BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDERAOUF MOURTADA
ROBERT MOUSSU

Applications de Dulac et applications pfaffiennes

Bulletin de la S. M. F., tome 125, nº 1 (1997), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1997__125_1_1_0>

Bull. Soc. math. France,
125, 1997, p. 1–13.

APPLICATIONS DE DULAC ET APPLICATIONS PFAFFIENNES

PAR

ABDERAOUF MOURTADA et ROBERT MOUSSU (*)

RÉSUMÉ. — On démontre que l'application de Dulac d'une 1-forme analytique réduite est 1-pfaffienne si et seulement si la 1-forme est analytiquement normalisable. Dans le problème de Dulac, on est amené à étudier les points fixes d'une composition d'applications de Dulac. La solution complète de ce problème proposée par Écalle et Il'Yashenko repose sur des techniques sophistiquées de resommation et de résurgence. Dans le cas où ces applications de Dulac sont 1-pfaffiennes, le problème admet une preuve géométrique basée sur la théorie de Khovanskii. Le théorème démontré dans cet article précise les limites du champ d'application de cette théorie et donne une nouvelle caractérisation géométrique des 1-formes analytiques ayant un facteur intégrant analytique.

ABSTRACT. — It's shown that the Dulac map of an analytic and reduced 1-form is 1-pfaffian if and only if the 1-form is analytically normalizable. In the Dulac's problem, one is lead to the investigation of the fixed points of the composition of Dulac maps. The general solution of this problem (Écalle, Il'Yashenko) uses sophisticated technics of resummation and resurgence. In the case of 1-pfaffian Dulac maps, this problem has a geometric proof based on Khovanskii's theory. Our theorem makes precise the limits for applying this theory and gives a new geometric characterization of normalizable analytic 1-forms.

0. Introduction

Soit ω une 1-forme analytique réelle sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que l'équation différentielle $\omega = 0$ possède un secteur S de type col en 0. Le bord de S est la réunion de deux courbes intégrales c_1, c_2 et du point 0. Soient, pour $i = 1, 2$, τ_i une courbe analytique lisse qui coupe transversalement c_i en un point p_i assez voisin de 0. La courbe

(*) Texte reçu le 9 octobre 1995, accepté le 11 octobre 1996.
A. MOURTADA et R. MOUSSU, Université de Bourgogne, Laboratoire de Topologie, CNRS UMR 5584, U.F.R. Sciences et Techniques, 9, avenue Alain Savary, B.P. 400, 21011 Dijon CEDEX (France). Email : mourtada@u-bourgogne.fr.
Classification AMS : 32C05, 32C25, 58A99, 34C35, 58F14, 58F21, 34C05.

intégrale de $\omega = 0$ passant par un point q_1 de $\tau_1 \cap S$ assez proche de p_1 coupe $\tau_2 \cap S$, une première fois, en un point q_2 proche de p_2. Le germe en p_1 de

$$d = d_{\omega,S} : q_1 \longrightarrow q_2$$

est *l'application de Dulac de* $\omega = 0$ *évaluée sur* τ_1, τ_2.

On dit qu'un germe d'homéomorphisme d de $(\mathbb{R}^+, 0)$ est 1-*pfaffien* si son graphe dans $(\mathbb{R}^2, 0)$ est le germe en 0 d'une courbe intégrale d'une équation différentielle analytique $\eta = 0$, à singularité algébriquement isolée en $0 \in \mathbb{R}^2$. Il est facile de montrer [11] que $d_{\omega,S}$ est 1-pfaffien si $\omega = 0$ possède un *facteur intégrant analytique* I, *i.e.* I est un germe en 0 de fonction analytique telle ω/I soit fermée. Le but principal de ce travail est de prouver le théorème suivant.

THÉORÈME. — *Soit* $\omega = 0$ *un germe en* $0 \in \mathbb{R}^2$ *d'équation différentielle analytique réduite qui possède un secteur col* S. *Alors* ω *possède un facteur intégrant analytique si et seulement si* $d_{\omega,S}$ *est* 1-*pfaffien.*

Rappelons que $\omega = 0$ *est réduite* si son 1-jet en 0 peut s'écrire

$$j^1\omega = \lambda y \, \mathrm{d}x + x \, \mathrm{d}y \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Ce type d'équations joue un rôle fondamental dans la preuve du théorème de Dulac [3], [5], dans l'étude de la cyclicité d'un polycycle [10], [12] et plus généralement dans le 16-ième problème de Hilbert. On se ramène, *via* le théorème de réduction des singularités [13], à l'étude de la composition d'applications de Dulac d'équations réduites. Lorsque ces applications sont 1-pfaffiennes cette étude est géométrique et élémentaire. On n'a pas alors à utiliser la resommabilité, la résurgence mais la théorie de Khovanskii [6], [11]. Malheureusement, le théorème ci-dessus montre que le champ d'application de cette théorie aux problèmes de cycles limites est assez limité. Il doit être réservé à l'étude de « cas génériques » dans des problèmes de bifurcations.

Dans la section 1, nous préciserons l'énoncé du théorème ci-dessus avec les propositions 1, 2 qui utilisent le language des formes normales. Dans les sections 2 et 3 nous démontrons ces deux propositions.

Ce travail doit beaucoup à J. Écalle. Nous le remercions.

1. Applications de Dulac, holonomies et formes normales

Dans toute la suite,

$$\omega = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y$$

désigne une 1-forme analytique sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$.

On suppose que l'équation $\omega = 0$ est réduite et qu'elle possède un secteur col. Alors $\omega = 0$ est une équation différentielle dans le *domaine de Siegel* : son 1-jet s'écrit

$$j^1\omega = \lambda y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$$

où λ, son *nombre caractéristique*, est un réel ≥ 0. Il existe un changement de coordonnées formel N appelé *mise sous forme normale* :

$$N(X,Y) = \big(x(X,Y), y(X,Y)\big)$$

avec $x(X,Y)$ et $y(X,Y)$ dans $\mathbb{R}[[X,Y]]$, $DN(0) = 1_{\mathbb{R}^2}$ tel que l'équation

$$\Omega = N^*(\omega) = 0$$

soit *une forme normale*, c'est-à-dire d'un des trois types suivants.

1.1. Forme normale.

Nous reprenons les notations de J. Écalle [3].

Type I. — Cas hyperbolique quasi-résonnant :

$$\Omega_I = \lambda Y\,\mathrm{d}X + X\,\mathrm{d}Y \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Q}.$$

Type II. — Cas hyperbolique résonnant :

$$\Omega_{II} = pY\,\mathrm{d}X(1+\rho X^pY^q) + qX\,\mathrm{d}Y(1+\rho' X^pY^q)$$

avec $p, q \in N^*$ et $\rho, \rho' \in \mathbb{R}$.

Type III. — Cas semi-hyperbolique :

$$\Omega_{III} = pY\,\mathrm{d}X(1+\rho X^p) + X^{p+1}\,\mathrm{d}Y,$$

avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $\rho \in \mathbb{R}$.

Dans les trois cas, $\{X \geq 0,\ Y \geq 0\}$ est un secteur col de $\Omega_\bullet$. Son application de Dulac évaluée sur les courbes $Y = 1$, $X = 1$ est notée $D_\bullet : X \to Y$. On vérifie aisément que :

$$D_I(X) = X^\lambda, \quad D_{III}(X) = X^{\rho p}\exp(-1/X^p),$$
$$D_{II}(X) = X^{p/q}\Big(1 + \sum_{\substack{m\geq 0\\ n>0}} A_{m,n}(X^{1/q})^m(X^p\mathrm{Log}X)^n\Big),$$

où $\sum A_{m,n} S^m\, T^n$ converge sur voisinage du polydisque :

$$|S| \le 1, \quad |T| \le 1 \quad \text{et où} \quad A_{0,1} = \rho - \rho'.$$

Dans les trois cas, nous écrivons encore $\Omega_\bullet = 0$ l'équation dans $\mathbb{C}^2$ complexifiée de $\Omega_\bullet$ et nous notons :

$$X \longrightarrow U(X), \quad \big(\text{resp. } Y \longrightarrow V(Y)\big)$$

le difféomorphisme d'holonomie de $X = 0$ évalué sur $Y = 1$ dans les trois cas (resp. de $Y = 0$ évalué sur $X = 1$ dans les cas I et II).

1.2. Holonomie et itérateurs pour $\omega = 0$.

Lorsque $\omega = 0$ possède une forme normale du type $\Omega_\bullet$ nous dirons encore que $\omega = 0$ est du type «$\bullet$».

— Si $\lambda \neq 0$, $\omega = 0$ est du type I ou II; elle possède deux courbes intégrables analytiques lisses transverses qui passent par 0. On choisit les coordonnées (x, y) de telle façon que ce soient les courbes $x = 0$, $y = 0$.

— Si $\lambda = 0$, $\omega = 0$ est du type III; elle possède une courbe analytique lisse passant par 0 tangente à $x = 0$ et une «courbe intégrale formelle» tangente à $y = 0$. On choisit les coordonnées (x, y) telle que la première soit $x = 0$.

Nous dirons que $\omega = 0$ est *préparée à l'ordre* n si les coordonnées (x, y) possèdent ces propriétés et si la mise sous forme normale N est tangente à $1_{\mathbb{R}^2}$ à l'ordre n. Dans les trois cas, nous écrivons encore $\omega = 0$ la complexifiée de $\omega = 0$. Nous supposons qu'elle converge sur un voisinage du polydisque $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ et nous notons :

$$x \longmapsto u(x), \quad \big(\text{resp. } y \longmapsto v(y)\big)$$

le difféomorphisme d'holonomie de $x = 0$ évalué sur $y = 1$ (resp. de $y = 0$ évalué sur $x = 1$ dans les cas I, II).

Il existe une unique série formelle $\widehat{H} \in \mathbb{R}[[x]]$ (resp. $\widehat{K} \in \mathbb{R}[[y]]$) appelée *itérateur de u (resp. de v pour I, II)* telle que :

$$u = \widehat{H}^{-1} \circ U \circ \widehat{H} \quad (\text{resp. } v = \widehat{K}^{-1} \circ V \circ \widehat{K}),$$
$$\widehat{H}(0) = 0,\ \widehat{H}'(0) = 1 \quad (\text{resp. } \widehat{K}(0) = 0,\ \widehat{K}'(0) = 1)$$

et telle que les coefficients des x^{pr} (resp. y^{qr}) avec $r \in \mathbb{N}$ soient nuls dans le cas II. Les propriétés de ces itérateurs et de la mise sous forme-normale sont intimement liées comme le montre la proposition classique suivante.

PROPOSITION 0 (voir [2], [7], [8], [9]). — *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour le couple* ω, Ω :

(i) $\omega = 0$ *possède une mise sous-forme normale* N *convergente*;

(ii) *l'itérateur* $\widehat{H}$ (*où* $\widehat{K}$ *dans I, II*) *est convergent*;

(iii) $\omega = 0$ *possède un facteur intégrant analytique.*

1.3. Application de Dulac et itérateurs.

Dans les cas I et II, $\{x \geq 0,\ y \geq 0\}$ est un secteur col de $\omega = 0$. Dans le cas III, $\omega = 0$ possède un secteur col d'équation $\{x \geq 0,\ y \geq y(x)\}$ où $y(x)$ est une courbe intégrale tangente à $y = 0$. Dans les trois cas, on note

$$x \longmapsto d(x)$$

son application de Dulac évaluée sur les courbes $y = 1$, $x = 1$. Dans les cas I, II (resp. III), d possède un développement asymptotique (resp. transasymptotique $\hat{d}$ qui s'écrit (voir [3]) :

Type I : $\hat{d}(x) = \widehat{K}^{-1} \circ D_I \circ \widehat{H}(x) = x^{\lambda}\big(1 + \sum\limits_{m+n>0} a_{m,n}\, x^{m+n\lambda}\big)$;

Type II : $\hat{d}(x) = \widehat{K}^{-1} \circ D_{II} \circ \widehat{H}(x) = x^{p/q}\big(1 + \sum\limits_{m+n>0} a_{m,n} x^{m/q} (x^p \operatorname{Log} x)^n\big)$;

Type III : $\hat{d}(x) = K^{-1} \circ D_{III} \circ \widehat{H}(x)$ avec $K \in y\,\mathbb{C}\{y\}$ et $K'(0) \neq 0$.

Dans les cas I, II (resp. III) nous dirons que $\hat{d}$ est *convergent* si la série double $\sum a_{m,n}\, s^m\, t^n$ converge (resp. si $\widehat{H}$ converge).

Dans les cas I, II, les familles d'infiniment petits $\{x^{m+n\lambda}\}_{m+n>0}$ ou $\{x^{m/q}(x^p \operatorname{Log} x)^n\}_{m+n>0}$ avec $x > 0$ sont totalement ordonnées. On montre facilement (par un argument du type lemme d'Abel) que $\hat{d}$ converge dans ces cas si et seulement si il existe $x_0 > 0$ tel que les séries numériques $\sum a_{m,n}\, x_0^{m+n\lambda}$ et $\sum a_{m,n}\, x_0^{m/q}(x_0^p \operatorname{Log} x_0)^n$ convergent pour l'ordre de sommation ainsi défini.

1.4. Énoncés des résultats.

Il est clair que le théorème de l'introduction se déduit de la proposition 0 et des deux propositions suivantes.

PROPOSITION 1. — *Dans les cas I, II, le développement* $\hat{d}$ *converge si et seulement si* ω *est analytiquement normalisable.*

PROPOSITION 2. — *Dans les cas I, II, III, le développement* $\hat{d}$ *converge si et seulement si* d *est* 1*-pfaffienne.*

1.5. Preuve des propositions dans le cas non transcendant.

Si $\omega = 0$ est du type I ou III, nous dirons que $\hat{d}$ est *transcendant*; si $\omega = 0$ est du type II nous dirons que $\hat{d}$ *est transcendant* si $\hat{d}$ contient des termes logarithmiques (*i.e.* il existe $n > 0$ tel que $a_{m,n} \neq 0$). Nous reviendrons sur ce concept dans la section 3. Le cas non transcendant est très simple comme le montre le lemme suivant.

LEMME 1. — *Lorsque $\hat{d}$ n'est pas transcendant, $\omega = 0$ est analytiquement linéarisable.*

Preuve. — Si $\hat{d}$ n'est pas transcendant, le développement asymptotique $\widehat{D}_{II}$ de l'application de Dulac de sa forme normale Ω_{II} est non transcendant. Le coefficient $\rho - \rho' = A_{0,1}$ du terme en $X^p \operatorname{Log} X$ de D_{II} est nul. Puisque $\rho = \rho'$, Ω_{II} est linéaire modulo un facteur multiplicatif. D'après [1], [9], $\omega = 0$ est analytiquement linéarisable. $\square$

Il est clair que ce lemme prouve les propositions 1 et 2 lorsque $\hat{d}$ est non transcendant. Dans toute la suite, nous supposons $\hat{d}$ transcendant.

2. Preuve de la proposition 1

Dans cette section, $\omega = 0$ est une équation différentielle analytique sur un voisinage de 0 du type I ou du type II transcendant. Nous la supposons préparée à un ordre grand chaque fois que cela est nécessaire. Il est clair que $\hat{d}$ converge si $\omega = 0$ est analytiquement normalisable. Prouvons la réciproque.

2.1. Preuve pour le type I.

En écrivant $\widehat{H}(x) = x(1 + \hat{h}(x))$, on a d'après 1.2. :

$$\hat{d}(x) = \widehat{K}^{-1}\big(x^\lambda(1 + \hat{h}(x))^\lambda\big).$$

D'autre part, on peut encore écrire $\hat{d}$ sous la forme :

$$\hat{d}(x) = \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 1} a_{m,n}\, x^{m+n\lambda} = \sum_{m \geq 0} d_m(x^\lambda) x^m,$$

où les $d_m(t)$ sont des séries entières convergentes puisque $\hat{d}$ converge par hypothèse. En identifiant ces deux expressions de $\hat{d}$, on voit que $d_0(t) = \widehat{K}^{-1}(t)$ converge. D'après la proposition 0, $\omega = 0$ est analytiquement linéarisable. $\square$

2.2. Simplication des équations résonnantes par ramification.

Soit $\omega = 0$ du type II et soit $\Omega_{II} = 0$ sa forme normale avec les notations de 1.1.

LEMME 2. — *Posons*

$$\psi_{q,p}(x_1,y_1)=(x_1^q,y_1^p),\quad \omega_1=(pqx_1^{q-1}y_1^{p-1})^{-1}\psi_{q,p}^*(\omega)$$

et soit d_1 l'application de Dulac de $\omega_1=0$ évaluée sur $y_1=1$, $x_1=1$. Alors on a les équivalences suivantes :

(i) *$\hat{d}_1$ converge si et seulement si $\hat{d}$ converge ;*

(ii) *d_1 est 1-pfaffienne si d est 1-pfaffienne ;*

(iii) *$\omega_1=0$ est analytiquement normalisable si et seulement si $\omega=0$ est analytiquement normalisable.*

Preuve. — D'après les définitions de $\psi_{q,p}$, d et d_1, on a clairement la relation :

$$\big(d_1(x_1)\big)^p=d(x_1^q).$$

L'équivalence (i) s'en déduit. L'implication (ii) est évidente. Pour prouver (iii), décomposons la double ramification $\psi_{q,p}$ en le composé des deux ramifications simples :

$$(x_2,y_2)=\psi_{q,1}(x_1,y_1),\quad (x,y)=\psi_{1,p}(x_2,y_2)$$

et soit $\omega_2=(py_2^{p-1})^{-1}\psi_{1,p}^*(\omega)$. Notons u_i,v_i les holonomies de $x_i=0$, $y_i=0$ pour $\omega_i=0$. On a clairement :

$$u_2=u^p\quad\text{et}\quad v_1=v_2^q.$$

Les difféomorphismes u_2 et u ont le même itérateur $\widehat{H}$. D'après la proposition 0, $\omega=0$ est analytiquement normalisable si et seulement si $\omega_2=0$ est analytiquement normalisable. Le même raisonnement prouve que $\omega_2=0$ est analytiquement normalisable si et seulement si $\omega_1=0$ est analytiquement normalisable. ▯

2.3. Preuve pour le type II transcendant.

D'après le lemme 2 nous pouvons supposer que la forme normale de ω s'écrit :

$$\Omega=Y\big(1+\rho(XY)^r\big)\,\mathrm{d}X+X(1+\rho'(XY)^r)\,\mathrm{d}Y.$$

Nous supposons $\omega=0$ préparée de telle façon que :

$$Y=\widehat{K}(y)=y+\mathrm{o}(y^{2r}),\quad X=\widehat{H}(x)=x+\mathrm{o}(x^{2r}).$$

Puisque $\hat{d}$, $\widehat{D}$ sont convergentes il existe $\delta, \Delta \in \mathbb{R}\{X,T\}$ telles que :

$$D(X) = \Delta(X, X^r \operatorname{Log} X) \quad \text{avec} \quad \Delta(X,T) = X + \sum_{n\geq 1} F_n(X)T^n,$$

$$d(x) = \delta(x, x^r \operatorname{Log} x) \qquad \text{avec} \quad \delta(x,t) = f_0(x) + \sum_{n\geq 1} f_n(x)t^n,$$

$$F_1(0) = f_0(0) = f_1(0) = 0, \quad F_1'(0) = f_1'(0) = \rho - \rho', \quad f_0'(0) = 1.$$

En posant

$$\widehat{H}(x) = x(1 + \hat{h}(x)),$$

calculons $T(X) = X^r \operatorname{Log} X$ en fonction de x et de $t(x) = x^r \operatorname{Log} x$:

$$T\big(\widehat{H}(x)\big) = x^r \big(1 + \hat{h}(x)\big)^r \operatorname{Log}\big(1 + \hat{h}(x)\big) + \big(1 + \hat{h}(x)\big)^r t(x).$$

Il est clair que $\widehat{H}$ converge si et seulement si

$$\hat{g}(X) = \operatorname{Log}\Big(\frac{\widehat{H}^{-1}(X)}{X}\Big) = -\operatorname{Log}\big(1 + \hat{h}(\widehat{H}^{-1}(X))\big)$$

converge. On vérifie facilement que (on notera g au lieu de $\hat{g}$) :

$$x = X \exp g(X), \quad T(X) = \exp\big(-rg(X)\big)t(\widehat{H}^{-1}(X)) - X^r g(X).$$

Avec ces notations l'équation $\widehat{K} \circ \hat{d} = \widehat{D} \circ \widehat{H}$ reliant les développements asymptotiques de Dulac de $\omega = 0$ et $\Omega = 0$ s'écrit (dans les variables x, X, t) :

$$\widehat{K} \circ \delta(x,t) = \Delta\big(X, \exp(-rg(X))t - X^r g(X)\big).$$

En identifiant les coefficients de t^0 et t^1 on obtient les deux équations :

$$\widehat{K}\big(f_0(x)\big) = \Delta\big(X, -X^r g(X)\big),$$
$$f_1(x)\widehat{K}'\big(f_0(x)\big) = \exp\big(-rg(X)\big)\frac{\partial \Delta}{\partial T}\big(X, -X^r g(X)\big).$$

En éliminant $\widehat{K}'$ entre la deuxième équation et la dérivée de la première équation par rapport à X, on obtient une équation différentielle du premier ordre en (g, X) qui s'écrit :

$$X \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}X} \frac{\partial \Delta}{\partial T}(Z)\big(f_0' \exp(1-r)g + f_1 X^{r-1}\big) =$$
$$- \frac{\partial \Delta}{\partial T}(Z)\big(f_0' \exp(1-r)g + rgf_1 X^{r-1}\big) + f_1 \frac{\partial \Delta}{\partial X}(Z)$$

en posant

$$Z = (X, -X^r g), \quad f_0' = f_0'(X \exp g), \quad f_1 = f_1(X \exp g).$$

C'est une équation différentielle ordinaire du premier orde en (x, g) à coefficients des séries entières convergentes. Étudions son 1-jet. En remarquant que :

$$f_0' = 1 + \mathrm{o}(X), \qquad f_1 = (\rho - \rho')X \exp g + \mathrm{o}(X),$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial T}(Z) = (\rho - \rho')X + \mathrm{o}(X), \quad \frac{\partial \Delta}{\partial X}(Z) = 1 + \mathrm{o}(X^r),$$

cette équation différentielle s'écrit après division par $(\rho - \rho')X$:

$$X \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}X}\big(1 + \mathrm{O}(X, g)\big) = rg + aX + \mathrm{o}(X, g).$$

C'est une équation dans le domaine de Poincaré. La série entière formelle g est convergente. $\square$

REMARQUE. — La preuve précédente montre en outre que $\widehat{H}$ est complètement caractérisé par les séries f_0, f_1. Cette preuve est purement combinatoire. On aimerait beaucoup avoir une preuve plus conceptuelle ou au moins une interprétation géométrique de ce résultat. J. Écalle en propose une démontration qui repose sur la théorie de résurgence [4].

3. Preuve de la proposition 2 dans les cas transcendants

3.1. Retour sur la transcendance.

L'argument essentiel de la preuve de la proposition 2 est la transcendance de l'application de Dulac que nous utiliserons sous la forme suivante.

Soit $D_\bullet$ l'application de Dulac d'une forme normale $\Omega_\bullet$ et soit

$$F(X, Y) = \sum_{m+n \geq 0} c_{m,n} X^m Y^n$$

un élément de $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

On obtient la *substitution de $D(X)$ dans $F(X, Y)$*, notée $F(X, D(X))$, à partir d'opérations élémentaires sur les fonctions Log et exp. Il est clair que $F(X, D(X))$ est encore une série (ou transérie dans le cas III) du même type que le développement asymptotique $\hat{d}$ d'une application de Dulac. L'expression $F(X, D(X))$ *est nul (identiquement)* a ainsi un sens clair.

LEMME 3. — *Supposons que D soit transcendante et soit $F(X,Y)$ appartenant à $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tel que $F(X,D(X)) \equiv 0$; alors $F(X,Y) \equiv 0$.*

Preuve. — Dans les cas I et III, si nous avons respectivement :

$$F(X,D(X)) = \begin{cases} \sum c_{m,n} X^{m+\lambda n} \equiv 0 & \text{(cas I)}, \\ \sum c_{m,n} X^m (X^{p\rho} \exp^{-1}/X^p)^n \equiv 0 & \text{(cas III)}, \end{cases}$$

il est clair que $c_{m,n} = 0$ pour tout (m,n). Dans le cas II, on peut supposer $p = q = 1$ (lemme 2) et on a alors :

$$D(X) = X + \sum_{n \geq 1} D_n(X)(X^r \operatorname{Log} X)^n.$$

Si $F \not\equiv 0$, il est bien connu que les solutions $Y(X)$ de $F(X,Y) = 0$ sont des séries de Puiseux. Puisque D n'est pas du type Puiseux, on a $F \equiv 0$. □

3.2. Preuve dans les cas I et II.

D'après 1.3, les applications de Dulac de $\omega = 0$ (bien préparée) et de $\Omega = 0$ sa forme normale sont liées par

$$D(X) = \widehat{K} \circ \hat{d} \circ \widehat{H}^{-1}(X)$$

où $Y = \widehat{K}(y)$, $X = \widehat{H}(x)$ sont les itérateurs des holonomies de $x = 0$, $y = 0$. Par hypothèse $y = d(x)$ est solution d'une équation différentielle :

$$\eta = \alpha \, \mathrm{d}x + \beta \, \mathrm{d}y, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\{x,y\},$$

dont 0 est une singularité algébriquement isolée. Il en est de même pour son développement asymptotique $\hat{d}$. Si on pose

$$\phi(X,Y) = \big(\widehat{H}^{-1}(X), \widehat{K}^{-1}(Y)\big) = (x,y),$$

$Y = D(X)$ est solution de l'équation différentielle (formelle) à singularité algébriquement isolée $\phi^*(\eta) = 0$. Distinguons alors les cas I et II.

— *Cas I.* La fonction $Y = D(X) = X^\lambda$ est aussi solution de l'équation différentielle

$$\nu = \lambda Y \, \mathrm{d}X - X \, \mathrm{d}Y = 0.$$

Ainsi $Y = D(X)$ annule $F(X,Y) \in \mathbb{R}[[X,Y]]$ où on a posé

$$\nu \wedge \phi^*(\eta) = F(X,Y) \, \mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y.$$

D'après le lemme 3, $\nu \wedge \phi^*(\eta) \equiv 0$. Puisque 0 est une singularité algébriquement isolée de ν et $\phi^*(\eta)$, on peut écrire :

$$\phi^*(\eta) = g\nu \quad \text{avec} \quad g \in \mathbb{R}[[X,Y]],\ g(0) \neq 0.$$

Puisque $D\phi(0) = 1_{\mathbb{R}^2}$, on a $j^1\eta = g(0)\nu$. L'équation $\eta = 0$ est dans le domaine de Poincaré. Sa solution formelle $\hat{d}(x)$ est convergente.

— *Cas II.* D'après le lemme 2, on peut supposer $p = q = 1$ et on écrit :

$$\Omega = Y\big(1 + \rho(XY)^r\big)\,\mathrm{d}X + X\big(1 + \rho'(XY)^r\big)\,\mathrm{d}Y = 0.$$

On vérifie que $Y = D(X)$ est solution de l'équation différentielle

$$\nu = Y^{r+1}(1 + \rho X^r)\,\mathrm{d}X - X^{r+1}(1 + \rho' Y^r)\,\mathrm{d}Y = 0$$

qui n'est pas réduite. Pour étudier sa solution $Y = D(X)$ tangente à $Y = X$, on fait l'éclatement ponctuel :

$$\phi_1(X_1, Y_1) = \big(X_1, (1 + Y_1)X_1\big) = (X, Y).$$

La fonction $Y_1 = D_1(X_1)$ définie par $(1 + Y_1)X_1 = D(X_1)$ est solution de l'équation à singularité algébriquement isolée :

$$\nu_1 = X_1^{-(r+1)}\phi_1^*(\nu) = 0$$

avec

$$j^1\nu_1 = \begin{cases} rY_1\,\mathrm{d}X_1 - X_1\,\mathrm{d}Y_1 & \text{si } r > 1, \\ (Y_1 + (\rho - \rho')X_1)\,\mathrm{d}X_1 - X_1\,\mathrm{d}Y_1 & \text{si } r = 1. \end{cases}$$

La courbe $Y_1 = D_1(X_1)$ est aussi solution de l'équation à singularité algébriquement isolée

$$\eta_1 = X_1^{-(r+1)}\phi_1^*\phi^*(\eta) = 0.$$

En raisonnant comme dans le cas précédent, on montre que :

$$\eta_1 = g\nu_1 \quad \text{avec} \quad g \in \mathbb{R}[[X_1, Y_1]],\ g(0) \neq 0.$$

Puisque ϕ est tangent à $1_{\mathbb{R}^2}$ à un ordre $\gg r$, l'équation

$$\eta_1' = X_1^{-(r+1)}\phi_1^* 1_{\mathbb{R}^2}^*(\eta)$$

a le même jet d'ordre 1 que $\eta_1 = 0$, c'est-à-dire :

$$j^1\eta_1 = j^1\eta_1' = g(0)j^1\nu_1.$$

C'est une équation dans le domaine de Poincaré. Sa solution $Y_1 = \hat{d}_1(X_1)$, définie par $(1 + X_1)Y_1 = \hat{d}(X_1)$, est convergente et par conséquent la solution $y = \hat{d}(x)$ de $\eta = 0$ est convergente. $\square$

3.3 Preuve dans le cas III.

Soient encore d et D les applications de Dulac de $\omega = 0$ et de

$$\Omega = X^{p+1}\,\mathrm{d}Y + pY(1 + \rho X^p)\,\mathrm{d}X = 0$$

sa forme normale. On suppose que $y = d(x)$ est solution d'une équation :

$$\eta = \alpha\,\mathrm{d}x + \beta\,\mathrm{d}y = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}\{x, y\}$$

à singularité algébriquement isolée. D'autre part, on vérifie que $Y = D(X)$ est solution de :

$$\nu = X^{p+1}\,\mathrm{d}Y - pY(1 + \rho X^p)\,\mathrm{d}X = 0.$$

Les applications d et D sont liées par la relation :

$$\hat{d} = K^{-1} \circ D \circ \widehat{H}$$

où $X = \widehat{H}(x)$ est l'itérateur de l'holonomie u de $x = 0$ et $K \in y\mathbb{C}\{y\}$ (voir [3]). Si on pose

$$\phi(X, Y) = \big(\widehat{H}^{-1}(X), K^{-1}(Y)\big) = (x, y),$$

la courbe $Y = D(X)$ est solution de l'équation (formelle) $\phi^*(\eta)$ à singularité isolée en $0 \in \mathbb{C}^2$ et à coefficients dans $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Comme dans les cas précédents, on a :

$$\nu \wedge \phi^*(\eta) = F(X, Y)\,\mathrm{d}X \wedge \mathrm{d}Y, \quad F \in \mathbb{C}[[X, Y]]$$

avec $F(X, \widehat{D}(X)) \equiv 0$. D'après le lemme 3, on a $\nu \wedge \phi^*(\eta) \equiv 0$ ou encore $(\phi^{-1})^*(\nu) \wedge \eta \equiv 0$. Cette dernière identité s'écrit :

$$\frac{\widehat{H}'(x)}{\widehat{H}^{p+1}(x)}\big(1 + \rho\widehat{H}^p(x)\big) = \frac{\alpha(x, y)}{\beta(x, y)}\Big(\frac{-K'(y)}{pK(y)}\Big).$$

Le second membre de cette équation est indépendant de y, méromorphe en x avec un pôle d'ordre $p + 1$. La fonction $X = \widehat{H}(x)$ est solution d'une équation différentielle du type :

$$-p\frac{\mathrm{d}X}{X^{p+1}} - p\rho\frac{\mathrm{d}X}{X} = -p\frac{1 + c(x)}{x^{p+1}}\,\mathrm{d}x, \quad c \in x\mathbb{C}\{x\}.$$

Ainsi X est solution de l'équation implicite

$$\frac{1}{X^p} - p\rho\,\mathrm{Log}\,X = \frac{1}{x^p} - p\int \frac{c(x)}{x^{p+1}}\,\mathrm{d}x.$$

On résoud cette équation par le théorème classique des fonctions implicites en posant $X = x(1 + \hat{h}(x))$. La série $\hat{h}(x)$ converge. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BRUYNO (A.D.). — *The analytical form of differential equations*, Trans. Mosc. Math. Soc., t. **25**, 1971, p. 131–288.

[2] ÉCALLE (J.). — Les fonctions résurgentes, tome 2 : *Les fonctions résurgentes appliquées à l'itération*, Pub. Math. Orsay, 1981 ; tome 3 : *L'équation du pont et la classification analytique des objets locaux*, Pub. Math. Orsay, 1985.

[3] ÉCALLE (J.). — *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Actualités Math., Hermann, Paris, 1992.

[4] ÉCALLE (J.). — *Lettre sur les relations entre les itérateurs et les applications de Dulac*, 1994.

[5] IL'YASHENKO (Yu.S.). — *Finiteness Theorems for limit cycles*, Transl. Math. Monographs 94, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[6] KHOVANSKII (A.G.). — *Fewnomials*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[7] MARTINET (J.) et RAMIS (J.-P.). — *Problème de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 55, 1982, p. 63–124.

[8] MARTINET (J.) et RAMIS (J.-P.). — *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre*, Ann. Sci. École Normale Sup., t. **16**, 1983, p. 571–621.

[9] MATTEI (J.-F.) et MOUSSU (R.). — *Holonomie et intégrales premières*, Ann. Sci. École Normale Sup., t. **4**, 13, 1980, p. 469–523.

[10] MOURTADA (A.). — *Cyclicité finie des polycycles hyperboliques de champs de vecteurs du plan : algorithme de finitude*, Ann. Institut Fourier (Grenoble), t. **41**, 1991, p. 719–753.

[11] MOUSSU (R.) et ROCHE (C.). — *Théorie de Khovanskii et problème de Dulac*, Inv. Math. 105, 1991, p. 431–441.

[12] ROUSSARIE (R.). — *On the number of limit cycles which appear by perturbation of separatrix loop of planar vector fields*, Bol. Soc. Brasil. Mat., t. **17**, 2, 1986, p. 67–101.

[13] SEIDENBERG (A.). — *Reduction of singularities of the differential equation* $A\,\mathrm{d}y = B\,\mathrm{d}x$, Amer. J. Math. 90, 1968, p. 248–269.