BULLETIN DE LA S. M. F.

LAISANT

Remarques sur la théorie des régions et des aspects

Bulletin de la S. M. F., tome 10 (1882), p. 52-55
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1882__10__52_0>

Remarques sur la théorie des régions et des aspects; par M. Laisant.

(Séance du 3 février 1882.)

1. Dans la dernière séance de la Société mathématique, M. Halphen a fait une intéressante Communication sur le problème des différents *aspects* sous lesquels on peut voir un système de points distribués sur un plan, lorsqu'on circule sur ce plan à volonté.

Pour donner à l'énoncé de ce problème de Géométrie de situation la précision désirable, M. Halphen définit un aspect par la permutation qui indique l'ordre dans lequel les points apparaissent autour de l'observateur, deux permutations représentant le même aspect lorsqu'on peut les déduire circulairement l'une de l'autre.

Il apparaît immédiatement, d'après cela, que pour deux points il n'y a qu'un aspect imaginable, que pour trois points il y a deux aspects, et que pour n points on peut imaginer $(n-1)!$ aspects différents.

Mais, en général, ces aspects imaginables ne sont pas tous possibles; et c'est déjà faire un pas vers la solution du problème que de fixer une limite supérieure du nombre des aspects possibles pour un système de n points.

2. Supposons que, ces n points étant donnés sur un plan, nous venions à les joindre deux à deux par des droites de toutes les manières possibles.

Les $\frac{n(n-1)}{2}$ droites ainsi tracées diviseront le plan en un certain nombre de régions, les unes fermées de toutes parts, les autres illimitées. Or, il est bien évident que, lorsqu'un observateur circulera, sans en sortir, dans l'une de ces régions, il verra toujours le système des n points sous le même aspect. Par suite, la détermination du nombre de ces régions nous donnera une limite supérieure du nombre des aspects possibles.

3. J'ai démontré, dans une communication au Congrès d'Alger, en 1881, que m droites prises au hasard sur un plan déterminent

$1 + \frac{m(m+1)}{2}$ régions, dont $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ limitées, et $2m$ illimitées.

Mais on n'aurait pas le nombre des régions pour le problème qui nous occupe en remplaçant simplement dans ces formules m par $\frac{n(n-1)}{2}$, car les droites présentent ici cette particularité, que par un point quelconque du système passent $n-1$ d'entre elles. Il y a par conséquent, en chacun des points, perte de $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ régions, toutes limitées, résultat qu'on obtient en remplaçant m par $n-1$. Pour les n points considérés, cela nous fera donc $\frac{n(n-2)(n-3)}{2}$ régions perdues.

Le calcul, d'ailleurs bien facile, montre, d'après cela, qu'il nous restera

$$\frac{1}{8}(n-1)(n^3-5n^2+18n-8)$$

régions, dont

$$\frac{1}{8}(n-1)(n-2)(n^2-3n+4)$$

régions limitées, et $n(n-1)$ régions illimitées.

4. L'évaluation numérique sera facile, au moyen des différences, et nous pourrons ainsi former le tableau suivant, que nous construisons depuis $n=2$ jusqu'à $n=15$.

Dans ce tableau, n représente le nombre des points du système, m le nombre des droites qui les unissent deux à deux, ρ_i le nombre des régions illimitées, ρ_l celui des régions limitées, ρ le nombre total des régions, c'est-à-dire $\rho_i + \rho_l$, et enfin $\alpha = (n-1)!$ le nombre des aspects imaginables.

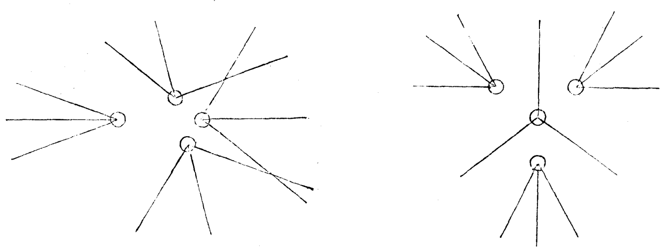
n	m	ρ_i	ρ_l	ρ	α
2	1	2	0	2	1
3	3	6	1	7	2
4	6	12	6	18	6
5	10	20	21	41	24
6	15	30	55	85	120
7	21	42	120	162	720
8	28	56	231	287	5040
9	36	72	406	478	40320
10	45	90	666	756	362880

n	m	ρ_i	ρ_l	ρ	α
11	55	110	1035	1145	3628800
12	66	132	1540	1672	39916800
13	78	156	2211	2367	479001600
14	91	182	3081	3263	6227020800
15	105	210	4186	4396	87178291200

Le nombre ρ des régions, comme on le voit, est supérieur au nombre des aspects imaginables α tant que le nombre des points du système ne surpasse pas 5. Mais, au delà, ce nombre ρ devient inférieur à α; et, par suite, les aspects imaginables ne sont pas tous possibles, puisque ρ marque une limite supérieure du nombre des aspects possibles. Le rapport $\frac{\rho}{\alpha}$ décroît très vite, et pour $n = 15$, limite du tableau ci-dessus, il est inférieur à $\frac{1}{10^7}$, c'est-à-dire que, pour 15 points, il n'y a pas, en moyenne, un aspect possible sur 10 millions d'aspects imaginables.

5. En fait, le nombre des aspects possibles est inférieur de beaucoup à celui des régions que nous venons de déterminer. Il est même inférieur à celui des régions qui subsistent lorsqu'on supprime les portions de chaque droite comprises entre deux points quelconques du système.

Si nous prenons 4 points, à titre d'exemple, nous aurons les deux figures suivantes, selon que ces quatre points forment ou non un quadrilatère convexe :



Dans le premier cas, le nombre des régions se réduit à 11; dans le second cas, à 9; tandis qu'il était de 18 avant la suppression des parties comprises entre deux points quelconques.

On voit, d'après cela, combien le problème général doit être difficile; car il ne semble pas aisé, pour un nombre de points quelconque, d'introduire une notation faisant ressortir leurs positions relatives, et cependant cette disposition générale de la figure a une influence capitale sur le résultat.
