BULLETIN DE LA S. M. F.

L. BÉRARD BERGERY

A. IKEMAKHEN

Sur l'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature (n, n)

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 1 (1997), p. 93-114

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_1_93_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 93–114.

SUR L'HOLONOMIE DES VARIÉTÉS PSEUDO-RIEMANNIENNES DE SIGNATURE (n, n)

PAR

L. BÉRARD BERGERY (*) et A. IKEMAKHEN (**)

RÉSUMÉ. — Nous étudions le groupe d'holonomie des variétés pseudo-riemanniennes de signature (n,n). Nous étudions d'abord le cas particulier des variétés dont le groupe d'holonomie laisse invariants deux sous-espaces totalement isotropes supplémentaires. Nous donnons ensuite une liste de groupes qui sont candidats à être groupe d'holonomie d'une variété pseudo-riemannienne indécomposable mais non irréductible en signature (2,2). Nous terminons par quelques exemples de métriques explicites.

ABSTRACT. — We study the holonomy group of a pseudo-riemannian manifold with signature (n,n). We first study metrics whose holonomy group leaves invariant two n-dimensional totally isotropic complementary subspaces. Then we give a list of candidates for restricted holonomy groups of indecomposable non-irreducible pseudo-riemannian manifolds with signature $(2,2)$, and some examples of related metrics.

1. Introduction

Soit $(M, \langle\ \rangle)$ une variété pseudo-riemannienne de dimension m et de signature $(p, m-p)$, et soit θ un point de base pour M. Le groupe d'holonomie en θ est le sous-groupe de $\mathrm{O}_0(p, m-p) \subset \mathrm{GL}(T_\theta M)$, engendré par le transport parallèle le long des lacets basés en θ. Les invariants de ce groupe correspondent aux tenseurs parallèles sur M, et la classification des groupes linéaires qui peuvent apparaître ainsi est un problème important de géométrie (pseudo-)riemannienne. Ce problème

(*) Texte reçu le 20 mars 1996, révisé le 4 septembre 1996.
L. BÉRARD BERGERY, Université Henri Poincaré, Institut Élie Cartan, BP 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX (France).
(**) A. IKEMAKHEN, Université Cadi-Ayyad, Faculté des sciences et techniques, Département de mathématiques, BP 618, Guéliz Marrakech (Maroc).
Classification AMS : 53B30.
Keywords : restricted holonomy group, indecomposable pseudo-riemannian manifold.

est complètement résolu dans le cas riemannien ($p = 0$), mais pas dans le cas général pseudo-riemannien. Nous apportons ici une contribution au cas (n, n) et plus particulièrement au cas $(2, 2)$.

Pour simplifier, nous nous restreindrons ici au problème « local », en ne considérant que le groupe d'holonomie « restreint », qui est engendré par le transport parallèle le long des lacets homotopes au lacet constant. (Pour alléger les notations, dans le cours du texte nous omettrons parfois le mot *restreint*, mais nous n'étudions en fait ici que ce cas.)

La première étape de l'étude de l'holonomie est le classique théorème de G. De Rham (pour le cas riemannien : voir le chapitre 10 dans [6] par exemple), généralisé par H. Wu (dans le cas pseudo-riemannien, voir [22], [23]). Si la représentation du groupe d'holonomie H dans $T_\theta M$ est décomposable en une somme directe orthogonale de représentations dans des sous-espaces E_i ($i = 1, ..., r$) de $T_\theta M$, non dégénérés pour $\langle\ \rangle_\theta$, alors, au moins localement au voisinage de θ, il existe une décomposition de M en produit riemannien de sous-variétés pseudo-riemanniennes M_i telles que E_i soit l'espace tangent à M_i, et si H_i est le groupe d'holonomie de M_i, alors H est en fait le produit des H_i, et H_i est l'image de H dans $\mathrm{GL}(E_i)$.

On est donc ainsi ramené à étudier les groupes d'holonomie « indécomposables », c'est-à-dire tels qu'il n'existe pas de sous-espace non-dégénéré propre dans $T_\theta M$, invariant par H. Dans le cas riemannien, on est donc ramené au cas où la représentation de H dans $T_\theta M$ est irréductible. Par contre, dans le cas pseudo-riemannien, il peut y avoir encore des sous-espaces invariants pour la représentation de H, à condition que ces sous-espaces soient dégénérés pour $\langle\ \rangle_\theta$.

M. Berger a donné dans [4] une liste de groupes d'holonomie possibles dont la représentation est irréductible (dans le cas riemannien, pseudo-riemannien, ou même affine). En résumé, ou bien la variété M est localement symétrique, ou bien le groupe H appartient à une assez courte liste de groupes linéaires. Quelques uns de ces groupes ont été ensuite exclus de cette liste par d'autres arguments (voir par exemple [1] et [7] pour le cas Spin9). Pour une revue récente sur la liste de Berger, voir la synthèse [9] de R.L. Bryant.

Dans la foulée, M. Berger avait classifié dans [5] les espaces symétriques pseudo-riemanniens dont le groupe de transvections est semi-simple (ce qui contient en particulier le cas irréductible).

Enfin, la dernière étape de l'étude du groupe d'holonomie consiste à fabriquer des exemples de variétés ayant le groupe donné comme groupe d'holonomie, ce qui est loin d'être évident (par exemple, pour $\mathrm{SU}(n)$ et $\mathrm{Sp}(n)$ voir [11] et [24], et pour les groupes exceptionnels de la liste de Berger voir [8]). Cela devient d'ailleurs encore plus compliqué si on cherche des exemples de variétés complètes ou même compactes (voir par exemple [10], et [9] pour l'état actuel de la question).

Malgré tous ces travaux, le cas des groupes d'holonomie indécomposables et non-irréductibles n'a été que peu abordé jusqu'à présent, et même la classification des espaces symétriques pseudo-riemanniens n'est pas terminée. Cette classification des espaces symétriques n'est faite que dans le cas lorentzien (pour la signature $(1, m-1)$, voir M. Cahen et N. Wallach [14]) et dans le cas de la signature $(2, m-2)$, voir M. Cahen et M. Parker ([12], [13] et [18]).

Nous avons commencé l'étude des groupes d'holonomie indécomposables et non-irréductibles par le cas lorentzien, dans les articles [3] et [16]. Le cas de la signature $(2, m-2)$ sera étudié dans l'article [17] en préparation.

Dans cette article, nous nous intéressons au contraire au cas en principe le plus éloigné du cas riemannien, c'est-à-dire au cas «neutre» où la signature est de type (n, n) avec $m = 2n$.

Dans le paragraphe 2, nous commençons par examiner un cas qui n'apparaît que dans cette signature, celui où le groupe d'holonomie indécomposable laisse invariants deux sous-espaces supplémentaires totalement isotropes. Le résultat général obtenu est décrit dans le théorème 1 à la fin du paragraphe. À partir du paragraphe 3, nous étudions le premier cas non trivial, celui où $n = 2$ et $m = 4$. Nous commençons par classifier les sous-groupes de $SO_0(2, 2)$ qui sont indécomposables et non-irréductibles. La liste est donnée dans le théorème 2. Au paragraphe 4, nous montrons que deux de ces groupes ne sont pas des groupes d'holonomie, en utilisant (comme d'habitude) l'identité de Bianchi et nous obtenons ainsi une liste précise de condidats potentiels que nous séparons en deux listes suivant que le groupe d'holonomie laisse ou non invariants deux sous-espaces supplémentaires totalement isotropes. Au paragraphe 5, nous extrayons des résultats généraux de Berger, Cahen et Parker pour les espaces symétriques ce qui s'applique à notre situation, en comparant à la liste précédente. Enfin au paragraphe 6, nous utilisons les résultats du paragraphe 2 pour obtenir des exemples explicites de métriques non symétriques pour les groupes d'une des listes du paragraphe 4. Il reste à traiter l'autre liste : cela sera fait ailleurs, la méthode devrait être différente.

Ce travail a été mis au point lors de deux séjours du deuxième auteur à l'Institut Élie Cartan (Unité Mixte de Recherche UMR 9973, UHP-CNRS-INRIA).

2. Variété de type (n, n) et holonomie

Soit $(M, \langle\ \ \rangle)$ une variété pseudo-riemannienne de dimension $m = 2n$ avec g de signature (n, n). Soit θ un point de base de M. On suppose que la représentation du groupe d'holonomie (restreint) $\mathbb{H} = H^0_\theta$ en θ de $(M, \langle\ \ \rangle)$ laisse invariants deux sous-espaces E et E' de l'espace tangent $T_\theta M$, supplémentaires et totalement isotropes. On note G' le sous-groupe connexe de $\mathrm{SO}_0(T_\theta M, \langle\ \rangle_\theta)$ engendré par les matrices qui laissent invariants E et E'. Si on identifie $\mathrm{SO}_0(T_\theta M, \langle\ \rangle_\theta)$ à $\mathrm{SO}_0(\eta)$ avec η définie sur $\mathbb{R}^m$ par

$$\eta\big((x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n)\big) \\ = x_1 y'_1 + x'_1 y_1 + \cdots + x_n y'_n + x'_n y_n,$$

alors G' est formée par les matrices

$$V = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{pmatrix}$$

dans l'écriture naturelle en blocs (n, n), où $U \in \mathrm{GL}^+(n, \mathbb{R})$ et où ${}^tU^{-1}$ est l'inverse de sa matrice transposée. Si K est un sous-groupe de G', on notera K_T le sous-groupe

$$K_T = \big\{U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\ ;\ V \in K\big\}$$

et $K_{T'}$ le sous-groupe

$$K'_T = \big\{{}^tU^{-1} \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})\ ;\ V \in K\big\}.$$

Remarquons que G' est le sous-groupe des éléments de $\mathrm{SO}_0(n, n)$ qui commutent à la matrice

$$I_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

(où I est l'identité dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$). Par conséquent, si l'holonomie $\mathbb{H}$ est dans G', la variété M admet un tenseur parallèle de type $(1, 1)$ (c'est-à-dire un endomorphisme de $T_\theta M$) I_1 qui est involutif ($I_1^2 = \mathrm{Id}$) et antisymétrique pour la métrique $\langle\ \rangle$. Une telle structure s'appelle parfois « parahermitienne ».

Puisque $\mathbb{H}$ laisse invariants E et E', on a sur M deux distributions parallèles supplémentaires T et T', intégrables et de dimension n telles que la feuille associée à T (resp. à T') qui passe par θ est T_0 (resp. T'_0). Les feuilles de chaque distribution sont totalement géodésiques et la connection de Levi-Civita D associée à la métrique pseudo-riemannienne $\langle\ \rangle$

induit une connection sur chaque feuille. Si on note R la courbure tensorielle de $\langle\ \rangle$, on a :

$$R(U,V)X \in T \quad \text{pour tous } U,V \in TM \text{ et } X \in T.$$

Par suite,

$$\big\langle R(U,V)X,Y\big\rangle = \big\langle R(X,Y)U,V\big\rangle = 0 \quad \text{pour tout } Y \in T.$$

Autrement dit, $R(X,Y) = 0$; de même, on a $R(X',Y') = 0$ pour X',Y' dans T'. D'où la connection induite sur chaque feuille est plate. Il y a donc sur chaque feuille des coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$, (resp. $(y_1,\dots,y_n)$) sur T_0 (resp. sur T'_0), plates pour la connection. On met localement autour de θ des coordonnées sur M, en prenant un voisinage produit et la construction suivante : en tout point p de M on regarde les feuilles T_p et T'_p ; T_p coupe T'_0 en $(y_1,\dots,y_n)$ et T'_p coupe T_0 en $(x_1,\dots,x_n)$ par transversalité ; donc $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ est un système de coordonnées sur M. Dans ce système de coordonnées, la métrique $\langle\ \rangle$ a une matrice

$$\mathrm{d}s^2 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix},$$

puisque T et T' sont totalement isotropes. En plus A est inversible. On peut enfin choisir les coordonnées (x_i,y_i) telles que $A = I$ en θ. Pour simplifier, on note

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \partial'_i = \frac{\partial}{\partial y_i}$$

et, puisque $\partial_i \in T$ et $\partial'_i \in T'$, pour tout $V \in TM$, on a :

$$D_V\partial_i \in T \text{ et } D_V\partial'_i \in T'.$$

En particulier, puisque $D_{\partial_i}\partial'_j = D_{\partial'_j}\partial_i \in T \cap T'$, on a :

$$D_{\partial_i}\partial'_j = 0 \quad \text{pour tous } i,j = 1,\dots,n.$$

Remarque. — Le long de T_0 on a $D_{\partial_i}\partial_j = 0$, mais cela n'est pas vrai en général le long de T. De même, le long de T'_0 on a $D_{\partial'_i}\partial'_j = 0$.

On calcule maintenant les $D_{\partial_i}\partial'_j$ à partir des éléments $a_{ij} = \langle\partial_i,\partial'_j\rangle$ de A. On a :

$$\begin{aligned}
&\langle D_{\partial_i}\partial_j,\partial_k\rangle = 0, && \langle D_{\partial_i}\partial_j,\partial'_k\rangle = \tfrac12\big(\partial_i a_{jk} + \partial_j a_{ik}\big),\\
&\langle D_{\partial_i}\partial'_j,\partial_k\rangle = \tfrac12\big(\partial_i a_{kj} - \partial_k a_{ij}\big), && \langle D_{\partial_i}\partial'_j,\partial'_k\rangle = \tfrac12\big(\partial'_j a_{ik} - \partial'_k a_{ij}\big),\\
&\langle D_{\partial'_i}\partial'_j,\partial'_k\rangle = 0, && \langle D_{\partial'_i}\partial'_j,\partial_k\rangle = \tfrac12\big(\partial'_i a_{kj} + \partial'_j a_{ki}\big).
\end{aligned}$$

Localement, la condition pour que T et T' soient parallèles est donc $D_{\partial_i}\partial'_j = 0$, soit :

$$\partial_i a_{jk} = \partial_j a_{ik} \quad \text{et} \quad \partial'_i a_{jk} = \partial'_k a_{ji}\ . \tag{1}$$

Et la condition pour que la métrique $\langle\ \rangle$ soit plate sur T_0 et T'_0 est :

$$A\big(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0\big) = A\big(0, \dots, 0, y_1, \dots, y_n\big) = I. \tag{2}$$

Les équations (1) s'intègrent facilement. Il existe (localement) une fonction h telle que

$$a_{ij} = \partial_i \partial'_j h, \tag{3}$$

et on peut choisir h pour que son développement de Taylor en 0 commence par $x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$, les termes suivants étant au moins quadratiques en les x_i et quadratiques en les y_i. Avec ces conditions, les seuls éléments non nuls pour la connection sont donc :

$$\langle D_{\partial_i}\partial_j, \partial'_k\rangle = \partial_i a_{jk} \quad \text{et} \quad \langle D_{\partial'_i}\partial'_j, \partial_k\rangle = \partial'_i a_{kj}.$$

Par conséquent, si on écrit

$$D_{\partial_i}\partial_j = \sum_k \Gamma^k_{ij}\partial_k,$$

avec Γ^k_{ij} les symboles de Christoffel, on a :

$$\sum_k \Gamma^k_{ij} a_{k\ell} = \partial_i a_{j\ell}.$$

Soit

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_\ell \partial_i a_{j\ell}\ \widetilde{a_{\ell k}} \quad \text{où } \widetilde{a_{\ell k}} \text{ est le coefficient de la matrice } A^{-1}.$$

D'où, si on note Φ_i l'opérateur D_{∂_i} restreint à T, exprimé dans la base (∂_j), on a :

$$\Phi_i = {}^tA^{-1} \cdot \partial_i({}^tA).$$

De la même façon, si on écrit

$$D_{\partial'_i}\partial'_j = \sum_k {\Gamma'}^k_{ij}\partial'_k,$$

on obtient :

$${\Gamma'}^k_{ij} = \sum_\ell \partial'_i a_{\ell j}\ \widetilde{a_{k\ell}}$$

Et si on note Φ'_i l'opérateur $D_{\partial'_i}$ restreint à T', exprimé dans la base (∂'_j), on a :

$$\Phi'_i = A^{-1} \cdot \partial'_i A.$$

$(\partial_1, \ldots, \partial_n)$ est une base de T en tout point de M. De plus, les ∂_i sont parallèles le long des feuilles de T' et le long de la feuille T_0 (mais pas *a priori* le long des autres feuilles de T).

Soit γ un chemin particulier formé de :

- γ_1 le long de T'_0 de $(0,0)$ à $p = (0,y)$,
- γ_2 le long de T de p à $q = (x,y)$,
- γ_3 le long de T' de q à $(x,0)$ et
- γ_4 le long de T'_0 de $(x,0)$ à $(0,0)$.

Le long de γ_1, γ_3 et γ_4, les ∂_i sont parallèles. Donc le transport parallèle τ_γ de γ restreint à T est l'identité le long de γ_1, γ_3 et γ_4, si on l'exprime dans cette base. On regarde maintenant τ_{γ_2}. Si on pose

$$\tau_{\gamma_2} \cdot \partial_i p = \sum_j f_{ij} \cdot \partial_j q,$$

on a :

$$\langle \tau_{\gamma_2} \cdot \partial_i, \partial'_k \rangle_q = \langle \partial_i, \tau_{\gamma_2}^{-1} \cdot \partial'_k \rangle_p = \langle \partial_i, \partial'_k \rangle_p = a_{ik}(p),$$

car les ∂'_k sont parallèles le long des feuilles de T. Or $A(p) = I$, d'où

$$\sum_j f_{ij}\, a_{jk}(q) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc immédiatement que la restriction de τ_γ à T, exprimée dans la base $(\partial_1, \ldots, \partial_n)$, est exactement ${}^tA^{-1}(q)$. D'où ${}^tA(q) \in \mathbb{H}_T$ pour tout point q de M proche de 0.

Maintenant, soit K un sous-groupe connexe de G'. On suppose que ${}^tA$ est dans K_T ; alors $\mathbb{H}(\mathrm{d}s^2) \subset K$. En effet, si on désigne par L_B la multiplication à gauche par B dans K_T, la dérivée de $L_{B^{-1}}$ en B est

$$D_B L_{B^{-1}}(X) = B^{-1}X \in \mathcal{K}_T \quad \text{pour } X \in T_B K_T,$$

avec $\mathcal{K}_T$ l'algèbre de Lie de K_T. Par conséquent,

$${}^tA^{-1}{}^tA' \in \mathcal{K}_T \quad \text{pour toute dérivée } A' \text{ de } A.$$

En particulier, Φ_i appartient à $\mathcal{K}_T$. On a de même $\Phi'_i \in \mathcal{K}_{T'}$. Donc

$$D_{\partial_i} \in \mathcal{K} \quad \text{et} \quad D_{\partial'_i} \in \mathcal{K}.$$

Par conséquent, $\tau(\sigma) \in K$ pour tout lacet σ en 0 dans un voisinage de 0. Ainsi $\mathbb{H}(\mathrm{d}s^2) \subset K$. D'où :

THÉORÈME 1. — *Soit* $(M, \langle\ \rangle)$ *une variété pseudo-riemannienne de signature* (n, n). *Soit* θ *un point de* M. *Si le groupe d'holonomie (restreint)* $\mathbb{H} = H_\theta^0$ *en* θ *de* M *laisse invariants deux sous-espaces de* $T_\theta M$ *supplémentaires et totalement isotropes, alors, à un isomorphisme près,*

$$\mathbb{H} \subset G' = \left\{ \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & {}^tU^{-1} \end{pmatrix} ;\ U \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \right\}.$$

Et il existe un système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ *sur* M *et une fonction* h *définie au voisinage de* 0 *sur* $\mathbb{R}^{2n}$ *telles que*

a) *la métrique* $\langle\ \rangle$ *a en coordonnées une matrice de la forme :*

$$\mathrm{d}s^2 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix},$$

où $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ *est la matrice de coefficients* $\partial_i \partial_j' h$;

b) *le développement de Taylor de* h *en* 0 *débute par* $x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ *et les termes suivants sont au moins quadratiques en les* x_i *et quadratiques en les* y_i. *De plus,*

c) ${}^tA$ *appartient à* $\mathbb{H}_T$;

d) *plus précisement, le groupe d'holonomie restreint* $\mathbb{H}(\mathrm{d}s^2)$ *est le plus petit sous-groupe connexe* K *de* G' *tel que* ${}^tA \in K_T$.

REMARQUE. — Étant donné un sous-groupe K de G', le théorème 1 nous permet de trouver, si c'est possible, des exemples de métriques de signature (n, n) dont le groupe d'holonomie restreint est exactement K (voir paragraphe 5).

3. Un problème algébrique en dimension 4

Nous rappelons d'abord certaines définitions nécessaires pour la suite :

DÉFINITION 1. — Un sous-groupe connexe H de $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ est dit *indécomposable* si il ne laisse invariant aucun sous-espace propre non dégénéré de $\mathbb{R}^m$. Une sous-algèbre $\mathcal{H}$ de $gl(m, \mathbb{R})$ est dite *indécomposable* si son sous-groupe connexe associé l'est.

DÉFINITION 2. — Une variété pseudo-riemannienne $(M, \langle\ \rangle)$ connexe est dite *irréductible* si sa représentation d'holonomie restreinte H_θ^0 en un point $\theta \in M$ est irréductible. La variété $(M, \langle\ \rangle)$ est dite *indécomposable* si H_θ^0 ne laisse invariant aucun sous-espace propre non dégénéré de $T_\theta M$.

Soit maintenant $(M, \langle\ \rangle)$ une variété pseudo-riemannienne de dimension 4 avec $\langle\ \rangle$ de signature $(2, 2)$. On suppose que $(M, \langle\ \rangle)$ est indécomposable non irréductible, donc la représentation d'holonomie (restreinte)

$\mathbb{H} = H_\theta^0$ en un point $\theta \in M$ ne laisse invariant aucun sous-espace propre non dégénéré de $T_\theta M$ et laisse invariant au moins un sous-espace propre E dégénéré de $T_\theta M$, donc aussi son orthogonal $E^\perp$ relativement à la 2-forme symétrique $\langle\ \ \rangle_\theta$ et l'intersection $E \cap E^\perp$ qui est un sous-espace totalement isotrope. Par conséquent, si on identifie $T_\theta M$ à $\mathbb{R}^4$ et $\langle\ \ \rangle_\theta$ à la 2-forme symétrique η, alors $\mathbb{H}$ est un sous-groupe connexe de $\mathrm{SO}_0(\eta)$ qui laisse invariant une droite isotrope D ou un plan P totalement isotrope, mais ne laisse invariant aucun sous-espace propre non dégénéré de $\mathbb{R}^4$.

Dans la suite, nous classifierons toutes les possibilités de tels sous-groupes et en particulier ceux qui laissent invariants deux plans totalement isotropes de $\mathbb{R}^4$ supplémentaires. Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$; on peut donc supposer que $D = \mathbb{R}e_1$ et $P = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$. On note G le sous-groupe connexe de $\mathrm{SO}_0(\eta)$ engendré par les matrices qui laissent invariant D ou P. Alors l'algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G est formée par les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} U & aJ \\ 0 & -{}^tU \end{pmatrix}$$

où $U \in \mathrm{gl}(2,\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ et $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Pour simplifier les notations, on identifie $\mathcal{G}$ à $\mathrm{gl}(2,\mathbb{R}) \bigoplus \mathbb{R}$ et A à (U,a). On notera :

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{U \,;\ (U,a) \in \mathcal{G}\}, \\ \mathcal{U}' &= \{U \,;\ (U,a) \in \mathcal{H}\}, \\ \mathcal{A} &= \{(0,a) \,;\ a \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Le crochet dans $\mathcal{G}$ est défini par

$$[(U,a),(U',a')] = \big([U,U'], a' \operatorname{trace} U - a \operatorname{trace} U'\big). \tag{4}$$

On remarque qu'il n'existe aucune droite ni aucun plan non dégénéré invariant par $\mathcal{A}$. Donc $\mathcal{A}$ est un idéal indécomposable de $\mathcal{G}$.

THÉORÈME 2. — *Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre indécomposable non irréductible dans $\mathrm{so}_0(\eta)$. Alors, à un isomorphisme près, $\mathcal{H}$ est dans la sous-algèbre $\mathcal{G}$ et*

1) *ou bien elle contient un conjugué de l'idéal $\mathcal{A}$ engendrée par $\left(\begin{smallmatrix} 0 & J \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$*

2) *ou bien, elle est l'une des exceptions :*

a) $\mathcal{H}_1 = \mathrm{so}(2) + \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha I + \beta J & 0 \\ 0 & -\alpha I + \beta J \end{pmatrix} ;\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\mathcal{H}_2$ *engendrée par* $\left(\begin{smallmatrix} L & J \\ 0 & -L \end{smallmatrix}\right)$;

c) $\mathcal{H}_3$ *engendrée par* $\left(\begin{smallmatrix} J & J \\ 0 & J \end{smallmatrix}\right)$ *avec* $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *et* $L = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Preuve.

LEMME 1. — *Les sous-algèbres $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ sont indécomposables.*

Preuve du Lemme 1.

• Pour $\mathcal{H}_1$, aucune droite n'est invariante et si E est un plan non dégénéré invariant par $\mathcal{H}_1$, alors $E \cap P = 0$. D'où il existe une matrice carrée B, telle que $E = \{(BX, X)\ ;\ X \in \mathbb{R}^2\}$. Ce qui implique que

$$-2\alpha B = \beta\big(BJ + JB\big) \text{ pour tout } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Donc $B = 0$, ce qui est impossible.

• Pour $\mathcal{H}_2$, les seules droites invariantes par $(L,1)$ sont $\mathbb{R}e_1$ et $\mathbb{R}e_2$. Et si E est un plan non dégénéré, invariant par $(L,1)$ avec $E \cap P$ de dimension 1, on peut supposer que $E \cap F = \mathbb{R}e_1$, $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}x$ et $(L,1)x = e_1 + \mu x$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et x un vecteur non nul de E indépendant de e_1. On en déduit que $E = P$ ou $E = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_4$. Si maintenant $E \cap P = 0$, alors $E = \{(BX, X)\ ;\ X \in \mathbb{R}^2\}$ avec B une matrice réelle carrée. Ce qui implique, pour tout $X \in \mathbb{R}^2$,

$$(L,1) \cdot \begin{pmatrix} BX \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (LB + J)X \\ -LX \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -LBX \\ -LX \end{pmatrix},$$

d'où $J = -(BL + LB)$, ce qui est impossible.

• Pour $\mathcal{H}_3$, on fait la même démonstration que celle de $\mathcal{H}_2$. $\square$

Soit maintenant $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de $\mathcal{G}$. On suppose que $\mathcal{H}$ est indécomposable et qu'elle ne contient aucun conjugué de $\mathcal{A}$ (sous le groupe orthogonal complet). Donc $\mathcal{H}$ ne contient ni $\mathcal{A}$ ni $\mathcal{A}'$ engendrée par $(N, 0)$, (où N est la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) et donc ni $\mathcal{B} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{A}'$. Nous distinguons maintenant deux cas :

1) $\mathcal{H}$ laisse invariante au moins une droite isotrope. À une conjugaison près, on peut supposer que $\mathcal{H}$ laisse invariante la droite $\mathbb{R}e_1$, et donc les éléments de $\mathcal{H}$ sont de la forme

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \delta\right) \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

1.1) Si $\mathcal{H} \cap \mathcal{B} = 0$, il existe des constantes réelles a, b, c, d telles que tout élément de $\mathcal{H}$ est de la forme

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha & a\alpha + b\beta \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, c\alpha + d\beta\right).$$

Si $\mathcal{H}$ est de dimension 2, on doit avoir $a = -b$ et $c = d$. Or dans ce cas $\mathcal{H}$ laisse invariant le plan non dégénéré $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}(-ace_1 + ce_2 + e_3 + ae_4)$. D'où $\mathcal{H}$ est décomposable. Donc on peut supposer que $\mathcal{H}$ est une droite engendrée par

$$A = \left(\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \delta\right) \quad \text{avec } \alpha \neq 0 \text{ ou } \beta \neq 0.$$

Si $\alpha \neq \beta$, à une conjuguaison près dans $\mathcal{G}$, on peut supposer que $\gamma = 0$. Si en plus $\delta = 0$, $\mathcal{H}$ est décomposable, donc $\delta \neq 0$.

Si $\alpha \neq \beta$ et $\alpha = -\beta$, à une conjuguaison près, on peut supposer que $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2$ et donc indécomposable.

Si maintenant $\alpha \neq \beta$ et $\alpha + \beta \neq 0$, la matrice A laisse invariant le plan non dégénéré $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}(\frac{\delta}{\alpha+\beta} e_2 + e_3)$, donc $\mathcal{H}$ est décomposable.

Si $\alpha = \beta$ et $\gamma \neq 0$, à une conjuguaison près, on peut supposer que $\mathcal{H}$ est engendrée par $(L, 1)$ et donc indécomposable.

Si $\alpha = \beta$ et $\gamma = 0$, A laisse invariant le plan non dégénéré $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}(e_1 + e_2 + 2\frac{\alpha}{\delta} e_3 - 2\frac{\alpha}{\delta} e_4)$, si $\delta \neq 0$ et laisse invariant le plan non dégénéré $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_3$, si $\delta = 0$. Donc $\mathcal{H}$ est décomposable.

1.2) Si $\mathcal{H} \cap \mathcal{B}$ est de dimension 1, on peut supposer qu'elle est engendrée par $A_0 = (aN, 1)$ avec $a \neq 0$. Toute matrice A de $\mathcal{H}$ s'écrit

$$A = C + \delta A_0, \quad \text{avec} \quad C = \left(\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, 0\right) \in \mathcal{H}.$$

Or,

$$\big[A_0, C\big] = \big(a(\beta - \alpha)N, -(\alpha + \beta)\big) \in \mathcal{H} \cap \mathcal{B}.$$

D'où $a(\beta - \alpha) = -a(\alpha + \beta)$. Ainsi $\beta = 0$. En plus, pour

$$C = \left(\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right), \quad C' = \left(\begin{pmatrix} \alpha' & \gamma' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right) \in \mathcal{H},$$

on a :

$$\big[C, C'\big] = (\gamma'\alpha - \gamma\alpha')(N, 0) \in \mathcal{A}'.$$

D'où $\gamma'\alpha = \gamma\alpha'$. Ce qui implique que la dimension de $\mathcal{H}$ est ≤ 2. On suppose donc que $\mathcal{H}$ est engendrée par A_0 et C_0 avec

$$C_0 = \left(\begin{pmatrix} \alpha_0 & \gamma_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, 0\right).$$

Si $\alpha_0 = 0$, alors $\gamma_0 = 0$ et $\mathcal{H}$ est donc décomposable. Si $\alpha_0 \neq 0$, $\mathcal{H}$ laisse invariante la droite $\mathbb{R}(-(\gamma_0/\alpha_0)e_1 + e_2 - ae_4)$. D'où $\mathcal{H}$ est décomposable.

2) $\mathcal{H}$ ne laisse invariante aucune droite isotrope. Donc $\mathcal{U}'$ est irréductible, par conséquent elle est réductive. Ce qui implique que

$$\mathcal{U}' \in \{\mathrm{gl}(2,\mathbb{R}), \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}), \mathrm{so}(2,\mathbb{R}), \mathrm{so}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}\}.$$

Et il existe une application linéaire $\varphi : \mathcal{U}' \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{H} = \{(U, \varphi(U))\ ;\ U \in \mathcal{U}'\}.$$

On distinguera deux sous-cas :

2.1) On suppose $\varphi = 0$. Si $\mathcal{U}' = \mathrm{gl}(2,\mathbb{R})$ ou $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, on est dans le premier cas du théorème. Si $\mathcal{U}' = \mathrm{so}(2,\mathbb{R})$, $\mathcal{H}$ laisse invariant le plan non dégénéré $\mathbb{R}(e_1+e_3) \oplus \mathbb{R}(e_2+e_4)$, donc est décomposable. Si $\mathcal{U}' = \mathrm{so}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$.

2.2) On suppose $\varphi \neq 0$. D'après (4), on a :

$$\big[(A, \varphi(A)), (A', \varphi(A'))\big] = \big([A, A'], 0\big), \quad \text{pour } A, A' \in \mathrm{sl}(2,\mathbb{R}).$$

Donc si $\mathcal{U}'$ contient $\mathrm{sl}(2,\mathbb{R})$, $\mathcal{H}$ contient $\mathcal{A}'$. Si $\mathcal{U}' = \mathrm{so}(2,\mathbb{R})$, à une conjuguaison près dans $\mathcal{G}$, on a $\mathcal{H} = \mathcal{H}_3$. Si $\mathcal{U}' = \mathrm{so}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}$,

$$\mathcal{H} = \left\{\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}, a\alpha + b\beta\right),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}$$

avec a et b des constantes réelles. Puisque $\mathcal{U}'$ est une algèbre commutative, $b = 0$ et $a \neq 0$. Or $\left(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right), a\alpha\right)$ est conjuguée à $\left(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{smallmatrix}\right), 0\right)$. D'où $\mathcal{H}$ est indécomposable. $\square$

4. Autres obstructions

PROPOSITION 1. — *Il n'existe aucune variété pseudo-riemannienne* $(M, \langle\ \rangle)$ *de signature* $(2,2)$ *dont l'algèbre d'holonomie est* $\mathcal{H}_2$ *ou* $\mathcal{H}_3$.

Preuve. — On suppose qu'il existe une variété pseudo-riemannienne $(M, \langle\ \rangle)$ de signature $(2,2)$ dont l'algèbre d'holonomie est $\mathcal{H}$. Soit R le tenseur de courbure associé à la métrique g. On regarde d'abord R en θ. Si $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2$, on a :

$$R(x,y) = \alpha(x,y)A, \quad \text{avec} \quad A = (L, 1) \text{ et } \alpha : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R},$$

ce qui implique

$$\langle R(x,y)e_1, e_3\rangle = -\langle R(x,y)e_2, e_4\rangle = \langle R(x,y)e_3, e_4\rangle,$$

d'où

$$R\big(e_1,e_3\big)=-R\big(e_2,e_4\big)=R\big(e_3,e_4\big). \tag{5}$$

Et on remarque que les autres $R(e_i,e_j)$ sont nuls. De (5) et l'identité de Bianchi algébrique, on obtient

$$\big\langle R(e_1,e_3)e_1,e_3\big\rangle=-\big\langle R(e_2,e_4)e_1,e_3\big\rangle=0.$$

D'où $R(e_1,e_3)=0$, ce qui implique $R=0$ en θ. Si maintenant on pose

$$R_\gamma(x,y)=\tau(\gamma)^{-1}\cdot R\big(\tau(\gamma)x,\tau(\gamma)y\big)\cdot\tau(\gamma)$$

pour $x,y\in\mathbb{R}^4$, avec $\tau(\gamma)$ le transport parallèle le long d'une courbe γ quelconque d'origine θ, on a de même $R_\gamma=0$ en θ. D'après le théorème d'Ambrose-Singer [2], on en déduit que $\mathcal{H}=0$, ce qui est impossible.

Même démonstration lorsque $\mathcal{H}=\mathcal{H}_3$. $\square$

On se place maintenant dans les notations du paragraphe 2. En dimension 4, si on identifie tout sous-groupe K de G' à K_T, on appelle :

$K_1=\left\{\begin{pmatrix}1&\gamma\\0&1\end{pmatrix}\ ;\ \gamma\in\mathbb{R}\right\}$;

$K_{2,\lambda}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\0&\alpha^\lambda\end{pmatrix}\ ;\ \alpha,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha>0\right\}$ avec $\lambda\in[-1,1]$;

$K_3=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\gamma\\0&\beta\end{pmatrix}\ ;\ \alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R},\ \alpha,\beta>0\right\}$,

$K_4=\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$;

$K_5=\mathrm{GL}^+(2,\mathbb{R})$;

$K_6=\left\{\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\-\beta&\alpha\end{pmatrix}\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$;

U_1 le sous-groupe connexe de G' engendré par la matrice $C=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$;

$U_{2,\lambda}$ le sous-groupe connexe de G' engendré par la matrice $\left(\begin{smallmatrix}\lambda&1\\-1&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$ et positif ou nul ;

$\mathbb{A}$ le sous-groupe connexe de G engendré par l'idéal $\mathcal{A}$;

$\mathbb{B}$ le sous-groupe connexe de G engendré par la sous-algèbre

$$\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha N&\beta J\\0&-\alpha{}^tN\end{pmatrix}\ ;\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}\quad\text{avec } N=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right).$$

Alors on a :

THÉORÈME 3. — *En dimension* 4, *si* $\mathbb{H}$ *est le groupe d'holonomie* (*restreint*) *d'une variété pseudo-riemannienne indécomposable non irréductible et de signature* $(2,2)$. *Alors,*

a) *ou bien* $\mathbb{H}$ *laisse invariants deux plans supplémentaires totalement isotropes, et donc, à un isomorphisme près, il ne peut être que* K_1, $K_{2,\lambda}$, K_3, K_4, K_5 *ou le cas exceptionel* K_6 ;

b) *ou bien il ne laisse invariant qu'un seul plan totalement isotrope, et donc, à un isomorphisme près, il ne peut être que* $\mathbb{B}$, $U_1 \cdot \mathbb{A}$, $U_{2,\lambda} \cdot \mathbb{A}$, $K_{2,\lambda} \cdot \mathbb{A}$, $K_6 \cdot \mathbb{A}$ $K_3 \cdot \mathbb{A}$, $K_4 \cdot \mathbb{A}$ *ou* $K_5 \cdot \mathbb{A}$.

Attention : il y a trois façons de présenter K_1 comme étant un groupe qui laisse invariant un plan totalement isotrope de $\mathbb{R}^4$. Par exemple, le sous-groupe $\mathbb{A}$ ou le sous-groupe $\mathbb{A}'$ associé à l'idéal $\mathcal{A}'$.

Preuve du théorème 3. — Il suffit de remarquer qu'à un isomorphisme près, les seuls sous-groupes qui laissent invariants deux plans supplémentaires totalement isotropes et qui contiennent K_1 sont les cinq premiers groupes de a) et que K_6 est le sous-groupe connexe engendré par $\mathcal{H}_1$. Et en vertu du théorème 2 et les propositions 1 et 2, on en déduit le résultat. $\square$

Maintenant, un simple examen de tous ces groupes nous donne :

COROLLAIRE 1. — *Le groupe d'holonomie restreint d'une variété pseudo-riemannienne de signature* $(2,2)$, *indécomposable, non irréductible est fermé.*

5. Les espaces symétriques en dimension 4 et signature (2,2)

Dans ce paragraphe, on fait quelques rappels sur les espaces pseudo-riemanniens symétriques.

DÉFINITION 3 (extraite de [12]). — Un *quadruplet pseudo-riemannien symétrique* est un quadruplet $(\mathcal{L}, \mathcal{K}, \mathcal{P}, \eta)$ constitué d'une algèbre de Lie réelle $\mathcal{L}$ de dimension finie, une sous-algèbre $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$, un sous-espace vectoriel $\mathcal{P}$ de $\mathcal{L}$ supplémentaire de $\mathcal{K}$ et $\mathrm{ad}(\mathcal{K})$-invariant, et une 2-forme symétrique η sur $\mathcal{P}$, non dégénérée et invariante par $\mathrm{ad}(\mathcal{K})$, qui vérifient $[\mathcal{P}, \mathcal{P}] = \mathcal{K}$ et $\mathcal{K}$ ne contient aucun idéal non nul de $\mathcal{L}$.

On sait que la donnée d'un espace pseudo-riemannien symétrique $(M, \langle\ \ \rangle)$ simplement connexe est équivalente à la donnée d'un quadruplet symétrique $(\mathcal{L}, \mathcal{K}, \mathcal{P}, \eta)$ où $\mathcal{L}$ est l'algèbre de Lie du groupe des transvections de $(M, \langle\ \ \rangle)$ et $\mathcal{K}$ la sous-algèbre correspondant au sous-groupe d'isotropie d'un point base θ de M. L'algèbre $\mathcal{L}$ admet un automorphisme σ qui est l'identité sur $\mathcal{K}$ et l'opposée de l'identité sur $\mathcal{P}$, et qui représente la différentielle de la conjuguaison par la symétrie s_θ.

On peut montrer aussi que la forme η s'étend sur tout $\mathcal{L}$ en une forme (toujours non-dégénérée) qui est invariante par $\operatorname{ad}\mathcal{L}$ et par σ. On peut ainsi caractériser le quadruplet par la donnée $(\mathcal{L},\sigma,\eta)$ mais il faudrait traduire les deux dernières conditions. Parmi les résultats généraux de [13], citons :

PROPOSITION 2 (voir [13]). — *L'algèbre $\mathcal{L}$ est résoluble si et seulement si la représentation d'isotropie de $\mathcal{H}$ est nilpotente. Et $\mathcal{L}$ est semi-simple si et seulement si la représentation d'isotropie de $\mathcal{H}$ est complètement réductible.*

M. Berger a donné dans [5] la liste complète des espaces pseudo-riemanniens symétriques lorsque la représentation d'holonomie est complètement réductible. Le cas où $\mathcal{L}$ n'est ni semi-simple ni résoluble a été étudié par M. Cahen et M. Parker dans [13] (en signature quelconque). En particulier, il y a une classification complète en dimensions ≤ 7. Pour le cas de la signature $(n,2)$, M. Parker donne une classification complète dans [18]. Enfin, le cas où $\mathcal{L}$ est résoluble a également été étudié par M. Cahen et M. Parker dans [12], avec de nombreux exemples et une classification complète du cas de signature $(n,2)$. Le cas de signature $(n,2)$ (et donc en particulier celui de signature $(2,2)$) est donc contenu dans ces classifications.

Dans ce qui suit, on précise simplement, par rapport aux notations du théorème 2, le groupe d'holonomie restreint de tout espace pseudo-riemannien symétrique de signature $(2,2)$ indécomposable non irréductible. Cependant, pour faciliter la lecture de cet article, on rappellera quelques détails de ces classifications dans notre cas particulier.

• *Premier cas : $\mathcal{L}$ est résoluble.*

Le centre $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{L}$ est de dimension 1 ou 2, et ces deux cas sont assez différents.

Si $\mathcal{Z}$ est de dimension 2, alors $\mathcal{L}$ est nilpotente. À une normalisation près, il y a ici un seul exemple, qui a été étudié en particulier par H.S. Ruse et A.G. Walker, et qui est harmonique (voir par exemple [19]). En voici une description. On considère $\mathcal{L}'=\mathbb{R}^5$, muni du crochet :

$$\begin{aligned}\big[(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5),&(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\big]\\ &=(x_4y_5-x_5y_4,x_1y_5-x_5y_1,-x_1y_4+x_4y_1,0,0).\end{aligned}$$

Si $\mathcal{K}'=\big\{(x_1,0,0,0,0)\big\}$, $\mathcal{P}'=\big\{(0,x_2,x_3,x_4,x_5)\big\}$ et si η' est définie par

$$\begin{aligned}\eta'\big((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5),&(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5)\big)\\ &=x_1y_1+x_2y_4+x_3y_5+x_4y_2+x_5y_3,\end{aligned}$$

alors $(\mathcal{L}',\mathcal{K}',\mathcal{P}',\eta')$ est un quadruplet symétrique de signature $(2,2)$.

Si $\mathcal{Z}$ est de dimension 1, on a maintenant toute une famille d'exemples. Soit f une application linéaire inversible de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, qui est en plus symétrique pour la forme bilinéaire lorentzienne

$$\big\langle (x,y),(x',y')\big\rangle = xy' + x'y.$$

La matrice de f est donc $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$. On considère alors l'algèbre $\mathcal{L}'' = \mathbb{R}^6$ avec le crochet :

$$\begin{aligned}
&\big[(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6),(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)\big] \\
&\quad = \big(ax_6y_4 + bx_6y_5 - ax_4y_6 - bx_5y_6, cx_6y_4 + ax_6y_5 - cx_4y_6 - ax_5y_6, \\
&\qquad\qquad x_1y_5 + x_2y_4 - x_5y_1 - x_4y_2, x_6y_1 - x_1y_6, x_6y_2 - x_2y_6, 0\big).
\end{aligned}$$

On pose $\mathcal{K}'' = \big\{(x_1,x_2,0,0,0,0)\big\}$ et $\mathcal{P}'' = \big\{(0,0,x_3,x_4,x_5,x_6)\big\}$ et enfin

$$\begin{aligned}
&\eta''\big((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6),(y_1,y_2,y_3,y_4,y_5,y_6)\big) \\
&\qquad\qquad = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_6 + x_4y_5 + x_5y_4 + x_6y_3.
\end{aligned}$$

Alors $(\mathcal{L}'',\mathcal{K}'',\mathcal{P}'',\eta)$ est un quadruplet symétrique de signature $(2,2)$. Les espaces symétriques correspondants sont isométriques si et seulement si les applications f associées sont conjuguées par le groupe de Lorentz.

PROPOSITION 3 (extraite de [12]). — *Le quadruplet $(\mathcal{L}',\mathcal{K}',\mathcal{P}',\eta')$ et la famille de quadruplets $(\mathcal{L}'',\mathcal{K}'',\mathcal{P}'',\eta'')$ sont les seuls quadruplets pseudo-riemanniens symétriques de signature $(2,2)$ dont l'algèbre de Lie du groupe des transvections soit résoluble et qui correspondent à des espaces symétriques indécomposables. Avec les notations du paragraphe 4, le groupe d'holonomie (restreint) est $\mathbb{A}$ pour $(\mathcal{L}',\mathcal{K}',\mathcal{P}',\eta')$ et $\mathbb{B}$ pour les $(\mathcal{L}'',\mathcal{K}'',\mathcal{P}'',\eta'')$.*

• *Deuxième cas : $\mathcal{L}$ n'est ni résoluble, ni semi-simple.*

Soit $\mathcal{S}$ une algèbre de Lie simple de dimension 3, c'est-à-dire $\mathcal{S} = \mathrm{so}(3)$ ou $\mathrm{so}(1,2)$. Soit $\mathcal{R}$ l'algèbre abélienne de dimension 3 et φ un isomorphisme linéaire de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$. On considère l'algèbre de Lie $\mathcal{L}$ produit semi-direct de l'idéal $\mathcal{R}$ par $\mathcal{S}$ pour la représentation adjointe de $\mathcal{S}$ transportée sur $\mathcal{R}$ par φ. Autrement dit, le crochet de Lie de $\mathcal{L} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{S}$ est donné par la formule suivante, si $X, X' \in \mathcal{R}$ et $Y, Y' \in \mathcal{S}$:

$$[X+Y, X'+Y'] = \varphi\big[\varphi^{-1}(X), Y'\big] + \varphi\big[Y, \varphi^{-1}(X')\big] + \big[Y, Y'\big].$$

On munit $\mathcal{L}$ de la forme bilinéaire symétrique η définie par :

$$\eta(X+Y, X'+Y') = B\big(\varphi^{-1}(X), Y'\big) + B\big(Y, \varphi^{-1}(X')\big)$$

où B est la forme de Killing de $\mathcal{S}$. On vérifie facilement que cette forme est invariante sur $\mathcal{L}$ et de signature $(3,3)$. Soit maintenant $\mathcal{T}$ une sous-algèbre de dimension 1 de $\mathcal{S}$, isomorphe à so(2) dans so(3) ou so(1,2), ou à so(1,1) dans so(1,2). Dans tous les cas, la représentation adjointe de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{R}$ laisse invariant un sous-espace $\mathcal{U}$ de dimension 1, et donc $\mathcal{K} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{T}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathcal{L}$, sur laquelle la forme η est non-dégénérée. Si $\mathcal{P}$ est l'orthogonal de $\mathcal{K}$, on voit alors que $[\mathcal{P},\mathcal{P}] = \mathcal{K}$, donc $(\mathcal{L},\mathcal{K},\mathcal{P},\eta)$ est un quadruplet symétrique de signature $(2,2)$.

Proposition 4 (extraite de [13]). — *Les trois quadruplets symétriques obtenus pour les différents choix de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont exactement les seuls quadruplets symétriques correspondant aux espaces symétriques indécomposables de signature $(2,2)$ dont le groupe de transvections n'est ni semi-simple ni résoluble. De plus, ces espaces symétriques s'identifient naturellement aux espaces totaux des fibrés tangents aux trois espaces à courbure constante non nulle de dimension 2 :*

$$S^2 = \mathrm{SO}(3)/\,\mathrm{SO}(2),$$
$$H^2 = \mathrm{SO}_0(1,2)/\,\mathrm{SO}(2),$$
$$S^2_1 = \mathrm{SO}_0(1,2)/\,\mathrm{SO}_0(1,1).$$

Enfin le groupe d'holonomie (restreint) correspond, avec les notations du paragraphe 4, soit à $\mathrm{U}_{2,0}\cdot\mathbb{A}$ dans les deux premiers cas, soit à $K_{2,1}$ dans le troisième.

- *Troisième cas : $\mathcal{L}$ est semi-simple.*

On examinant les espaces symétriques de la liste de Berger [5], on déduit facilement :

Proposition 5 (extraite de [5]). — *Les espaces pseudo-riemanniens symétriques, de dimension 4, de signature $(2,2)$, à groupe de transvections semi-simple et qui ne sont pas des produits sont :*

$$\mathrm{SO}_0(2,3)/\,\mathrm{SO}_0(2,2), \quad \mathrm{SU}(1,2)/\,\mathrm{U}(1,1),$$

$$\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})/\,\mathrm{GL}(2,\mathbb{R}), \quad \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}^*.$$

Les deux premiers espaces sont irréductibles, alors que les deux derniers sont indécomposables et non irréductibles. Les groupes d'holonomie (restreints) correspondants sont respectivement les groupes $\mathrm{SO}_0(2,2)$, $\mathrm{U}(1,1)$ et, dans les notations du paragraphe 4, $K_5 = \mathrm{Gl}(2,\mathbb{R})$ et K_6 (abélien).

Remarque. — Ici $\mathbb{C}^*$ est le sous-groupe diagonal de $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$. Les algèbres de Lie $\mathcal{L}$ sont munies de leur forme de Killing.

6. Autres exemples

Comme indiqué dans le théorème 1, on considère des coordonnées (x_1, x_2, y_1, y_2) sur $\mathbb{R}^4$ au voisinage de 0. On obtient une métrique de signature $(2, 2)$, en prenant comme matrice en coordonnées

$$\mathrm{d}s^2 = \begin{pmatrix} 0 & A \\ {}^tA & 0 \end{pmatrix}$$

où $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est inversible. Comme on l'a vu au paragraphe 2 (avec $a = a_{11}$, $b = a_{12}$, $c = a_{21}$, $d = a_{22}$) le groupe d'holonomie H est un des groupes K_i si et seulement si K_i est le plus petit sous-groupe connexe contenant toutes les ${}^tA$. On obtient donc des solutions à partir d'une fonction h (avec $a = \partial_1\partial'_1 h$, $b = \partial_1\partial'_2 h$, $c = \partial_2\partial'_1 h$ et $d = \partial_2\partial'_2 h$) vérifiant les conditions initiales précisées au b) du théorème 1.

• Pour obtenir $H = K_1$, il faut $a = d = 1$ et $b = 0$. Une solution générale est de la forme

$$h = x_1y_1 + x_2y_2 + x_2^2y_1^2 f(x_2, y_1)$$

avec f non nulle.

Si f est une constante, on obtient une métrique localement symétrique, localement isométrique à (M', g') du théorème 4.

Si f est par exemple x_2, on obtient une métrique non symétrique. Pour obtenir $H = K_{2,0}$, il faut $d = 1$ et $b = 0$. Une solution générale est de la forme

$$h = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1x_2y_1^2 f(x_1, x_2, y_1)$$

avec f non nulle. Un exemple simple est $f = 1$.

• Pour obtenir $H = K_{2,\lambda}$ (avec λ non nul), il faut $d = a^\lambda$ et $b = 0$. Une solution générale est de la forme

$$h = x_1y_1 + x_2y_2 + x_1\int_0^{y_1} x_2y_1 f(x_2, t)\,\mathrm{d}t + y_2\int_0^{x_2} \left[[1 + x_2y_1 f(t, y_1)]^2 - 1\right] \mathrm{d}t$$

où f est non nulle.

Ici encore, un exemple simple est obtenu avec $f = 1$, mais cet exemple est localement symétrique dans le cas $\lambda = 1$, localement isométrique au premier cas de la proposition 5. Pour obtenir un exemple non symétrique, il faut alors prendre f non constante, par exemple $f = x_2$.

• Pour obtenir $H = K_3$, il faut $b = 0$. Une solution générale est de la forme

$$h = x_1y_1 + x_2y_2 + y_1^2 f(x_1, x_2, y_1) + x_2^2 g(x_2, y_1, y_2)$$

où le développement de Taylor de f commence par un polynôme de degré 2 en (x_1, x_2) et celui de g par un polynôme de degré 2 en (y_1, y_2). Une solution simple est par exemple

$$h = (x_1y_1 + x_2y_2)(1 + x_2y_1).$$

• Le cas $H = K_5$, correspond à une fonction h générique de la forme

$$h = x_1y_1 + x_2y_2 + f(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

où le développement de Taylor de f en 0 est au moins quadratique en les x_i, et quadratique en les y_i. Ici encore, un exemple trop simple comme $f = x_1y_1x_2y_2$ donne une métrique localement symétrique, localement isométrique à $\mathrm{SL}(3,\mathbb{R})/\mathbb{R}\cdot\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Pour avoir un exemple non symétrique, il suffit par exemple de rajouter $x_1^3y_1^2$ à h.

• Pour obtenir $H = K_6$, il faut $d = a$ et $c = -b$. Il est ici plus simple d'introduire des coordonnées complexes $z = x_1 + ix_2$ et $w = y_1 - iy_2$, ainsi que la fonction $f = a + ib$. Alors les équations deviennent plus simplement

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{w}} = 0.$$

Donc f est holomorphe en z et w. Par le jeu des conditions initiales, f doit s'écrire

$$f = 1 + zwg(z, w) \quad \text{(avec } g \text{ holomorphe).}$$

Ici encore l'exemple $g = 1$ est trop simple parce qu'il redonne une métrique localement symétrique, localement isométrique à $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})/\mathbb{C}^*$. Il suffit alors de prendre $g = z$ par exemple pour avoir un exemple non symétrique.

Pour retrouver une fonction h comme dans le théorème 1 et les autres cas, il suffit alors de prendre pour h la partie réelle de la fonction holomorphe $\phi(z, w)$ vérifiant :

(a) $\dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\partial}{\partial w}\phi = f$,

(b) au voisinage de 0, on a

$$\phi(z, w) = zw + z^2w^2\psi(z, w)$$

avec ψ holomorphe.

7. Dernières remarques et conclusion

7.1. — Si le groupe d'holonomie H de M est en fait inclus dans un sous-groupe $\mathrm{U}(1,1)$ de $\mathrm{SO}_0(2,2)$, alors M est une variété pseudo-kählérienne. Autrement dit, M admet une structure complexe compatible à la métrique (l'opérateur J est antisymétrique) et parallèle pour la connection de Levi-Civita. En particulier M est une variété complexe et on a intérêt dans ce cas à utiliser des coordonnées complexes.

La représentation de $\mathrm{U}(1,1)$ dans $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$ est irréductible, donc $\mathrm{U}(1,1)$ n'est pas apparu dans les groupes que nous avons considérés. Par contre $\mathrm{SU}(1,1)$ est apparu comme K_4. Les autres groupes qui sont dans $\mathrm{U}(1,1)$, qui sont indécomposables et non irréductibles, sont $\mathbb{A}$ $(= K_1)$, K_6, $K_6 \cdot \mathbb{A}$ et $\mathrm{U}_{2,\lambda} \cdot \mathbb{A}$. Pour K_6, les coordonnées complexes sont apparues d'elles-mêmes dans les calculs du paragraphe 6.

7.2. — Pour le cas de K_4, nous n'avons pas trouvé d'exemple vraiment élémentaire avec les calculs du paragraphe 6. Attention que, contrairement au cas de K_6, les sous espaces totalement isotropes supplémentaires que K_4 laisse invariants ne sont pas complexes (pour la structure complexe associée à la représentation de K_4 comme $\mathrm{SU}(1,1)$). Cependant, la théorie générale de l'holonomie des espaces kählériens (groupes $\mathrm{U}(p,q)$, $\mathrm{SU}(p,q)$ et $\mathrm{Sp}(p,q)$) s'applique en particulier au cas $\mathrm{SU}(1,1)$. Il y a donc des métriques locales pour lesquelles l'holonomie est bien $\mathrm{SU}(1,1)$ (voir les travaux de R.L. Bryant [8] et [9]). Avec le paragraphe précédent, on obtient donc en conclusion :

THÉORÈME 4. — *Si $\mathbb{H}$ est un groupe d'holonomie (restreint) d'une variété pseudo-riemannienne indécomposable non irréductible et de signature $(2,2)$ et si $\mathbb{H}$ laisse invariants deux plans supplémentaires totalement isotropes, alors $\mathbb{H}$ est l'un des groupes K_1, $K_{2,\lambda}$, K_3, K_4, K_5 et K_6 du théorème 3 et tous ces groupes sont effectivement réalisés par au moins une métrique non symétrique.*

7.3. — Pour achever l'étude des groupes d'holonomie (restreints) en signature $(2,2)$, il reste donc à examiner la liste de b) du théorème 3. Cela sera fait ailleurs. En effet les méthodes du paragraphe 2 ne sont pas adaptées à ce cas : il faut les modifier légèrement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Alekseevskii (D.V.). — *Riemannian manifolds with exceptional holonomy groups*, Funct. Anal. Appl., t. **2**, (2), 1968, p. 1–10 ; english translation : Funct. Anal. Appl., t. **2**, 1968, 97–105.

[2] Ambrose (W.), Singer (I.M.). — *A theorem on holonomy*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **79**, 1953, p. 428–443.

[3] Berard Bergery (L.), Ikemakhen (A.). — *On the holonomy of Lorentzian Manifolds*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **54**, (1993), part 2, p. 27–40.

[4] Berger (M.). — *Sur les groupes d'holonomie des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes*, Bull. Soc. Math. France, t. **83**, 1955, p. 279–330.

[5] Berger (M.). — *Les espaces symétriques non compacts*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **74**, 1957, p. 85–177.

[6] Besse (A. L.). — *Einstein manifolds.* — Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1987.

[7] Brown (R.), Gray (A.). — Riemannian manifolds with holonomy group Spin(9), in *Diff. Geometry in honor of K. Yano*, Kinokuniya, Tokyo, 1972, p. 41–59..

[8] Bryant (R.L.). — *Metrics with exceptional holonomy*, Ann. of Math. (2), t. **126**, 1987, p. 525–576.

[9] Bryant (R.L.). — *Classical, exceptional and exotic holonomies : a status report*, Actes de la table ronde de géométrie différentielle en l'honneur de M. Berger, Collection Séminaires et Congrès de la Soc. Math. France, **1**, 1996, p. 93–165.

[10] Bryant (R.L.), Salamon (S. M.). — *On the construction of some complete metrics with exceptional holonomy*, Duke Math. J., t. **58** (3), 1989, p. 829–850.

[11] Calabi (E.). — *Métriques kählériennes et fibrés holomorphes*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **12**, 1979, p. 269–294.

[12] Cahen (M.), Parker (M.). — *Sur des classes d'espaces pseudo-riemanniens symétriques*, Bull. Soc. Math. Belg., t. **22**, 1970, p. 339–354.

[13] Cahen (M.), Parker (M.). — *Pseudo-Riemannian symmetric spaces*, Mem. Amer. Math. Soc., t. **229**, 1980.

[14] Cahen (M.), Wallach (N.). — *Lorentzian symmetric spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **76**, 1970, p. 585–591.

[15] Kobayashi (S.), Nomizu (K.). — *Foundations of differential geometry.* — Interscience, Wiley, New York, vol. 1, 1963 ; vol. 2, 1969.

[16] IKEMAKHEN (A.). — *Examples of indecomposable non-irreducible Lorentzian manifolds*, Ann. Sci. Math. Québec, t. **20**, 1996, p. 53–66.
[17] IKEMAKHEN (A.). — *Sur l'holonomie des variétés pseudo–riemanniennes de signature* $(2, 2+n)$, Preprint Université Cadi–Ayyad.
[18] PARKER (M.). — *Classes d'espaces pseudo-riemanniens symétriques de signature* $(2, n)$, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **272**, 1971, p. 882–884.
[19] RUSE (H.S.), WALKER (A.G.) and WILLMORE (T.J.). — *Harmonic spaces*. — Edizione Cremonese, Rome, 1961.
[20] SALAMON (S.). — *Riemannian geometry and Holonomy groups*, Pitman Research Notes in Maths, t. **201**, London, Longman Scientific and Technical, 1989.
[21] SIMONS (J.). — *On the transitivity of holonomy systems*, Ann. of Math., t. **76**, 1962, p. 213–234.
[22] WU (H.). — *On the de Rham decomposition theorem*, Illinois J. Math., t. **8**, 1964, p. 291–311.
[23] WU (H.). — *Holonomy groups of indefinite metrics*, Pacific J. Math., t. **20**, 1967, p. 351–392.
[24] YAU (S.T.). — *On Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., t. **74**, 1977, p. 1798–1799.