le plan, et synectique aussi par rapport à z pour les valeurs dont le module est moindre que ua.

Pour ces valeurs de z, il est permis de développer $\mathfrak{F}(x,z)$ au moyen de la série de Maclaurin, étendue au cas de deux variables. Si l'on veut former les termes de ce développement jusqu'à l'ordre quelconque n, on obtiendra, pour ces termes, la même forme analytique que si $f(x)$ était un polynôme entier de degré au moins égal à n. Or, si $f(x)$ est un polynôme entier, $\mathfrak{F}(x,z)$ se réduit à $f(x)$ (n° 1). Donc, si loin qu'on pousse le développement, on le voit toujours coïncider avec celui de $f(x)$. Donc, pour les valeurs de z envisagées, on a $\mathfrak{F}(x,z)=f(x)$. De là cette première conclusion énonçant des conditions suffisantes, mais non pas nécessaires.

II. *Soit a le plus grand module des quantités α, laissant fini $\alpha^m f^{(m)}(x)$ pour m infini; soit u la racine positive de l'équation $ue^{1+u}=1$; la série d'Abel représente $f(x)$ quand le module de β est moindre que ua.*

Et, en particulier, *à une fonction $f(x)$, pour laquelle la constante, désignée par a, dépasse toute limite, la série d'Abel s'applique, quelle que soit la constante β.*

10. La condition (15), nécessaire à l'existence de la série (16), est satisfaite, comme je viens de le prouver pour les valeurs de z, de module moindre que ua et d'argument quelconque. Mais il arrivera généralement que, si l'on donne à z un argument déterminé ω, la condition (15) soit encore satisfaite pour des valeurs de z de module supérieur à ua. Soit ρ la limite de ces modules. $\mathfrak{F}(x,z)$ est alors une fonction de z, continue ainsi que toutes ses dérivées, pour les valeurs de z, d'argument ω et de module moindre que ρ. Tant que le module de z ne dépasse pas ua, elle coïncide avec $f(x)$. Donc elle coïncide avec $f(x)$ jusqu'à la limite ρ du module de z. De là une condition suffisante pour que la série d'Abel représente

$f(x)$, condition qui coïncide avec celle qu'à la fin du n° 6 on a reconnue nécessaire.

III. *Les notations étant les mêmes que dans l'énoncé II, le produit* $(ez)^m f^{(m)}(mz)$ *reste fini, pour m infini, tant que le module de z reste inférieur à ua. Mais si z conserve un même argument* ω, *et que son module croisse d'une manière continue au delà de ua, le produit* $z^m f^{(m)}(mz)$ *reste encore fini jusqu'à une autre limite du module de z. Soit* $\varphi(\omega)$ *cette limite, dont la forme dépend de la fonction* $f(x)$.

La condition nécessaire et suffisante pour que la série d'Abel s'applique à $f(x)$ *consiste en ce que le point affixe de* β *soit situé à l'intérieur de la courbe* $\rho = \varphi(\omega)$; *ou, en d'autres termes, que si l'on donne à* β *l'argument* ω, *le module de* β *soit moindre que* $\varphi(\omega)$.

11. L'exemple qu'il est naturel de prendre en premier lieu est celui qui se rapporte à la fonction exponentielle. Soit donc $f(x) = e^x$. Le nombre a est alors l'unité. Si l'on pose

$$z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

on a

$$\operatorname{mod}(ez)^m f^{(m)}(mz) = (\rho e^{1+\rho\cos\omega})^m.$$

Par conséquent, la courbe qui limite les positions du point β a pour équation

$$\rho e^{1+\rho\cos\omega} = 1. \tag{17}$$

Elle se compose : 1° de deux branches infinies se croisant au point dont les coordonnées sont $\rho = 1$, $\omega = \pi$; 2° d'une boucle convexe, partant de ce dernier point, où son rayon vecteur est maximum, entourant l'origine et ayant, pour rayon minimum, $\rho = u$, répondant à $\omega = 0$. C'est à l'intérieur de cette boucle convexe que doit se trouver le point β. Cette condition s'exprime par les deux inégalités *simultanées*

$$\operatorname{mod}\beta < 1, \quad \operatorname{mod}\beta e^{1+\beta} < 1.$$

12. Cet exemple acquiert plus d'intérêt si l'on prend $f(x) = e^{\lambda x}$, λ étant une quantité complexe quelconque. La condition consiste

alors en ce que le point affixe de $\lambda\beta$ soit à l'intérieur de la boucle convexe de la courbe (17). Sous la forme analytique, la condition est exprimée par les inégalités *simultanées*

$$\mod\lambda\beta < 1, \quad \mod\lambda\beta e^{1+\lambda\beta} < 1. \tag{18}$$

Voici maintenant ce qui fait l'intérêt de cet exemple. En premier lieu, la série correspondant à ce cas

$$e^{\lambda x} = 1 + \lambda x e^{\lambda\beta} + \ldots + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{1.2\ldots n}(\lambda e^{\lambda\beta})^n \ldots \tag{19}$$

est précisément celle qui sert de point de départ à Abel pour trouver la série générale dout il s'agit dans ce Mémoire. Abel emprunte cette série particulière à Legendre, mais sans rechercher les conditions sous lesquelles la formule (19) est exacte.

En second lieu, la formule (19) est un exemple classique de la série de Bürmann. Si l'on envisage $e^{\lambda x}$ comme une fonction de $\lambda e^{\lambda\beta}$ par l'intermédiaire de la variable λ, β et x étant considérés comme des constantes, elle donne, en effet, le développement de $e^{\lambda x}$ suivant les puissances croissantes de $\lambda e^{\lambda\beta}$. Si l'on se place à ce point de vue, on pourra chercher directement les conditions d'exactitude de la formule (19). A cet effet, posant

$$\lambda\beta e^{\lambda\beta} = \zeta, \tag{20}$$

on devra examiner quel est le rayon maximum du cercle concentrique à l'origine, à l'intérieur duquel on peut faire décrire à ζ un contour fermé quelconque, de telle sorte qu'une racine λ de l'équation (20) se reproduise, après que ce contour aura été parcouru. On devra aussi chercher quelle est cette racine.

La première question se résout immédiatement par le moyen du développement (19), dont la convergence exige la seconde des conditions (18), c'est-à-dire

$$\mod\zeta < \frac{1}{e}.$$

Il reste à examiner la seconde question qui, en d'autres termes, peut se poser ainsi : ζ *ayant son module inférieur à* $\frac{1}{e}$, *la série*

$$1 + \frac{x}{\beta}\zeta + \ldots + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{1.2\ldots n\,\beta^n}\zeta^n + \ldots$$

converge et représente $e^{\lambda x}$, λ *étant une racine de l'équation* (20). *On demande quelle est cette racine.*

La solution directe de cette question par l'étude de l'équation (20) n'offre pas de difficulté sérieuse; elle devient inutile, grâce à la théorie que j'ai développée ici, et qui fournit la réponse suivante : *la racine demandée est la seule qui assigne à* $\lambda\beta$ *un module moindre que l'unité.* C'est ce que nous apprend la première condition (18) (1).

13. Par l'exemple qui vient d'être examiné, on voit que la série d'Abel peut converger sans représenter la fonction qui sert à la construire. C'est ce qui arrive quand on choisit $\lambda\beta$ de manière que la seconde des conditions (18) soit satisfaite, mais non la première. On peut obtenir encore la même circonstance en ajoutant, à une fonction qui se représente par la série, une fonction qui donne zéro pour chaque terme de la série. C'est ce qui a lieu si l'on prend

$$f(x) = \sin \frac{(2k+1)\pi x}{2\beta},$$

k étant un nombre entier. On a effectivement

$$f^{(m)}(m\beta) = \left[\frac{(2k+1)\pi}{2\beta}\right]^m \sin\left[\frac{(2k+1)m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2}\right] = 0.$$

Ainsi, généralement, la fonction

$$A_0 \sin\frac{\pi x}{2\beta} + A_1 \sin\frac{3\pi x}{2\beta} + A_2 \sin\frac{5\pi x}{2\beta} + \ldots,$$

formée de termes analogues, *en nombre limité,* ne peut être re-

---

(1) L'excellent *Compendium der höheren Analysis* de M. Schlömilch contient au sujet de cette série particulière, une inexactitude. Je crois la rectification d'autant plus utile que cet ouvrage est plus répandu et apprécié.

Dans le t. II, p. 105 (3e édition), pour l'existence du développement

$$e^{az} = 1 + \frac{a}{1} z e^{-z} + \frac{a(a+2)}{1.2} z^2 e^{-2z} + \ldots,$$

le savant auteur énonce que la condition, pour z réel, est $0 \leqq z < 1$. Cette formule est un cas de (19), obtenu en mettant a, z au lieu de x, λ, et faisant $\beta = -1$. Les conditions sont donc $\mathrm{mod}\, z < 1$, $\mathrm{mod}\, z e^{1-z} < 1$, et, pour z réel, $-u < z < 1$, u étant la transcendante numérique indiquée au n° 9.

présentée par la série d'Abel, relative à la constante β, car la série a tous ses termes nuls.

Laissant de côté ces observations, j'arrive maintenant à l'application qui me paraît offrir le plus d'intérêt, celle de la série d'Abel à une fonction rationnelle. Je vais mettre en évidence le résultat que voici : *appliquée à une fonction rationnelle, la série d'Abel converge toujours et ne représente jamais la fonction, sauf au cas où il s'agit d'un polynôme entier.* Elle ne peut représenter la fonction, puisque cette dernière n'est pas synectique dans tout le plan.

14. Appliquant d'abord la série d'Abel à la fonction

$$\varphi(x) = \frac{1}{z-x},$$

j'obtiens le développement suivant :

$$F(x, z, \beta) = \frac{1}{z} + \frac{x}{(z-\beta)^2} + \frac{x(x-2\beta)}{(z-2\beta)^3} + \ldots + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{(z-n\beta)^{n+1}} + \ldots,$$

qui converge, quels que soient x, z, β, sauf pour $\beta = 0$. En effet, le terme de rang $(n+1)$ a pour expression asymptotique $\frac{x}{\beta^2} e^{\frac{z-x}{\beta}} \frac{1}{n^2}$, terme général d'une série absolument convergente.

On peut réduire la fonction F à ne contenir que deux variables, et prendre pour type $F(x, z, -1)$, que j'appellerai $G(x, z)$:

$$(21) \qquad G(x, z) = \frac{1}{z} + \frac{x}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{(z+n)^{n+1}} + \ldots,$$

et l'on aura

$$F(x, z, \beta) = -\frac{1}{\beta} G\left(-\frac{x}{\beta}, -\frac{z}{\beta}\right).$$

La nouvelle transcendante $G(x, z)$ est définie par l'équation (21) comme une fonction uniforme de x et de z, dans toute l'étendue du plan. Elle est synectique par rapport à x, et fractionnaire par rapport à z ; elle a les mêmes pôles que la fonction $\Gamma(z)$.

15. Bien que la fonction $G(x, z)$ ne coïncide en aucune façon avec $\frac{1}{z-x}$, elle a cependant deux propriétés qui rappellent son

origine. On obtient la première de ces propriétés en différentiant, par rapport à x et par rapport à z, les deux membres de (21)

$$\frac{\partial G(x,z)}{\partial x} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2(x+1)}{(z+2)^3} + \ldots + \frac{n(x+1)(x+n)^{n-2}}{(z+n)^{n+1}} + \ldots,$$

$$\frac{\partial G(x,z)}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} - \frac{2x}{(z+1)^3} - \ldots - \frac{nx(x+n-1)^{n-2}}{(z+n-1)^{n+1}} - \ldots,$$

d'où l'on conclut

$$\frac{\partial G(x,z)}{\partial x} = -\frac{\partial G(x+1, z+1)}{\partial z}, \tag{22}$$

propriété qui correspond à celle-ci

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{z-x}\right) = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z-x}\right).$$

Je parlerai plus loin de la seconde propriété; mais je veux m'arrêter un instant à la première, en observant que $\frac{\partial G(x,z)}{\partial z}$ n'est autre que la série que l'on obtiendrait, en appliquant la série d'Abel, pour $\beta = -1$, à la fonction $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{z-x}\right)$. De même, en différentiant G plusieurs fois par rapport à z, on a le même résultat que si l'on différentiait $\frac{1}{z-x}$ et qu'on appliquât ensuite la série d'Abel. Par conséquent, *si l'on forme la série d'Abel avec une fraction rationnelle quelconque* [$E(x)$ représente la partie entière]

$$\varphi(x) = E(x) + \frac{A}{z-x} + \frac{A_1}{(z-x)^2} + \frac{A_2}{(z-x)^3} - \ldots$$
$$+ \frac{A'}{z'-x} + \frac{A'_1}{(z'-x)^2} + \frac{A'_2}{(z'-x)^3} - \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

on obtient une série convergente, qui représente la fonction suivante :

$$E(x) + AF(x,z,\beta) - A_1\frac{\partial}{\partial z}F(x,z,\beta) + \frac{A_2}{1.2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}F(x,z,\beta) - \ldots$$
$$+ A'F(x,z',\beta) - A'_1\frac{\partial}{\partial z'}F(x,z',\beta) + \frac{A'_2}{1.2}\frac{\partial^2}{\partial z'^2}F(x,z',\beta) - \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On peut donner une autre forme à cette fonction, en rem-

plaçant les dérivées par rapport à z par les dérivées par rapport à x, en vertu de (23), et écrire

$$\begin{aligned} E(x)+AF(x,z,\beta) &- A_1\frac{\partial}{\partial x}F(x-\beta,z-\beta,\beta)\\ &+\frac{A_2}{1.2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x-2\beta,z-2\beta,\beta)-\dots\\ &+A'F(x,z',\beta)-A'_1\frac{\partial}{\partial x}F(x-\beta,z'-\beta,\beta)\\ &+\frac{A'_2}{1.2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x-2\beta,z'-2\beta,\beta)-\dots\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{aligned}$$

On peut aussi intégrer la fonction G par rapport à l'une ou l'autre des variables x, z, et les deux opérations donnent lieu à une propriété analogue à (22). Le développement qu'on obtient en intégrant par rapport à z la fonction $F(x, z, \beta)$ est celui qui résulterait de la série d'Abel appliquée à la fonction $\log(z-x)$. Il converge, comme on voit, dans tous les cas, sauf pour $\beta = 0$, et ne représente pas la fonction. Cet exemple est particulièrement intéressant en ce que le Mémoire d'Abel contient effectivement la série correspondante comme représentant le logarithme, ce qui est une erreur manifeste.

A ce propos, on ne doit pas perdre de vue que le Mémoire d'Abel, dont il s'agit ici, n'a pas été publié par lui-même; bien qu'il offre un très haut intérêt, on doit assurément le classer, suivant l'expression employée par les savants auteurs de la 2e édition, au nombre des « travaux de jeunesse, datant d'une époque où la » critique d'Abel n'était pas encore complètement développée. » Quand Abel, ajoutent MM. Sylow et Lie, parle plus tard des » faux résultats auxquels conduit un raisonnement peu rigoureux, » il pense, entre autres, aux erreurs auxquelles il avait été porté » lui-même dans ses anciens travaux, depuis longtemps rejetés » par lui (1). » Il serait bien injuste, comme on voit, d'accuser Abel d'une erreur qu'il avait peut-être reconnue, et qu'en tous les cas il n'avait pas livrée au public.

16. La seconde propriété de la fonction $G(x, z)$ que je désire

(1) *Œuvres complètes d'Abel*, 2e édition. Préface, p. III.

signaler se rapporte au développement de cette fonction suivant les puissances de z, à exposants positifs et négatifs.

Si l'on suppose que le module de z soit compris entre n et $n+1$, les $(n+1)$ premiers termes de (21) sont développables suivant les puissances décroissantes de z, tandis que tous les suivants sont développables suivant les puissances croissantes de z. On a ainsi deux parties, l'une $\Phi(z)$, provenant des termes à partir du $(n+2)^{\text{ième}}$, et procédant suivant les puissances à exposants positifs, l'autre procédant suivant les puissances à exposants négatifs. La propriété dont je parle consiste en ce que cette seconde partie coïncide, jusqu'aux termes de degré $(n+1)$ inclusivement, avec le développement de $\frac{1}{z-x}$, en sorte qu'*on a*

$$G(x,z) = \Phi(z) + \frac{1}{z-x} + \frac{1}{z^{n+2}}\Psi\left(\frac{1}{z}\right),$$

$\Phi(z)$ étant un développement suivant les puissances entières, ascendantes et positives de z, $\Psi(z)$ un développement suivant les puissances entières, ascendantes et positives de $\frac{1}{z}$; et cette formule est valable quand le module de z est compris entre n et $(n+1)$.

A cette propriété s'en rattache une autre que l'on pourrait chercher à établir directement, pour donner une base différente à la démonstration des propositions II et III; mais c'est là une recherche que je ne veux pas entreprendre pour le moment.

Soit $f(z)$ une fonction synectique dans tout le plan, et considérons l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int f(z)F(x,z,\beta)\,dz$, prise le long d'un contour infiniment grand. D'après (21), cette intégrale n'est autre que

$$f(x) + \frac{x}{1}f'(\beta) + \frac{x(x-2\beta)}{1.2}f''(2\beta)\ldots + \frac{x(x-n\beta)^{n-1}}{1.2\ldots n}f^{(n)}(n\beta)\ldots.$$

Par conséquent :

Si $f(x)$ est développable suivant la série d'Abel relative à la constante β, l'intégrale $\frac{1}{2i\pi}\int f(z)F(x,z,\beta)\,dz$, prise le long d'un contour infiniment grand, est égale à $f(x)$.

20. Je vais donner, en terminant, une autre propriété de la fonction $G(x, z)$, qui la rapproche, à un autre point de vue, de la fonction $\Gamma(z)$.

Je reprends le développement, établi au n° **12**, pour la fonction $e^{\lambda x}$, par la série d'Abel, et, supposant $\beta = -1$, j'observe que les conditions (18) sont satisfaites quand λ est réel et compris entre zéro et l'unité. Je peux donc employer ce développement dans l'intégrale suivante, et écrire

$$(23)\qquad \int_0^1 e^{\lambda x-\lambda z}d\lambda = \int_0^1 e^{-\lambda z}d\lambda \ldots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{1.2\ldots n}\int_0^1 \lambda^n e^{-\lambda(z+n)}d\lambda \ldots .$$

Considérons maintenant l'équation

$$(24)\qquad \mu e^{-\mu} = \lambda e^{-\lambda},$$

où λ sera censé donné, et μ sera l'inconnue. Si l'on fait varier λ par des valeurs réelles depuis 1 jusqu'à $+\infty$, l'équation a une autre racine réelle μ, qui varie depuis 1 jusqu'à zéro. Mettons cette racine μ, fonction réelle de λ, dans l'intégrale ci-après, et observons que $e^{\mu x}$ est encore développable comme tout à l'heure $e^{\lambda x}$; nous aurons ainsi

$$\int_1^\infty e^{\mu x-\lambda z}d\lambda = \int_1^\infty e^{-\lambda z}d\lambda \ldots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{1.2\ldots n}\int_1^\infty \mu^n e^{-n\mu}e^{-\lambda z}d\lambda \ldots .$$

Ce que, d'après (24), nous pourrons écrire encore sous cette autre forme

$$(25)\qquad \int_1^\infty e^{\mu x-\lambda z}d\lambda = \int_1^\infty e^{-\lambda z}d\lambda \ldots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{1.2\ldots n}\int_1^\infty \lambda^n e^{-\lambda(z+n)}d\lambda \ldots .$$

Ajoutant membre à membre les équations (23) et (25), j'ai maintenant

$$\begin{aligned}\int_1^\infty e^{\mu x-\lambda z}d\lambda + \int_0^\infty e^{\lambda x-\lambda z}d\lambda &= \int_0^\infty e^{-\lambda z}d\lambda \ldots \\ &\quad + \frac{x(x+n)^{n-1}}{1.2\ldots n}\int_0^\infty \lambda^n e^{-\lambda(z+n)}d\lambda \ldots \\ &= \frac{1}{z} \ldots + \frac{x(x+n)^{n-1}}{(z+n)^{n-1}} \ldots = G(x, z).\end{aligned}$$

Mettant enfin pour l'intégrale (23) sa valeur explicite, j'ai

$$(26) \qquad \Phi(x, z) = \int_1^{\infty} e^{x\psi(\lambda) - \lambda z} d\lambda = \frac{1 - e^{x-z}}{x - z} + G(x, z).$$

Telle est la formule que je voulais obtenir. *La fonction* $G(x, z)$ *est exprimée au moyen de l'intégrale définie* $\Phi(x, z)$, *dans laquelle* $\psi(\lambda)$ *est la racine réelle, différente de* λ, *que possède l'équation* (24). *Cette expression est valable quand la partie réelle de* z *est positive.*

On remarquera que la fonction $\Phi(x, z)$ vérifie, tout aussi bien que $G(x, z)$, l'équation aux différences mêlées (22).