

BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDELGHANI EL MAZOUNI

Quotient de la variété des points infiniment voisins d'ordre 9 sous l'action de PGL_3

Bulletin de la S. M. F., tome 124, n° 3 (1996), p. 425-455

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_3_425_0

© Bulletin de la S. M. F., 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUOTIENT DE LA VARIÉTÉ DES POINTS INFINIMENT VOISINS D'ORDRE 9 SOUS L'ACTION DE PGL_3

PAR

ABDELGHANI EL MAZOUNI (*)

RÉSUMÉ. — On montre que le quotient par le groupe projectif de la variété des points infiniment voisins d'ordre n des points du plan est rationnel. On décrit précisément ce quotient pour $n = 8$ et $n = 9$. Pour $n = \frac{1}{2}d(d+3)$, on obtient la rationalité du quotient sous PGL_3 de la courbe plane universelle de degré d . En particulier, pour $d = 4$ on a la rationalité de l'espace des modules \mathcal{M}_3^1 des courbes de genre 3 avec point marqué.

ABSTRACT. — The quotient of the variety of infinitely near points, of order n , to points of the plane by the projective group is shown to be rational. A precise description of it is given when $n = 8$ and $n = 9$. For $n = \frac{1}{2}d(d+3)$ we get the rationality of the quotient of the universal plane curve of degree d by PGL_3 . This gives for $d = 4$, the rationality of the moduli space \mathcal{M}_3^1 of pointed curves of genus 3.

Introduction

Il s'agit de comprendre la thèse *Sur les invariants différentiels* de G.H. Halphen (1878). On s'intéresse à l'action du groupe projectif PGL_3 sur l'ensemble des germes de courbe analytique lisse en un point de $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$, ou sur la variété algébrique S_n^0 des « points épais d'ordre n » (ou germes tronqués à l'ordre n) de courbe lisse. Pour $n \leq 7$, cette action a un nombre fini d'orbites. Des invariants apparaissent pour $n \geq 8$. Halphen les étudie dans une carte locale de S_n^0 isomorphe à \mathbb{C}^{n+1} (cf. 1.3) et montre qu'ils forment un anneau bigradué \mathcal{H}_n , dont il fait une étude exhaustive pour $n \leq 10$. Il obtient aussi quelques résultats valables quel que soit n , que nous présentons au § 1 (théorème 1.1) et qui impliquent

(*) Texte reçu le 23 décembre 1994, accepté le 12 juillet 1995.

A. EL MAZOUNI, Université des Sciences et Technologies de Lille, UFR de Mathématiques Pures et Appliquées, URA au CNRS 0751, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX (France). Email : mazouni@gat.univ-lille1.fr.

Mots clés : points infiniment voisins – action de PGL_3 – invariants différentiels – espaces des modules – rationalité.

que le quotient de S_n^0 sous PGL_3 est toujours une variété rationnelle. Pour $n = \frac{1}{2}d(d+3)$, ceci équivaut à la rationalité de la variété de modules des courbes planes de degré d munies d'un point marqué (le cas $d = 4$ est traité, fort différemment et avec de nombreuses informations supplémentaires, dans [9]).

Nous avons consacré beaucoup d'efforts à l'essai dans ce cadre des méthodes de « Geometric invariant theory » de [11]. Nous constatons que la théorie de la stabilité ne s'applique pas à S_n^0 pour $n \geq 8$ (§ 2, proposition 2.4) et qu'il n'existe pas de bon quotient projectif d'un ouvert PGL_3 -invariant de S_9^0 (théorème 5.1). Il existe toutefois une surface projective normale S , rationnelle à singularités isolées et rationnelles, dont le groupe des classes de diviseurs de Weil $\mathrm{Cl}(S)$ peut être identifié à \mathbb{Z}^2 de sorte que l'anneau bigradué $\bigoplus_{\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(S)} H^0(\mathcal{L})$ soit isomorphe à \mathcal{H}_9 . (Cette surface n'est pas mentionnée dans [8], mais nous avons utilisé de manière cruciale les calculs de [8].) La surface S est « birationnellement » le quotient de S_9^0 par PGL_3 mais la correspondance du passage au quotient n'est un morphisme en aucun point de la fibre d'un certain point singulier O de S .

Je tiens à remercier Laurent Gruson pour l'aide qu'il a apportée pour la réalisation de ce travail.

1. Action de G sur S_n

Par un *point infiniment voisin d'ordre n* d'un point x_1 d'une variété lisse S_1 , on entend habituellement la donnée d'une suite (x_1, x_2, \dots, x_n) , vérifiant la condition de récurrence suivante : x_2 est un point de la fibre exceptionnelle de l'éclatement $S_1^{(2)}$ de x_1 dans S_1 , on définit de proche en proche l'éclatement $S_1^{(i+1)}$ de x_i dans $S_1^{(i)}$ et l'on demande que x_{i+1} soit un point de la fibre exceptionnelle de $S_1^{(i+1)}$ pour $2 \leq i \leq n$.

Dans le cas où S_1 est le plan projectif complexe \mathbb{P} , on étend l'action du groupe des automorphismes PGL_3 de \mathbb{P} , à l'espace des points infiniment voisins d'ordre n pour $n \geq 1$. Le but de ce travail est de chercher un bon quotient sous cette action pour $n = 9$.

1.1. Définition de S_n .

Soient :

- V un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 3 ;
- $\mathbb{P} = P(V^\vee) = \mathrm{Proj} \mathrm{Sym} V$;
- $G = \mathrm{PGL}(V^\vee)$ le groupe des automorphismes de \mathbb{P} .

Rappelons (voir [2], [3]) la définition de la variété S_n des points infiniment voisins d'ordre n de points de \mathbb{P} . On pose :

$$S_1 = \mathbb{P}, \quad S_2 = \text{Proj}_{S_1} \text{Sym } \Omega_{S_1}^1.$$

La variété S_2 peut être identifiée à «la correspondance d'incidence point-droite». De plus, on a une fibration $p_2 : S_2 \rightarrow S_1$ de fibre \mathbb{P}^1 .

Par récurrence, supposons que $p_n : S_n \rightarrow S_{n-1}$ est une fibration de fibre \mathbb{P}^1 , avec $S_n = \text{Proj}_{S_{n-1}} \text{Sym } E_{n-1}$ où E_{n-1} est un quotient de rang 2 de $\Omega_{S_{n-1}}^1$. La donnée d'un point u de S_n détermine une droite dans l'espace tangent $T_{p_n(u)}(S_{n-1})$. Notons $\langle u \rangle$ cette droite. On pose :

$$(E_n)_u = dp_n(u)^{-1}(\langle u \rangle).$$

C'est un plan de $T_u(S_n)$ (appelé *plan focal* en u) où $dp_n(u)$ est l'application tangente de $T_u(S_n)$ dans $T_{p_n(u)}(S_{n-1})$.

D'une autre façon : posons $S_1 = \mathbb{P}$ et $S_2 = \text{Proj}_{S_1} \text{Sym } \Omega_{S_1}^1$. Par récurrence supposons que $S_n = \text{Proj}_{S_{n-1}} \text{Sym } E_{n-1}$ où E_{n-1} est un quotient de $\Omega_{S_{n-1}}^1$. On a les suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow p_n^* \Omega_{S_{n-1}}^1 &\longrightarrow \Omega_{S_n}^1 \longrightarrow \Omega_{S_n/S_{n-1}}^1 \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \Omega_{S_n/S_{n-1}}^1 &\longrightarrow p_n^*(E_{n-1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{S_n}(1) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

où $\mathcal{O}_{S_n}(1)$ désigne le quotient tautologique de $p_n^*(E_{n-1})$. Donc

$$S_{n+1} = \text{Proj}_{S_n} \text{Sym } E_n$$

où E_n est le quotient de rang 2 de $\Omega_{S_n}^1$ défini par le « carré cocartésien » :

$$\begin{array}{ccc} p_n^* \Omega_{S_{n-1}}^1 & \longrightarrow & \Omega_{S_n}^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_n^*(E_{n-1}) & & \\ \downarrow & & \\ \mathcal{O}_{S_n}(1) & \longrightarrow & E_n. \end{array}$$

Remarquons qu'on a la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{S_n}(1) \longrightarrow E_n \longrightarrow \Omega_{S_n/S_{n-1}}^1 \rightarrow 0.$$

1.2. Action de G sur S_n .

Le groupe G agit transitivement sur $S_1 = \mathbb{P}$ et agit sur TS_1 (fibré tangent à S_1) de la manière suivante.

Soit $m \in S_1$, représenté par (x_0, y_0, z_0) (nous supposons $z_0 \neq 0$); soit v un vecteur tangent de $T_m(S_1)$, *i.e.* il existe $(x(t), y(t), z(t))$ (avec $z(t) \neq 0$ pour t voisin de zéro) tel que

$$\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{x(t)}{z(t)} \right)_0, \frac{d}{dt} \left(\frac{y(t)}{z(t)} \right)_0 \right) = v.$$

Soit $g \in G$ qui transforme m en gm et le vecteur tangent v en le vecteur tangent en gm de la courbe en $t = 0$

$$g(x(t), y(t), z(t)),$$

d'où une action de G sur $S_2 = \text{Proj}_{S_1} \text{Sym } \Omega_{S_1}^1$. Le groupe G transforme plan focal en plan focal (le plan focal en un point de S_2 est l'image inverse d'une droite tangente en un point de S_1). L'action de G s'étend à $S_3 = \text{Proj}_{S_1} \text{Sym } E_2$. Par récurrence, supposons que G agit sur S_{n-1} et S_n ; l'action de G induite sur $\text{Proj}(TS_n)$ envoie plan focal sur plan focal dans S_n d'où l'action de G sur S_{n+1} .

On note S_n^0 l'ouvert G -stable de S_n formé des points infiniment voisins sur un germe de courbe lisse de \mathbb{P} . Cet ouvert (qui à l'exception d'un passage de la démonstration du théorème 1.1, sera seul utilisé dans la suite) est isomorphe au sous-schéma de $\text{Hilb}(\mathbb{P})$ formé des points épais d'ordre n sur une courbe lisse (*i.e.* définissable dans l'anneau local \mathcal{O}_m d'un point m de \mathbb{P} par l'idéal (f, g^n) où (f, g) engendre l'idéal maximal de \mathcal{O}_m : la courbe lisse a pour équation f) (voir [2]).

1.3. Définition d'une carte locale de S_n^0 .

On choisit une base de V , *i.e.* une identification de \mathbb{P} au «complété» projectif du plan affine \mathbb{C}^2 . On définit une immersion ouverte de \mathbb{C}^{n+1} dans S_n^0 , le point (x, a_0, \dots, a_{n-1}) est transformé en le point (x, a_0) épaissi n fois sur la courbe lisse de \mathbb{C}^2 d'équation :

$$Y = a_0 + a_1(X - x) + \dots + a_{n-1}(X - x)^{n-1}.$$

L'image de cette immersion est formée de points épais «à distance finie» et de direction tangentielle «non verticale». La carte locale ainsi obtenue joue un rôle fondamental dans la suite.

Les images de cet ouvert par action des éléments de G recouvrent S_n^0 .

1.4. Wronskiens.

Pour $d \geq 1$, définissons une hypersurface W_d de S_n ($n = C_{d+2}^2$), le d -ième wronskien. Le d -ième plongement de Véronèse de \mathbb{P} dans \mathbb{P}_{n-1} induit un plongement de S_n^0 dans le schéma de Hilbert de points épais d'ordre n sur une courbe lisse de \mathbb{P}_{n-1} . La condition d'être situé dans un hyperplan définit une hypersurface de ce dernier schéma. Le d -ième wronskien est l'adhérence dans S_n de l'image réciproque dans S_n^0 de cette hypersurface.

Son équation dans la carte 1.3 est le déterminant à C_{d+1}^2 lignes et colonnes obtenu comme suit. Soit

$$y = \sum_{i \geq 2} a_i x^i$$

le développement de Taylor d'un germe de courbe en $(0, 0)$ à tangente horizontale paramétrée par l'abscisse. Écrivons le développement de Taylor de y^k sous la forme $\sum_{i \geq 2} a_i^k x^i$. Par ce plongement de degré d , le point de coordonnées (x, y, z) de \mathbb{P} est envoyé sur le point de \mathbb{P}_{n-1} de coordonnées

$$(z^d, z^{d-1}x, \dots, z^{d-1}y, z^{d-2}xy, \dots, x^{d-1}y, \dots, y^d)$$

Supposons $z = 1$; la condition d'être situé sur un hyperplan se traduit par la nullité du déterminant suivant :

	1	x	x^2	x^3	\dots	x^d	x^{d+1}	\dots	x^{n-1}
1	I						O		
\vdots									
x^d									
y	0	0	a_2	a_3	\dots	a_d	W_d		
xy	0	0	0	a_3	\dots	a_{d-1}			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots			
$x^{d-1}y$	0	0	0	0	\dots	\vdots			
y^2	0	0	0	0	\dots	\vdots			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots			
$x^{d-2}y^2$	0	0	0	0	\dots	a_2			
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots			
y^d	0	0	0	0	\dots	0			

où :

- I est la matrice carrée identité d'ordre $d + 1$,
- O la matrice nulle à $d + 1$ lignes et $\frac{1}{2}d(d + 1)$ colonnes,
- W_d est le déterminant d'ordre $d(d + \frac{1}{2})$:

$$W_d = \begin{vmatrix} a_{d+1} & a_{d+2} & \cdots & \cdots & a_{n-1} \\ a_d & a_{d+1} & \cdots & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{n-d} \\ a_{d+1}^2 & a_{d+2}^2 & \cdots & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_3^2 & a_4^2 & \cdots & \cdots & a_{n-d+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{d+1}^d & a_{d+2}^d & \cdots & \cdots & a_{n-1}^d \end{vmatrix}$$

EXEMPLE. — On pose $U = W_1 = a_2$ et

$$W_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2^2 & 2a_3 \end{vmatrix} = UV, \quad \text{où} \quad V = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_2 & 2a_3 \end{vmatrix}.$$

REMARQUE.

Plus généralement, si $m \geq C_{d+2}^2$, on peut considérer la matrice :

$$\begin{pmatrix} a_{d+1} & a_{d+2} & \cdots & \cdots & a_{m-1} \\ a_d & a_{d+1} & \cdots & \cdots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_{m-d} \\ a_{d+1}^2 & a_{d+2}^2 & \cdots & \cdots & a_{m-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_3^2 & a_4^2 & \cdots & \cdots & a_{m-d+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{d+1}^d & a_{d+2}^d & \cdots & \cdots & a_{m-1}^d \end{pmatrix}.$$

La sous-variété de S_m^0 définie par les mineurs maximaux de cette matrice est le lieu des points épais d'ordre m sur une courbe de degré d . Elle est invariante par G et on la note $W_{d,m}$.

EXEMPLE.

- La variété $W_{1,m}$, où $m \geq 3$, est définie par l'idéal

$$(a_2, \dots, a_{m-1}).$$

- La variété $W_{2,9}$ est définie par les mineurs maximaux de :

$$\begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 & 2a_2a_6 + 2a_3a_5 + a_4^2 \end{pmatrix}.$$

1.5. Description d'un ouvert de S_n .

Soit S_n^{00} (avec $n \geq 6$) l'ouvert de S_n^0 défini par l'inéquation $UV \neq 0$.

THÉORÈME 1.1.

- (i) L'ouvert S_7^{00} est le quotient de G par un sous-groupe γ d'ordre 3.
- (ii) Pour $n \geq 8$, l'ouvert S_n^{00} est G -isomorphe au fibré vectoriel de rang $(n-7)$ sur S_7^{00} , quotient de $G \times \mathbb{C}^{n-7}$ (où l'action de G sur le second facteur est triviale) par l'action (à droite) de γ définie sur le second facteur par la matrice diagonale

$$(\chi, 1, \chi^2, \chi, 1, \dots)$$

(où χ est un caractère non trivial de γ).

Démonstration. — Soit X l'hypersurface G -invariante de S_8^{00} , lieu du noeud d'une cubique nodale variable de \mathbb{P} , épaissi huit fois sur une des branches. Son équation Δ dans les coordonnées ci-dessus est obtenue en éliminant les coefficients de l'équation de la cubique,

$$y(ax + by) + cx^3 + dx^2y + exy^2 + fy^3$$

dans le système qui traduit la nullité du développement limité d'ordre 8 résultant de la substitution

$$y = a_2x^2 + \dots + a_7x^7$$

dans cette équation. On trouve :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ -a_2^2 & 0 & a_3^2 & 2a_3a_4 & 2a_3a_5 + a_4^2 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 & 2a_2a_5 + 2a_3a_4 \\ 0 & 0 & a_2^2 & 3a_2a_3 & 3a_2a_4 + 3a_3^2 \end{vmatrix}.$$

C'est un polynôme de degré 1 en a_7 de coefficient dominant U^4V ; on en déduit d'abord que tout point de S_7^{00} est sur une branche nodale unique de cubique. Le groupe G agit transitivement sur ces branches. (La classification des cubiques planes rationnelles sous PGL_3 est équivalente à la classification des points de \mathbb{P}_3 sous le groupe des automorphismes de la cubique gauche, modèle normal de la cubique rationnelle. De plus, le stabilisateur d'une cubique nodale s'identifie au groupe symétrique S_3 (des permutations des points d'inflexion), dont une transposition échange les deux branches du point double.) Fixons l'une d'elles, par exemple la branche infinie parabolique de la cubique $y = x^2 - x^{-1}$ du plan affine \mathbb{C}^2 , et notons m le point base de S_7^{00} correspondant. Le stabilisateur γ de m dans G est d'ordre 3, il agit linéairement sur \mathbb{C}^2 par la matrice diagonale (χ, χ^2) où χ est un caractère non trivial de γ , et dans la carte locale ci-dessus par la matrice diagonale

$$(\chi, 1, \chi^2, \dots, \chi^{2-i} \dots).$$

On obtient donc (i).

D'après [3], le quotient E_n de $\Omega_{S_n}^1$ factorise $\Omega_{S_n/S_{n-1}}^1$. Ce dernier définit l'hypersurface Z_{n+1} de S_{n+1} , « nouvelle composante » de

$$Y_{n+1} = S_{n+1} - S_{n+1}^0$$

(les autres constituent l'image réciproque de Y_n par la projection).

D'autre part, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{S_n}[Z_n] \rightarrow E_n \rightarrow \Omega_{S_n/S_{n-1}}^1 \rightarrow 0$$

qu'on restreint à S_n^0 :

$$(1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{S_n^0} \rightarrow (E_n)|_{S_n^0} \rightarrow \Omega_{S_n^0/S_{n-1}^0}^1 \rightarrow 0.$$

Cette suite exacte définit un élément de

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_{S_n^0}}^1(\Omega_{S_n^0/S_{n-1}^0}^1, \mathcal{O}_{S_n^0}) = H^1(T_{S_n^0/S_{n-1}^0})$$

où

$$T_{S_n^0/S_{n-1}^0} = (\Omega_{S_n^0/S_{n-1}^0}^1)^\vee.$$

Comme S_{n+1}^0 est le complémentaire, dans l'image réciproque de S_n^0 dans S_{n+1} , du fermé défini par le quotient $\Omega_{S_n^0/S_{n-1}^0}^1$ de $(E_n)|_{S_n^0}$, le fibré en droites affines sur S_n^0 défini par l'élément de $H^1(T_{S_n^0/S_{n-1}^0})$ déduit de la suite exacte (1) s'identifie à S_{n+1}^0 .

Posons :

$$S'_n = G \times_{S_n^{00}} S_n.$$

On va montrer par récurrence sur $n \geq 8$ que S'_n est G -isomorphe au fibré trivial $G \times \mathbb{C}^{n-7}$.

Pour $n = 8$, on remarque que E_7 et Ω_{S_7/S_6}^1 sont des quotients G -équivariants de $\Omega_{S_7}^1$. Leurs images réciproques sur G sont donc des fibrés G -équivariants du fibré trivial de fibre $(\mathrm{Sl}(V^\vee))^\vee$ (dual de l'algèbre de Lie de G), ils sont eux-mêmes triviaux. Remarquons d'ailleurs que l'hypersurface X fournit un scindage naturel de l'image réciproque de la suite (1) sur G pour $n = 7$. Soit A l'anneau des sections de \mathcal{O}_G (faisceau structural de G). On vient de voir que l'anneau des sections globales de S'_8 est $A[\xi]$, où ξ est une indéterminée invariante par G . L'image réciproque X' de X dans S'_8 définit un idéal I de $A[\xi]$ tel que $A \xrightarrow{\sim} A[\xi]/I$ (localement, I est engendré par un polynôme unitaire de degré 1). Quitte à remplacer ξ par $(\xi - a)$ avec $a \in A$, on peut donc supposer que ξ est un générateur de I , ce qui le caractérise (à homothétie près). On pose alors $\xi = i_8$.

Supposons maintenant $n > 8$. Tout revient à construire une section G -invariante de l'image réciproque E'_{n-1} de E_{n-1} sur S'_{n-1} qui scinde la suite exacte (1). Il suffit pour cela de prendre l'image dans E'_{n-1} de di_{n-1} où i_{n-1} est le dernier générateur construit de l'anneau des sections globales de S'_{n-1} .

Identifions S'_n et $G \times \mathbb{C}^{n-7}$; alors S_n^{00} est le quotient de S'_n par γ opérant (à droite) par :

$$\begin{aligned} S'_n \times \gamma &\longrightarrow S'_n \\ ((g, v), h) &\longmapsto (gh, \rho(h)v) \end{aligned}$$

où ρ est une représentation de γ dans \mathbb{C}^{n-7} .

Pour identifier ρ , utilisons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (g, v) & \longmapsto & (h^{-1}gh, \rho(h)v) \\ S'_n & \longrightarrow & S'_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_n^{00} & \longrightarrow & S_n^{00} \\ x & \longmapsto & h^{-1}x \end{array}$$

Soit p un point de S_n^{00} fixé par l'action (à gauche) de γ , par exemple le point $(0, 0)$ de \mathbb{C}^2 épaissi sur $y = x^2 + x^5$, et soit T l'espace tangent en p à S_n^{00} . On a une suite exacte :

$$0 \rightarrow \mathbb{C}^{n-7} \rightarrow T \rightarrow T' \rightarrow 0$$

où T' est l'espace tangent à S_7^{00} en l'image de p . On voit alors que $\rho(h)$ est la restriction à \mathbb{C}^{n-7} de la dérivée en p de $x \mapsto h^{-1}x$. Celle-ci a été identifiée plus haut conformément à l'énoncé du théorème. \square

2. L'anneau bigradué d'Halphen

On se propose d'expliciter l'anneau des fonctions G -invariantes sur S_n^{00} dans la carte locale de 1.3 (identifiée au spectre de $\mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_{n-1}]$).

2.1. Calcul de $\text{Pic}(S_n^0)$.

On note :

- A_n l'anneau $\mathbb{C}[t]/(t^n)$;
- V_n le \mathbb{C} -espace vectoriel $V \otimes_{\mathbb{C}} A_n^\vee$;
- G' le groupe algébrique produit semi-direct de G'_1 et G'_2 , où G'_1 est le groupe des automorphismes de la \mathbb{C} -algèbre A_n (il opère à droite sur A_n ou sur V_n^\vee par composition de développements limités lorsqu'on identifie ses éléments aux développements limités sans terme constant et de terme linéaire non nul) et où G'_2 est le groupe multiplicatif A_n^* de A_n , sur lequel G'_1 agit par composition. Alors G' agit (à droite) sur V_n^\vee par :

$$\begin{aligned} V_n^\vee \times G' &\longrightarrow V_n^\vee \\ (v, (\varphi, u)) &\longmapsto u \cdot (v \circ \varphi). \end{aligned}$$

Cette action commute avec l'action évidente de $\text{SL}(V^\vee)$.

Soit U_n l'ouvert de l'espace affine V_n^\vee formé des

$$v = v_0 + v_1 t + \dots + v_{n-1} t^{n-1} \quad \text{tels que } v_0 \wedge v_1 \neq 0.$$

On a un morphisme

$$\Pi_n : U_n \rightarrow S_n^0$$

qui transforme v en le point épais $t = 0$ sur la courbe de \mathbb{P} de représentation paramétrique $t \mapsto v(t)$.

PROPOSITION 2.1. — *Le morphisme Π_n est une fibration principale (au sens de la topologie de Zariski) de groupe structural G' .*

La démonstration est directe si l'on remarque qu'une section de Π_n au-dessus de la carte locale de 1.3 existe : elle est définie dans U_n par l'idéal des coefficients de $(x - t)$ et $(z - 1)$ (ici, x, y, z désignent les trois fonctions coordonnées sur V^\vee).

COROLLAIRE 2.1. — *Le groupe $\text{Pic}(S_n^0)$ est naturellement isomorphe au groupe des caractères $\chi(G')$ de G' (i.e. $\chi(G'_1) \times \chi(G'_2) = \mathbb{Z}^2$).*

Cela résulte de [11, p. 32], compte tenu du fait que $H^0(U_n, \mathcal{O}_{U_n}^*) = \mathbb{C}^*$ et $H^1(U_n, \mathcal{O}_{U_n}^*) = \{1\}$ (correspondant au fait que U_n est un ouvert de \mathbb{C}^{3n} dont le fermé complémentaire est de codimension 2). \square

2.2. Définition des invariants différentiels d'Halphen.

Les invariants d'ordre $< n$ sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_{n-1}]$ qui définissent une hypersurface dont l'adhérence dans S_n est G -invariante.

PROPOSITION 2.2. — Soit P un invariant différentiel d'ordre $< n$.

- 1) Le polynôme P est indépendant des variables (x, a_0, a_1) .
- 2) Le polynôme P est bihomogène pour les graduations suivantes de $\mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_{n-1}]$:

(degré) : x est de degré 0, les a_i sont de degré 1 ;

(poids) : x est de poids 0 et a_i est de poids i .

- 3) Le $\mathcal{O}_{S_n^0}$ -module inversible dont une section est l'adhérence de l'hypersurface d'équation P est $\mathcal{O}_{S_n^0}(d + p, 3d)$.

Recopions ici la démonstration d'Halphen (cf. [8, III, th. I-IV]).

Démonstration. — Commençons par regarder comment agit un élément g de G dans la carte locale 1.3. Si g est représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix},$$

le couple (x, y) est transformé en (X, Y) avec

$$X = \xi/\zeta, \quad Y = \eta/\zeta,$$

$$\xi = ax + by + c, \quad \eta = a'x + b'y + c', \quad \zeta = a''x + b''y + c''.$$

Le germe représenté par $(x, a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ où $a_0 = y$ est transformé en le germe représenté par

$$\left(X, Y, \frac{dY}{dX}, \dots, \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}} \right)$$

par action de g avec :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\zeta\eta' - \eta\zeta'}{\zeta\xi' - \xi\zeta'}, \quad \frac{d^2Y}{dX^2} = \frac{2D\zeta^3a_2}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^3},$$

$$\frac{d^kY}{dX^k} = \frac{k! D\zeta^{2k-1}a_k}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^{k+1}} + \frac{\xi^{k+1}A}{(\zeta\xi' - \xi\zeta')^{2k-1}},$$

où D désigne le déterminant de g et A un élément de $\mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_{k-1}]$ (ξ' (resp. η' , ζ') désigne la dérivée de ξ (resp. η , ζ) par rapport à x).

Les transformations

$$\begin{aligned} X &= x + c, & Y &= y, \\ X &= x, & Y &= y + c', \\ X &= x, & Y &= a'x + y \end{aligned}$$

nous donnent la partie 1).

La transformation

$$X = ax, \quad Y = b'y$$

nous donne que le degré d'un terme quelconque d'un invariant différentiel par rapport à la lettre y , abstraction faite des indices de dérivation, est constant pour tous les termes de cet invariant.

Ce degré sera appelé le *degré de l'invariant* et sera noté d .

De même, en considérant la transformation

$$X = ax, \quad Y = y,$$

on obtient que la somme des indices de dérivation dans un terme quelconque d'un invariant différentiel est le même pour tous les termes.

Cette somme constante sera appelée le *poids de l'invariant* et notée p , d'où la partie 2).

Soit P un élément de

$$\mathbb{C}\left[X, Y, \frac{dY}{dX}, \dots, \frac{d^{n-1}Y}{dX^{n-1}}\right]$$

vérifiant 1) et 2) de la proposition, c'est-à-dire ne contenant ni X , ni Y , ni la dérivée première de Y , dont tous les termes ont en outre un même degré d et un même poids p . Les transformations précédentes nous donnent

$$P = \frac{D^d \zeta^{2p-d}}{(\zeta \xi' - \xi \zeta')^{p+d}} \times Q + \frac{\zeta^\alpha}{(\zeta \xi' - \xi \zeta')^\beta} \times R$$

où α, β sont des entiers positifs, Q désigne le même polynôme que P sauf le changement des lettres et R un élément de $\mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_{n-2}]$. Si on suppose que P est un invariant cela entraîne que R est identiquement nul, d'où la partie 3). \square

Notons \mathcal{H}_n le sous-anneau de $\mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_{n-1}]$, bigradué par le couple (degré, poids), formé des invariants différentiels d'ordre $< n$ et \mathcal{H} la réunion des \mathcal{H}_n . Nous appellerons \mathcal{H} l'*anneau bigradué d'Halphen*.

Les bidegrés de U , V , Δ dans \mathcal{H} sont respectivement :

$$(1, 2), \quad (3, 9), \quad (8, 24).$$

La proposition 2.2 montre que l'anneau $A^G(S_n^{00})$ des fonctions régulières G -invariantes sur S_n^{00} est la partie homogène de bidegré $(0, 0)$ de $\mathcal{H}_n[U^{-1}V^{-1}]$.

Explicitons maintenant le théorème 1.1 dans ces notations.

Soit d la dérivation de l'anneau $\mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_i, \dots]$ définie par :

$$dx = 1 \quad \text{et} \quad da_i = (i + 1)a_{i+1}.$$

LEMME 2.1.

- 1) L'application d'envoie $(\mathcal{H}_n[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ dans $(\mathcal{H}_{n+1}[U^{-1}V^{-1}])_{01}$.
- 2) Soit C le modèle lisse d'une courbe à branches lisses de \mathbb{P} . On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{H}_n[U^{-1}V^{-1}])_{00} & \xrightarrow{d} & (\mathcal{H}_{n+1}[U^{-1}V^{-1}])_{01} \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(C) & \longrightarrow & \Omega_{K(C)/\mathbb{C}}^1 \end{array}$$

où les colonnes sont les restrictions à C (ici $K(C)$ désigne le corps des fractions rationnelles sur C).

Démonstration.

1) Cette partie résulte d'une remarque d'Halphen : si A et B sont deux invariants différentiels de même bidegré (d, p) et d'ordre $< n$, $AdB - BdA$ est un invariant différentiel d'ordre $< n + 1$, définissant l'hypersurface de S_{n+1}^0 formée de points épais tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que le développement de $A + \lambda B$ (qui existe à l'ordre 1 en la variable x) soit nul.

2) La deuxième assertion est claire, une fois remarqué que la restriction à C d'un élément de $(\mathcal{H}_k[U^{-1}V^{-1}])_{0\ell}$ est naturellement une section de $\omega^{\otimes \ell}$, ce qui est une version de [8, III, th. I-IV]. \square

PROPOSITION 2.3. — L'anneau $A(G)$ des fonctions régulières sur G est isomorphe à $A(S_7^{00})[\sqrt[3]{V}]$.

Démonstration. — On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} A(S_7^{00}) & \longrightarrow & A(S_8^{00}) & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ A(G) & \longrightarrow & A(S'_8) & \longrightarrow & A(S'_8)/(i_8) \end{array}$$

et on a vu que i_8^3 appartient à $A(S_8^{00})$. Il s'identifie donc à $\lambda\Delta^3/V^8$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$ puisque i_8 et Δ ont les mêmes zéros et que Δ^3/V^8 est une fonction G -invariante sur S_8^{00} .

COROLLAIRE 2.2. — Dans $\mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_i, \dots][U^{-1}V^{-1}][v]$, où v est défini par $v^3 = VU^{-3}$ et muni du bidegré $(0, 1)$, posons :

$$i_8 = \frac{\Delta}{U^8 v^8}, \quad i_{k+1} = \frac{di_k}{v}.$$

Alors $(\mathcal{H}_k[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ est le sous-anneau de l'anneau $\mathbb{C}[i_8, \dots, i_h, \dots]$ formé des éléments invariants par l'automorphisme :

$$v \longmapsto wv \quad (w^3 = 1).$$

Ce corollaire montre en particulier que le corps des fractions rationnelles G -invariantes sur S_n est une extension transcendante pure de \mathbb{C} (en appliquant un résultat de Fischer, cf. [5]).

COROLLAIRE 2.3. — Pour $n = \frac{1}{2}d(d+3)$, le quotient sous PGL_3 de la « courbe universelle de degré d » est rationnel.

Pour $d = 4$, c'est le schéma de module \mathcal{M}_3^1 des courbes de genre 3 avec point marqué, cf. [10]; sa rationalité est démontrée, par une autre méthode, dans [9].

Dans la suite de ce travail, on cherche un quotient projectif d'un ouvert G -stable de S_n . Remarquons qu'on ne peut pas appliquer la « Geometric invariant theory » de [11] :

PROPOSITION 2.4. — Pour tout \mathcal{O}_{S_n} -module ample \mathcal{L} , l'ensemble des points semi-stables relativement à \mathcal{L} est vide.

Démonstration. — En effet, si C est le modèle lisse d'une courbe à branches lisses de \mathbb{P} , le morphisme de C dans \mathbb{P} se relève naturellement à S_n^0 et la restriction à C de $\mathcal{O}_{S_n^0}(a, b)$ est $\omega_C^{\otimes a}(b)$. Si C est une droite de \mathbb{P} , c'est donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(b-2a)$. En particulier, si I est un invariant de bidegré (d, p) , il définit une section de $\mathcal{O}_{S_n^0}(d+p, 3d)$ dont le nombre d'intersection avec ℓ (droite) est $d-2p < 0$ (en fait on a toujours $p \geq 2d$). *A fortiori*, il n'existe pas de section invariante non nulle d'un faisceau ample sur S_n (car celle-ci devrait couper positivement le relèvement naturel de L). \square

REMARQUE. — Le même argument montre que le complémentaire de l'ouvert affine S_7^{00} dans S_7 n'est pas le support d'un diviseur ample.

3. Quotient de S_8 sous G

3.1 Description algébrique de \mathcal{H}_8 .

PROPOSITION 3.1. — On a

$$\mathcal{H}_8 = \mathbb{C}[U, V, \Delta, H]/(2^8\Delta^3 - 3^3V^8 - U^4H),$$

le bidegré de H étant $(20, 64)$.

Démonstration. — Remarquons d'abord que \mathcal{H}_8 est factoriel et que :

$$(\mathcal{H}_8[U^{-1}V^{-1}])_{00} = \mathbb{C}\left[\frac{\Delta^3}{V^8}\right].$$

Cherchons les éléments premiers de \mathcal{H}_8 : ce sont U , V , Δ et $a\Delta^3 + bV^8$ débarrassés éventuellement d'un facteur puissance de U (en effet, quitte à multiplier par un monôme $U^aV^b\Delta^c$, on peut ramener tout élément premier bihomogène en bidegré $(0, 0)$ dans $\mathcal{H}_8[U^{-1}V^{-1}]$, et les éléments premiers de $\mathbb{C}[\Delta^3/V^8]$ sont linéaires).

Il existe au plus une valeur de (a, b) (dans \mathbb{P}_1 !) telle que U divise $a\Delta^3 + bV^8$. Sur la courbe particulière $y = x^3$, on a :

$$U = 3x, \quad V = 2 \quad \text{et} \quad \Delta = 3;$$

donc il s'agit nécessairement de la combinaison $2^8\Delta^3 - 3^3V^8$. Dans la carte locale 1.3, si, dans V et Δ , on suppose $a_2 = 0$, ces deux déterminants se réduisent à leurs diagonales $2a_3^3$ et $3a_3^8$ et la combinaison $2^8\Delta^3 - 3^3V^8$ est nulle. Elle est donc divisible par le facteur a_2 qui est l'invariant U . Pour chercher l'exposant de U dans $2^8\Delta^3 - 3^3V^8$, montrons le lemme suivant :

LEMME 3.1. — *Tout point de S_n^0 , tel que $V \neq 0$ et $U \neq 0$ (resp. $U = 0$), admet trois (resp. un) représentants modulo G de la forme :*

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + a_7x^7 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

dans laquelle a_i est déterminé à multiplication près par $\lambda\mu^i$, avec (λ, μ) appartenant à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$.

Démonstration. — Il est clair qu'il suffit de démontrer ce lemme pour $n = 7$, et, pour cela de prouver que par un point de S_7^0 tel que $V \neq 0$ et $U \neq 0$ (resp. $U = 0$), passent trois (resp. une) cubiques à rebroussement. En effet, si une telle cubique est trouvée on peut alors choisir les axes de coordonnées tels que le point $(0, 1, 0)$ soit le rebroussement, la droite $Z = 0$ soit la tangente de rebroussement, le point donné soit $(0, 0, 1)$ et la

tangente en ce point soit $Y = 0$. L'assertion résulte du théorème 1 sous l'hypothèse $U \neq 0$. En effet, il existe trois éléments de G transformant le point donné en le point $(0, 0)$ épaissi six fois sur la cubique $y = x^2 + x^3$.

Indiquons une méthode unifiée pour traiter les deux cas du lemme.

Soit \tilde{P} la surface obtenue par sept éclatements consécutifs correspondant au point donné de S_7 . C'est une surface de Del Pezzo singulière de degré 2 (les sept points sont en l'occurrence en position «presque générale» au sens de [4]), donc un revêtement double de \mathbb{P}_2 ramifié le long d'une quartique. De plus, cette surface admet un point double de type A_6 (resp. E_7) correspondant :

- dans le premier cas ($V \neq 0, U \neq 0$), à la contraction de la partie (-2) du diviseur image réciproque du point $(0, 0)$:

$$(A_6) \quad \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ (-2) & & & & (-2) & (-2) & (-1) \end{array}$$

- dans le deuxième cas ($V \neq 0, U = 0$), à la contraction de la partie (-2) du diviseur image réciproque de la tangente d'inflexion L , dont on a notée ℓ la transformée propre :

$$(E_7) \quad \begin{array}{ccccccc} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ (-2) & & & & (-2) & (-2) & (-1) \\ & & & \downarrow & & & \end{array}$$

Il est bien connu qu'alors la quartique K de \mathbb{P}_2 , lieu de ramification du morphisme $\tilde{P} \rightarrow \mathbb{P}_2$, est :

- dans le premier cas, irréductible et munie d'un point double uni-branché, d'invariant $\delta = 3$;
- dans le deuxième cas, isomorphe à $x(x^2 - y^3)$, cf. [1].

D'autre part, les cubiques à rebroussement passant par m correspondent aux images réciproques dans \tilde{P} des tangentes d'inflexion de K . Il y en a trois dans le premier cas, respectivement une dans le deuxième cas, comme on le déduit des formules de Plücker.

Dans le premier cas, on peut voir la quartique (qui est rationnelle) comme projection de la quartique normale de \mathbb{P}_4 dans \mathbb{P}_2 par une droite contenue dans un plan osculateur. Son équation peut s'écrire

$$(x^2 + y)^2 + xy^3 = 0$$

dans des coordonnées convenables. Le groupe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ agit par :

$$x \mapsto \omega x, \quad y \mapsto \omega^2 y \quad (\omega^3 = 1).$$

Une représentation paramétrique en est :

$$x = -t^2, \quad y = 1, \quad z = t - t^4 \quad (\text{point singulier } t = \infty).$$

La condition d'alignement de trois points, représentés par l'équation

$$a_0 t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3 = 0,$$

est :

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \end{vmatrix} = -a_3^2 + a_1 a_2 - a_0 a_3.$$

Les points d'inflexion, représentés par

$$(a_0 = 1, a_1 = -3t, a_2 = 3t^2, a_3 = -t^3)$$

vérifient $t^3 + 8 = 0$ i.e. $t = -2\omega$ ($\omega^3 = 1$). \square

On calcule les valeurs de U , V , Δ pour $y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_7 x^7$:

$$U = a_2, \quad V = 2a_3^3, \quad \Delta = 3a_3^8 + 2a_2^4 a_3^3 a_7.$$

Il en résulte que

$$2^8 \Delta^3 - 3^3 V^8 = 2^9 a_2^4 a_3^9 a_7 (27 a_3^{10} + 18 a_2^4 a_3^5 a_7 + 4 a_2^8 a_7^2)$$

est divisible (exactement) par a_2^4 . La même relation a lieu dans \mathcal{H}_8 d'après le lemme suivant :

LEMME 3.2. — *Soient G un groupe linéaire, X un schéma lisse muni d'une action de G , Y un sous-schéma lisse fermé de X . Pour que $Y \times G \rightarrow X$ soit plat au point $(y, 1)$ il faut et il suffit que la codimension dans G de $\{g \in G \mid gy \in Y\}$ soit égale à*

$$\dim Y + \dim G - \dim X = \dim G - \text{codim}(Y/X).$$

Ceci s'applique ici : $X = \mathbb{C}[a_2, \dots, a_7][V^{-1}]$, G est le sous-groupe

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$$

de PGL_3 , Y est défini par $a_4 = a_5 = a_6 = 0$ et $a_3 \neq 0$. \square

3.2. — Explicitons maintenant différemment le morphisme de S_8^{00} dans \mathbb{A}_1 déduit de l'inclusion :

$$\mathbb{C}\left[\frac{\Delta^3}{V^8}\right] \hookrightarrow \mathbb{C}[x, a_0, \dots, a_7][U^{-1}V^{-1}].$$

Avec les notations du théorème 1.1, à un point m de S_8^{00} de projection m' dans S_7^{00} , est associé un quotient de rang 1 de la fibre de E_7 en m' , donc par l'intermédiaire du revêtement

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow S_7^{00} \\ g &\longmapsto g \cdot m', \end{aligned}$$

une droite de l'algèbre de Lie $\mathrm{SL}(V^\vee)$.

PROPOSITION 3.2. — *Il existe un élément de cette droite dont le polynôme caractéristique est*

$$X^3 - 28\Delta X + 10V^4$$

(évalué en m supposé dans la carte de 1.3).

Démonstration. — Notons A un élément non nul quelconque de la droite ci-dessus et montrons d'abord que m est sur le germe de courbe paramétrée

$$t \longmapsto e^{At}m_0$$

où m_0 est la projection de m dans \mathbb{P} (et où t est voisin de 0). Pour cela remarquons que l'orbite de m sous G est une hypersurface dont l'équation (dans la carte locale de 1.3) peut être interprétée (au voisinage de m) comme une équation différentielle d'ordre 7 en y vue comme fonction de x , dont les courbes intégrales sont G -invariantes. On écrit le système différentiel d'ordre 1 associé à cette équation d'ordre 7 :

$$\begin{cases} \frac{da_0}{dx} = a_1, \\ \dots \\ \frac{da_5}{dx} = 6a_6, \\ \frac{da_6}{dx} = f(x, a_0, \dots, a_6). \end{cases}$$

Écrivons le champ de vecteurs correspondant,

$$(1, a_1, \dots, a_6, f(x, a_0, \dots, a_6))$$

dans un petit ouvert de la carte locale de 1.3 de S_7^0 . Il est (à homothétie près) G -invariant en «germe», donc multiple d'une fonction par un champ G -invariant correspondant à un élément de $\mathrm{SL}(V)$ qui, par construction, est sur la droite définie dans l'énoncé. L'assertion en résulte aussitôt.

Soient e_0, e_1, e_2 les valeurs propres de A ; pour $\lambda = (e_0 - e_1)/(e_0 - e_2)$, la courbe $y = x^\lambda$ est une solution de l'équation différentielle précédente. On calcule les valeurs de V et de Δ sur cette courbe :

$$V = \left(\frac{\lambda(\lambda - 1)}{2} \right)^3 \frac{(\lambda - 2)(\lambda + 1)(2\lambda - 1)}{2 \times 3^3 \times 5} x^{3\lambda - 9},$$

$$\Delta = \frac{(\lambda(\lambda - 1))^8}{2^{12} \times 3^7 \times 5^2 \times 7} [(\lambda - 2)(\lambda + 1)(2\lambda - 1)]^2 (1 - \lambda + \lambda^2) x^{8\lambda - 24}.$$

On peut écrire le polynôme caractéristique de A sous la forme :

$$4X^3 - g_2X - g_3.$$

Vu comme une quartique avec une racine à l'infini, ses invariants sont

$$G_2 = g_2 = \frac{1}{12} (1 - \lambda + \lambda^2),$$

$$G_3 = g_3 = \frac{1}{2^4 3^3} (\lambda - 2)(\lambda + 1)(2\lambda - 1).$$

On vérifie que l'on a :

$$\frac{(40V^4/g_3)^2}{(112\Delta/g_2)^3} = 1.$$

La proposition en résulte. \square

3.3. Quotient de S_8 sous G .

Pour « compactifier » le morphisme de 3.2, considérons le sous-anneau \mathbb{Z} -gradué de \mathcal{H}_8 formé des éléments de bidegré $(d, 3d)$ ($d \in \mathbb{Z}$), i.e. $\mathbb{C}[V, \Delta]$ avec $\deg(V) = 3$ et $\deg(\Delta) = 8$. Son spectre homogène est \mathbb{P}_1 . Les fonctions V, Δ sont des sections de $\mathcal{O}_{S_n^0}(12, 9)$ (resp. de $\mathcal{O}_{S_n^0}(32, 24)$). L'ensemble de leurs zéros communs est un fermé G -invariant de S_n^0 de codimension 2.

LEMME 3.3. — *Dans la carte locale de 1.3, ce fermé a deux composantes irréductibles définies par les mineurs maximaux de matrices wronskiennes :*

$$(a_2, a_3) \quad \text{et} \quad W_{27} = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — Soit en effet (x, a_0, \dots, a_7) un point de la carte locale annulant V et Δ . S'il ne vérifie pas $a_2 = 0$, il existe une conique contenant l'image de ce point dans S_6 . Si on écrit cette conique sous la forme $y = x^2$ (après changement de la carte locale), on obtient un point tel que $a_3 = a_4 = a_5 = 0$. Alors $\Delta = 0$ équivaut à $a_6 = 0$, ce qui signifie que la conique contient la projection du point dans S_7 . \square

Soit S_8^{000} l'ouvert G -stable de S_8^0 complémentaire de ce fermé (il contient S_8^{00}). Les sections V et Δ définissent un morphisme de S_8^{000} dans \mathbb{P}_1 qui prolonge le morphisme précédent de S_8^{00} dans \mathbb{A}_1 et qui contracte les G -orbites. Le seul point de \mathbb{P}_1 dont la fibre contient plus d'une orbite est ($U^4H = 0$) avec trois orbites :

- point courant d'une cubique cuspidale,
- point d'inflexion non sur une cubique cuspidale,
- point d'inflexion d'une cubique cuspidale.

On remarque que la troisième orbite est fermée et contenue dans l'adhérence des deux autres. De plus, \mathbb{P}_1 est un bon quotient de S_8^{000} sous G d'après le lemme suivant :

LEMME 3.4. — *Soient G un groupe linéaire sur \mathbb{C} , $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de variétés algébriques normales sur \mathbb{C} , σ une action de G sur X telle que f contracte les fibres de σ . Supposons que f induise une bijection de l'ensemble des orbites fermées de X sous G avec Y , et que toutes les composantes irréductibles des fibres de f aient même dimension. Alors Y est un bon quotient de X sous G .*

Cf. [11, prop. 0.2], dont la démonstration s'adapte ici. \square

4. Étude birationnelle du quotient de S_9 sous G

4.1. Correspondance entre S_9 et la cubique universelle.

La correspondance d'incidence entre S_9 et la « cubique universelle » de \mathbb{P} (graphe de la correspondance d'incidence entre \mathbb{P} et $\mathbb{P}(\text{Sym}_3 V)$) est birationnelle, plus précisément tout point de S_9^0 tel que $UV\Delta \neq 0$ est sur une unique branche lisse de cubique. Cela résulte du fait que le coefficient de a_9 dans le wronskien W_3 est $-U\Delta$.

4.2. Passage au quotient sous G de cette correspondance.

Tout d'abord, avec les notations du théorème 1.1, on a :

$$(\mathcal{H}_9[U^{-1}V^{-1}])_{00} = \mathbb{C}[i_8^3, i_9]$$

avec

$$i_8^3 = \frac{\Delta^3}{V^8}, \quad i_9 = \frac{U^4 T}{3V^4} \quad \text{et} \quad T = \frac{3V d\Delta - 8\Delta dV}{U^3}$$

(T est un invariant différentiel d'ordre 8 et de bidegré (8, 28)). Notons

l'expression de T donnée par Halphen sous forme de déterminant :

$$T = \begin{vmatrix} 3a_3 & 2a_2 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 4a_4 & 3a_3 & a_3 & a_2 & 2a_2^2 & 0 \\ 5a_5 & 4a_4 & a_4 & 2a_3 & 5a_2a_3 & a_2^2 \\ 6a_6 & 5a_5 & a_5 & 3a_4 & 6a_2a_4 + 3a_3^2 & 3a_2a_3 \\ 7a_7 & 6a_6 & a_6 & 5a_5 & 7a_2a_5 + 7a_3a_4 & 4a_2a_4 + 3a_3^2 \\ 8a_8 & 7a_7 & a_7 & 5a_6 & 8a_2a_6 + 8a_3a_5 + 4a_4^2 & 5a_2a_5 + 5a_3a_4 \end{vmatrix}.$$

Soit C une cubique lisse de \mathbb{P} représentée paramétriquement sous la forme standard de Weierstrass :

$$u \longmapsto (\mathfrak{p}u, \mathfrak{p}'u, 1),$$

avec $u \in \mathbb{C}/\Omega$ et où Ω est un réseau de \mathbb{C} .

LEMME 4.1. — *L'évaluation sur C de V/U^3 (resp. Δ/U^8) est la section $\sigma 2w/\sigma^4 w \, du^{\otimes 3}$ de $\omega_C^{\otimes 3}$ (resp. $\sigma 3w/\sigma^9 w \, du^{\otimes 8}$) de $\omega_C^{\otimes 8}$ (où l'on note w la variable « jacobienne » $3u$).*

Démonstration. — On remarque que les points de C tels que $V = 0$ (resp. $\Delta = 0$) sont les points d'ordre 6 (resp. d'ordre 9) pour la loi du groupe de C (après exclusion des points d'inflexion qui sont les zéros de U). Le reste suit. \square

On en déduit que la restriction de i_3^3 à C est, d'après les formules classiques,

$$X = \frac{(\mathfrak{p}w - \mathfrak{p}^2w)^3}{\mathfrak{p}'^2 2w}.$$

On a d'autre part :

$$\begin{aligned} \frac{U^4 T}{3V^4} &= \frac{U}{3V^4} (3V \, d\Delta - 8\Delta \, dV), \\ \frac{U^4 T}{3V^4} &= \frac{U\Delta}{3V^3} \left(\frac{3 \, d\Delta}{\Delta} - \frac{8 \, dV}{V} \right), \\ \frac{U^4 T}{3V^4} &= \frac{\sigma 3w \sigma^3 w}{\sigma^3 2w} (9\zeta 3w - 16\zeta 2w + 5\zeta w). \end{aligned}$$

On calcule cette fonction en l'évaluant en $w = \frac{1}{4}\omega$ où ω est une période non divisible par 2. On trouve -1 , d'où :

$$\frac{U^4 T}{3V^4} = 8Y - 1 \quad \text{avec } Y = \frac{\mathfrak{p}'^2 w}{\mathfrak{p}' w} \text{ sur } C.$$

Arrivé à ce point, il n'y a plus de difficultés pour exprimer les « fonctions elliptiques homogènes de degré 0 » fondamentales g_2/\mathfrak{p}^2u et g_3/\mathfrak{p}^3u en fonction de X, Y (cf. [7]). En particulier, on a :

$$\begin{aligned} j &= \frac{1728(g_2/\mathfrak{p}^2u)^3}{(g_2/\mathfrak{p}^2u)^3 - 27(g_3/\mathfrak{p}^3u)^2} \\ &= \frac{-1}{27} \frac{(16X^2 + 8X(Y+1)(Y-2) + (Y+1)^4)^3}{X^3[(8Y-1)^3 + (32X + 8Y^2 - 20Y - 1)^2]}. \end{aligned}$$

5. Étude birégulière du quotient de S_9° sous G

On ignore si \mathcal{H}_n est une \mathbb{C} -algèbre de type fini pour $n \geq 10$.

Grâce à des relations de divisibilité remarquées par Halphen pour \mathcal{H}_9 , on va montrer que \mathcal{H}_9 est de type fini.

PROPOSITION 5.1.

a) Avec $G = (U^4T^2 + 9H)/V^2$, on a :

$$\mathcal{H}_9[U^{-1}] = \mathbb{C}[U, U^{-1}, V, \Delta, T, G]/(GU^4V^2 - U^8T^2 - 9(2^8\Delta^3 - 3^3V^8)),$$

b) Avec $T_1 = (V^4T - H/6)/U$, on a :

$$\mathcal{H}_9[V^{-1}] = \mathbb{C}[U, V, V^{-1}, \Delta, H, T_1]/(HU^4 - 2^8\Delta^3 - 3^3V^8).$$

La démonstration se décompose en deux parties.

Première partie.

Montrons d'abord que les fractions

$$T_1 = \frac{V^4T - H/6}{U} \quad \text{et} \quad G = \frac{U^4T^2 + 9H}{V^2}$$

appartiennent à \mathcal{H}_9 . En le germe

$$y = a_2x^2 + a_3x^3 + a_7x^7 + a_8x^8 \quad (x = 0)$$

on calcule T :

$$T = 192a_3^6(3a_3a_7 + 2a_2a_8).$$

Par suite,

$$UT_1 = \frac{2^9}{3} a_2a_3^9(9a_3^2a_8 - 9a_2^3a_3^5a_7^2 - 4a_2^7a_7^3)$$

est divisible par a_2 dans $\mathbb{C}[a_2, a_7, a_8]$. D'après le lemme 3.2, il en est de même dans $\mathbb{C}[a_2, \dots, a_7, a_8]$, d'où l'assertion relative à T_1 . Quant à G , on note le lemme suivant.

LEMME 5.1. — *Toute orbite dans $S_n^0 - (U = 0)$ contient un germe en $(0, 0)$ du type*

$$y = a_2x^2 + a_5x^5 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$$

(Il s'agit de voir que tout point de S_5^0 tel que $U \neq 0$ est sur une conique, puis de mettre cette conique pointée sous la forme $y = x^2$ au voisinage de $(0, 0)$.) On remarquera aussi que le stabilisateur dans GL_3 de la conique pointée $(y = x^2, (0, 0))$ est formé des matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\mu\lambda & \mu^2 & \lambda^2 \end{pmatrix} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$$

(groupe affine de la droite \mathbb{C} , produit semi-direct de \mathbb{C} par l'action de \mathbb{C}^* par homothéties).

Pour le germe $y = a_2x^2 + a_5x^5 + \dots + a_{n-1}x^{n-1}$, on vérifie aisément les formules :

$$\begin{aligned} U &= a_2, \quad V = a_2^2a_5, \quad \Delta = a_2^6(a_5a_7 - a_6^2), \\ T &= 3a_2^4(25a_5^4 - 8a_2(2a_3^6 + a_5^2a_8 - 3a_5a_6a_7)), \\ H &= 2^8a_2^{14}(a_5a_7 - a_6^2)^3 - 3^3a_2^{12}a_5^8, \\ G &= \frac{U^4T^2 + 9H}{V^2} \\ &= 18a_2^8 \left(299a_5^6 - 200a_2^4a_5^4a_8 - 600a_2a_5^3a_6a_7 - 400a_2a_5^2a_6^3 \right. \\ &\quad \left. + 32(a_2a_5a_8)^2 + 128a_2^2a_6^3a_8 - 192a_2^2a_5a_6a_7a_8 \right. \\ &\quad \left. - 96(a_2a_6a_7)^2 + 128a_2a_5a_7^3 \right). \end{aligned}$$

La relation « V^2 divise $U^4T^2 + 9H$ » est donc vraie dans l'anneau $\mathbb{C}[a_2, a_5, a_6, a_7, a_8]$ (après la spécialisation $a_3 = 0 = a_4$). Par suite, elle est vraie en général d'après le lemme 3.2 appliqué à $X = \text{Spec } \mathbb{C}[a_2, \dots, a_7, a_8]$, $Y = \mathbb{C}[a_2, a_5, a_6, a_7, a_8]$, G groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix},$$

prouvant en l'occurrence que le morphisme $Y \times G \rightarrow X$, $(y, g) \mapsto gy$ est fidèlement plat.

Deuxième partie.

L'assertion b) est facile : le coefficient de a_8 dans T_1 est $2^9 3V^6$; donc on peut effectuer dans $\mathbb{C}[a_2, \dots, a_7, V^{-1}][a_8]$ la division euclidienne par T_1 . Si $I \in \mathcal{H}_9[V^{-1}]$, on écrit ainsi $I = T_1 J + K$ où $K \in \mathcal{H}_8[V^{-1}]$, $J \in \mathcal{H}_9[V^{-1}]$ et $\deg_{a_8}(J) = \deg_{a_8}(I) - 1$. Par récurrence sur $\deg_{a_8}(I)$ et identification de \mathcal{H}_8 , on en déduit le résultat.

L'assertion a) demande un peu plus de soin. On munit $\mathbb{C}(a_2, \dots, a_8)$ de la valuation V -adique θ_V (exposant de V). Comme on sait, le sous-anneau $(\mathcal{H}_9[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ est égal à $\mathbb{C}[i_8^3, i_9]$ où $i_8^3 = \Delta^3/V^8$ et $i_9 = (U^4 T)/3V^4$. Montrons d'abord que le gradué associé à cet anneau muni de θ_V est $\mathbb{C}[a, b]$ où a (resp. b) est la classe en degré -4 (resp. -6) de $U^4 T/V^4 = A$ (resp. $U^4 G/V^6 = B$). Pour cela on remarque que T est linéaire en a_8 , de coefficient dominant $-24U^5 V^2$, de sorte que la classe de $(U^4 T)/V^4$ dans le gradué associé à $\mathbb{C}[a_2, \dots, a_8](U^{-1}V^{-1})$ pour θ_V est indépendante de a_8 , tandis que G est congru modulo V à un polynôme de degré 1 en a_8 de coefficient dominant non divisible par V , donc a et b sont algébriquement indépendants dans $\text{gr}_{\theta_V}(\mathbb{C}[a_2, \dots, a_8, U^{-1}V^{-1}])$. D'autre part les relations $B = 9i_9^2 + 2^8 \times 9i_8^3 - 9 \times 3^3$, $A = 3i_9$, montrent immédiatement que $(\mathcal{H}_9[U^{-1}V^{-1}])_{00} = \mathbb{C}[A, B]$ ce qui entraîne notre assertion.

Déduisons-en a). Soit I un élément de \mathcal{H}_9 . Comme les bidegrés $(1, 2)$ de U , $(3, 9)$ de V et $(8, 24)$ de Δ engendrent \mathbb{Z}^2 , il existe $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $U^a V^b \Delta^c I \in (\mathcal{H}_9[U^{-1}V^{-1}])_{00}$ i.e. $U^a V^b \Delta^c I = P(A, B)$. On alors $\theta_V(P(A, B)) = -\sup(4\alpha + 6\beta)$, (α, β) parcourant l'ensemble des bidegrés des éléments de P , d'où $-\sup(4\alpha + 6\beta) \geq b$ et, par suite, $U^a \Delta^c I = Q(T, U, G, V)$ où Q est un polynôme. On peut prendre $c \in \{0, 1, 2\}$ et remplacer I par I^n : cela montre que I appartient à l'anneau de l'énoncé, car celui-ci est intégralement clos et noethérien donc complètement intégralement clos. \square

COROLLAIRE 5.1. — *La \mathbb{C} -algèbre \mathcal{H}_9 est de type fini.*

Démonstration. — Soit A la sous-algèbre de \mathcal{H}_9 engendré par

$$(U, V, \Delta, T, T_1, G).$$

La proposition montre que $A[U^{-1}] = \mathcal{H}_9[U^{-1}]$ et que $A[V^{-1}] = \mathcal{H}_9[V^{-1}]$. On a donc, pour tout $I \in \mathcal{H}_9$, $(U, V)^n I \in A$ pour $n \gg 0$; donc I appartient à la \mathbb{C} -algèbre de type fini \bar{A} , clôture intégrale de A (en effet (U, V) est une suite \bar{A} -régulière (au sens gradué)). Donc $\mathcal{H}_9 = \bar{A}$. \square

Pour construire S_9^0/G , l'idée naturelle est de définir un «spectre bihomogène» de \mathcal{H}_9 (puisque les éléments de \mathcal{H}_9 sont les sections G -invariantes des modules inversibles sur S_9^0) ; mais il n'est pas clair qu'on soit dans le

domaine de validité des théories existantes [11]; on va donc passer par l'intermédiaire d'un anneau gradué de type \mathbb{Z} : le sous-anneau de \mathcal{H}_9 engendré par les éléments suivants, tous de bidegré $(5k, 16k)$ avec $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} a = H \quad (k = 4), \quad b = GU \quad (k = 3), \quad c = TU^2 \quad (k = 2), \\ d = TUV^2 \quad (k = 3), \quad e = TV^2 \quad (k = 4), \quad f = T_1V^2 \quad (k = 5). \end{aligned}$$

Ces éléments annulent $\Lambda^2 M$, où

$$M = \begin{pmatrix} b & c & d & e - \frac{1}{6}a \\ c^2 + 9a & d & e & f \end{pmatrix}.$$

En effet, après spécialisation dans \mathcal{H}_9 , la seconde ligne de M est le produit de la première ligne et de V^2/U .

LEMME 5.2. — *Dans l'anneau de polynômes (non gradué) $\mathbb{C}[a, b, c, d, e, f]$, les coefficients de $\Lambda^2 M$ engendrent un idéal de hauteur 3. L'anneau quotient par cet idéal est de Cohen-Macaulay et régulier hors du fermé (de hauteur 2) défini par l'image de l'idéal (a, c, d, e, f) . En particulier il est intégralement clos.*

Démonstration. — Posons $A = \mathbb{C}[a, c, d, e, f]/(I_{M_1})$ où I_{M_1} est l'idéal des coefficients de $\Lambda^2 M_1$,

$$M_1 = \begin{pmatrix} c & d & e - \frac{1}{6}a \\ d & e & f \end{pmatrix},$$

$B = \mathbb{C}[a, b, c, d, e, f]/(I_M)$ où I_M l'idéal des coefficients de $\Lambda^2 M$ (i.e. l'anneau de l'énoncé).

Il est connu que A est le cône projetant d'une surface cubique réglée arithmétiquement normale de \mathbb{P}_4 (i.e. $\text{Proj}_{\mathbb{P}^1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$) : il est donc de Cohen-Macaulay, régulier hors du sommet $a = c = d = e = f = 0$. Le complémentaire du sommet dans $\text{Spec}(A)$ est réunion de deux ouverts affines $\text{Spec}(A_i)$, $i = 1, 2$, où :

- $A_1 = \mathbb{C}[a, c, \pi_1]$ (l'homomorphisme de A dans A_1 étant $d \mapsto \pi_1 c$, $e \mapsto \pi_1^2 c$, $f \mapsto \pi_1(\pi_1^2 c - \frac{1}{6}a)$);
- $A_2 = \mathbb{C}[a, f, \pi_2]$ (l'homomorphisme de A dans A_2 étant : $e \mapsto \frac{1}{6}a + \pi_2 f$, $d \mapsto \pi_2 e$, $c \mapsto \pi_2 d$).

Donc le complémentaire dans $\text{Spec}(B)$ du fermé $a = c = d = e = f = 0$ (définissant une droite) est réunion des deux ouverts $\text{Spec}(B_i)$, $i = 1, 2$ où $B_i = B \otimes_A A_i$. Il est clair que $B_2 = A_2[b]/(b - \pi_2(c^2 + 9a)) \cong A$ (en toute rigueur, c désigne ici l'élément $\pi_2^2(\frac{1}{6}a + \pi_2 f)$). De même $B_1 = A_1[b]/(\pi_1 b - (c^2 + 9a))$, donc $\text{Spec}(B_1)$ est un ouvert de l'éclatement dans $\text{Spec}(A_1)$ de l'idéal $(b, c^2 + 9a)$ qui définit une courbe lisse. Ainsi B_1 et B_2 sont réguliers de dimension 3; le lemme en résulte. \square

COROLLAIRE 5.2. — *L'homomorphisme de B dans \mathcal{H}_9 par la spécialisation $a \mapsto H, \dots, f \mapsto T_1 V^2$ ci-dessus est injectif.*

En effet le corps de fractions de l'image de cet homomorphisme contient trois éléments algébriquement indépendants sur \mathbb{C} : V^2/U , H , TU^2 (car V^2/U appartient à $\mathbb{C}(a_2, \dots, a_6)$, $H \in \mathbb{C}(a_2, \dots, a_7)$ et dépend effectivement de, a_7 , TU^2 appartient à $\mathbb{C}(a_2, \dots, a_8)$ et dépend effectivement de a_8). C'est donc nécessairement le corps de fractions de B , puisque $\dim B = 3$. \square

Posons $S = \text{Proj } B$; c'est une surface normale.

LEMME 5.3. — *La surface S a quatre points singuliers rationnels :*

O : $a = c = d = e = f = 0$; (point double de type A_2); (coordonnées $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$)

A : $b = d = e = f = c^2 + 9a = 0$; (point double de type A_1); (coordonnées $(-\frac{1}{9}, 0, 1, 0, -\frac{1}{54}, 0)$)

B : $b = c = d = e - \frac{1}{6}a = f = 0$; (point double de type A_3); (coordonnées $(6, 0, 0, 0, 1, 0)$)

C : $a = b = c = d = e = 0$; (point quintuple, isomorphe au sommet du cône projetant de la quintique rationnelle normale); (coordonnées $(0, 0, 0, 0, 0, 1)$).

Ce sont les seuls points singuliers de S .

Démonstration. — La surface S est définie comme le fermé de l'espace projectif « tordu » $\mathbb{P} = \mathbb{P}(4, 3, 2, 3, 4, 5)$, quotient de $\mathbb{C}^6 - (0)$ par l'action de \mathbb{C}^* ,

$$\lambda \longmapsto \text{diag}(\lambda^4, \lambda^3, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5),$$

d'idéal engendré par les coefficients de $\Lambda^2 M$. Les points singuliers autres que O doivent, d'après le lemme précédent, être cherchés parmi les points de \mathbb{P} dont le stabilisateur dans \mathbb{C}^* est non trivial, i.e. on doit avoir :

- soit $b = d = f = 0$ (stabilisateur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$);
- soit $a = c = e = f = 0$ (stabilisateur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$);
- soit $a = b = c = d = e = 0$ (stabilisateur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$).

La première possibilité impose soit $c^2 + 9a = 0$ (le point A), soit $c = e - \frac{1}{6}a = 0$ (le point B). La deuxième possibilité redonne O . La troisième possibilité donne le point C .

Il reste à reconnaître la classe d'isomorphisme de ces points (i.e. de l'anneau local complété de chacun de ces points). Faisons-le par exemple pour C . L'anneau local complet R de \mathbb{P} en ce point peut être identifié à la partie homogène de degré 0 de $\mathbb{C}[[a, b, c, d, e]]$ gradué, de type $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$,

par $\deg(a) = \bar{4}, \dots, \deg(e) = \bar{4}$ où $n \mapsto \bar{n}$ est l'application canonique $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. L'anneau local de S est défini par les équations

$$b - (c^2 + 9a)(e - \frac{1}{6}a), \quad c - d(e - \frac{1}{6}a), \quad d - e(e - \frac{1}{6}a).$$

D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un automorphisme de R conservant a, e et transformant ces équations en b, c, d respectivement; cet automorphisme respecte la graduation.

Par cet isomorphisme, l'anneau local complété de S devient la partie homogène de degré 0 de $\mathbb{C}[[a, b, c, d, e]]/(b, c, d) = \mathbb{C}[[a, e]]$, gradué par $\deg(a) = \deg(e) = 4$ (modulo 5). Cet anneau est aussi le complété du sous-anneau de $\mathbb{C}[a, e]$ formé des monômes de degré multiple de 5, i.e. le cône projetant de la quintique normale.

Les autres cas se traitent de la même façon. \square

THÉORÈME 5.1.

1) Dans la carte locale 1.3 de S_9^0 , la racine de l'idéal (a, \dots, f) est l'intersection $\mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 \cap \mathfrak{p}_3$ des trois idéaux suivants :

- $\mathfrak{p}_1 = (a_2, a_3)$ (définissant le lieu des « méplats »);
- $\mathfrak{p}_2 = (H, T, T_1)$ (définissant, hors des « méplats », le lieu des points situés sur une cubique à rebroussement);
- \mathfrak{p}_3 est (hors des « méplats ») engendré par V et les coefficients de $\Lambda^3 W_{2,7}$ où

$$W_{2,7} = \begin{pmatrix} a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & a_2^2 & 2a_2a_3 & 2a_2a_4 + a_3^2 \end{pmatrix}$$

est la matrice « wronskienne » (1.4) de type $(2, 7)$.

2) Soit S_9' le complémentaire dans S_9^0 du fermé défini par l'idéal (a, \dots, f) . Le morphisme p de S_9' dans S défini par (a, \dots, f) a pour image le complémentaire du point O , il identifie $S - (O)$ à un bon quotient de S_9' par PGL_3 .

3) L'image réciproque p^* induit un isomorphisme

$$\mathrm{Cl}(S) \longrightarrow \mathrm{Pic} S_9^0 = \mathbb{Z}^2$$

et un isomorphisme d'anneaux bigadué de

$$\bigoplus_{\mathcal{L} \in \mathrm{Cl}(S)} H^0(\mathcal{L}) \quad \text{sur} \quad \bigoplus_{(d,p) \in \mathbb{Z}^2} (H^0(\mathcal{O}_{S_9^0}(d, p)))^{\mathrm{PGL}_3} = \mathcal{H}_9$$

(on a noté Cl le groupe des classes de diviseurs de Weil).

Démonstration.

1) Dans la carte locale 1.3, on a $(U, V) = (a_2, a_3^3)$; les fonctions b, \dots, f s'annulent aux points du fermé défini par cet idéal, montrons qu'il en est de même de $a = H$, i.e. que l'ordre en $x = 0$ de la fonction H sur la courbe $y = x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_7x^7$ est > 0 pour $n \geq 4$. Pour la courbe $y = x^n$, on a :

$$U = Cx^{n-2}, \quad V = Dx^{3n-9}, \quad \Delta = Ex^{8n-24}, \quad H = Fx^{20n-64}$$

où C, \dots, F sont des constantes non nulles. On vérifie que sur la courbe $y = x^n + a_{n+1}x^{n+1} + \dots + a_7x^7$, on a :

$$H = Fx^{20n-64}(1 + O(x)),$$

d'où l'assertion.

Étudions l'idéal (a, \dots, f) dans l'anneau $\mathbb{C}[a_2, \dots, a_8, V^{-1}]$. Il est engendré par (H, T_1) où T_1 est de degré 1 en a_8 , de coefficient dominant inversible. D'autre part H est l'équation, dans S_9^0 moins les méplats, du lieu des points sur une cubique à rebroussement. Comme tout point d'une cubique à rebroussement annule T et T_1 , on en déduit que (H, T_1) est un système d'équations du lieu de ces points dans S_9^0 , hors de $V = 0$ (ce lieu ne rencontre d'ailleurs pas $V = 0$ hors des méplats). On vérifie aisément que l'idéal (H, T, T_1) est premier.

Cherchons maintenant les valeurs prises par les fonctions (a, \dots, f) aux points de la carte locale 1.3 : on va utiliser un additif facile au lemme 5.1

LEMME 5.4. — *L'action, sur le germe (en $x = 0$)*

$$y = x^2 + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + O(x^{n+2}),$$

du groupe affine de la droite \mathbb{C} (identifié à un sous-groupe de PGL_3 par

$$(\lambda, \mu) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\mu\lambda & \mu^2 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

est donnée par

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A_n \\ A_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^{n-2} & 0 \\ \lambda^{n-2}\mu & \lambda^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}. \quad \square$$

En supposant alors $U \neq 0$, on en déduit facilement qu'un point de S_9^0 est conjugué, sous PGL_3 , à un germe (en $x = 0$) d'une des formes suivantes :

(i) $y = x^2 + x^5 + a_7x^7 + a_8x^8$, auquel cas $H = 2^8a_7^3 - 3^3$, $T = 75 - 24a_8$, $G = 18(299 - 200a_8 + 32a_8^2 + 128a_7^3)$ ne s'annulent pas simultanément, non plus que (a, \dots, f) .

(ii) $y = x^2 + x^6 + a_8x^8$, auquel cas $(a, b, c, d, e, f) = (0, 128a_8, -24, 0, 0, 0)$ ne s'annule pas.

(iii) $y = x^2 + O(x^7)$, auquel cas (a, \dots, f) s'annule. Ceci se produit si et seulement si le point annule (a_5, a_6) , donc si son conjugué annule les coefficients de $\Lambda^3 W_{2,7}$. Ces évaluations terminent la démonstration de la partie 1) du théorème. Complétons-les en supposant $U = 0$ et $V \neq 0$: le point de S_9^0 est alors conjugué à un germe.

(iv) $y = x^3 + a_7x^7 + a_8x^8$, auquel cas

$$(a, b, c, d, e, f) = 2^8 3^2 (6a_7, 0, 0, 0, a_7, \frac{1}{3}a_8).$$

On peut maintenant démontrer l'assertion 2). Le morphisme p est défini ; il est clair qu'il induit un morphisme de l'ouvert $UV \neq 0$ de S_9^0 dans l'ouvert de S où les deux lignes de

$$M = \begin{pmatrix} b & c & d & e - \frac{1}{6}a \\ c^2 + 9a & d & e & f \end{pmatrix}$$

sont non (identiquement) nulles.

Reprenant les notations du lemme 5.4, cet ouvert est le spectre de la partie homogène de degré 0 de $\mathbb{C}[a, c, \pi, \pi^{-1}]$ où $\deg(a) = 4$, $\deg(c) = 2$, $\deg(\pi) = 1$, i.e. $\mathbb{C}[a/\pi^4, c/\pi^2]$ qui n'est autre que le bon quotient $\mathbb{C}[i_8^3, i_9]$ de S_9^0 sous PGL_3 . L'assertion 2) est donc démontrée au-dessus de cet ouvert, et pour la compléter il suffit (en utilisant le lemme 3.4, S étant normale) de la vérifier «ensemblistement» aux points $U = 0$ ou $V = 0$. Elle résulte alors immédiatement des calculs de (a, \dots, f) aux points du type (ii) ou (iv) (qui donnent des expressions linéaires en (a_7, a_8)). L'unique point non atteint par p est O , du fait qu'en un point du type (ii), c est la constante -24 .

L'assertion 3) est une conséquence directe de [6, th. 2.3]. \square

Conclusion

On va examiner l'argument de Halphen [8] (qui diffère de celui de § 4 de ce texte) pour exprimer l'invariant modulaire de la cubique passant par un point infiniment voisin d'ordre 9 d'un point de \mathbb{P}_2 , en fonction des invariants différentiels de ce point.

On peut réinterpréter comme suit le corollaire 2.1 : pour $n \geq 8$, l'anneau quotient $\mathcal{H}_n/(U-1, V-1)$ s'identifie à l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[i_8, \dots, i_n]$, gradué de type $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ par $\deg(i_k) = k \pmod{3}$, dont on note A_n (resp. Ω_n), la composante de degré 0 (resp. 1). On munit $\mathbb{C}[(i_n)_{n \geq 8}]$ de la dérivation δ définie par $\delta i_n = i_{n+1}$.

Soit I un invariant différentiel d'ordre n et degré 1 en a_n (dans la carte locale 1.3), sa classe dans $\mathbb{C}[i_8, \dots, i_{n+1}]$ s'écrit $Ji_{n+1} + K$ avec J, K appartenant à $\mathbb{C}[i_8, \dots, i_n]$. On peut former la dérivation, restreinte à A_n :

$$D : A_n \longrightarrow \Omega_n \otimes_{A_n} A_n[J^{-3}],$$

$$\begin{cases} Di_k = i_{k+1} & (\text{pour } k < n), \\ Di_n = -J^{-1}K. \end{cases}$$

L'interprétation géométrique du sous-corps $\ker(D)$ du corps de fractions rationnelles de A_n ($K(A_n)$) est : l'ensemble des invariants différentiels absolus (*i.e.* de bidegré $(0,0)$), qui induisent des constantes sur les germes de courbe analytique annulant I .

On s'intéresse au cas $I = W_d$, l'équation différentielle des courbes de degré d , cf. 1.4; on a alors $n = \frac{1}{2}d(d+3)$. Le corps $\ker(D)$ est alors identique au corps des fonctions rationnelles, invariantes sous PGL_3 , sur l'espace (projectif) des courbes de degré d de \mathbb{P}_2 : en effet, c'est le corps des fonctions rationnelles PGL_3 -invariantes sur l'espace des courbes pointées de degré d (celui-ci étant birationnellement équivalent à S_n pour la correspondance d'incidence) qui sont indépendantes du point marqué.

Pour $d = 4$, on trouve donc le corps des fonctions rationnelles sur le schéma de modules \mathcal{M}_3 des courbes de genre 3.

Halphen a traité le cas $d = 3$. Il obtient facilement l'expression suivante de la classe \overline{W}_3 de W_3 dans Ω_9

$$2^4 3^2 \overline{W}_3 = -2i_8 i_{10} - 9 \times 2^6 i_8^3 + \frac{27}{4} (i_9 + 1)(i_9 + 9)$$

de sorte que la dérivation $D : A_9 = \mathbb{C}[i_8^3, i_9] \rightarrow i_8^{-1} \mathbb{C}[i_8^3, i_9] = \Omega_9$ est définie par

$$Di_8^3 = 3i_8^2 i_9, \quad Di_9 = -9 \cdot 2^5 i_8^2 + \frac{27}{8} i_8^{-1} (i_9 + 1)(i_9 + 9).$$

Posons pour simplifier (comme Halphen) $\xi = 3i_9$, $\eta = i_8^3$. On voit que le corps $\ker(D)$ est le sous-corps de $\mathbb{C}(\xi, \eta)$ formé des fractions rationnelles P solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\xi \eta \frac{\partial P}{\partial \eta} - \frac{3}{8} [(\xi + 3)(\xi + 27) - 3 \times 2^8 \eta] \frac{\partial P}{\partial \xi} = 0.$$

Pour résoudre cette équation, Halphen remarque que les numérateurs des solutions sont des polynômes A tels que A divise DA ; les quotients (multiplicateurs) forment un sous-groupe additif des polynômes de degré ≤ 1 . Il trouve en partie par tâtonnement deux polynômes de même multiplicateurs $\frac{9}{2}(\xi + 3)$; l'invariant modulaire est fonction homomographique du quotient.

L'extension de cette méthode au cas de W_4 ne nous a pas (jusqu'ici) paru accessible.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARTH (W.), PETERS (C.) and VAN DE VEN (A.). — *Compact complex surfaces*, Ergebnisse..., série 3, n° 4, Springer, 1984.
- [2] BELGHITI (M.). — *Variété des points infiniment voisins d'ordre n des points du plan*, C.R. Acad. Sci. Paris, t. 314, série I, 1992, p. 541–545.
- [3] COLLEY (S.) and KENNEDY (G.). — Triple and quadruple contact of plane curves, in *Enumerative algebraic geometry*, Kleiman and Thorup eds, p. 31–60, Contemporary mathematics 123, Amer. Math. Soc., 1991.
- [4] DEMAZURE (M.). — *A, B, C, D, E, F, etc. Séminaire sur les singularités de surfaces*, Lectures Notes Math. 777, Springer, Heidelberg, 1980.
- [5] DOLGACHEV (I.). — *Rationality of fields of invariants*, Proc. Sympos. Pure Math., t. 46, 1987, p. 3–16.
- [6] NARASIMHAN (D.). — *Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques*, Inventiones Math., t. 97, 1987, p. 54–94.
- [7] GRUSON (L.). — Un aperçu des travaux mathématiques de G.H. Halphen, in *Complex projective geometry*, Ellingsrud et al. eds, p. 189–198, Lecture notes series 179, Cambridge University Press, 1992.
- [8] HALPHEN (G.H.). — Sur les invariants différentiels, 1878, in *Œuvres complètes de G.H. Halphen*, tome II, Gautiers-Villars, 1918.
- [9] LOOIJENGA (E.). — Cohomology of \mathcal{M}_3 and \mathcal{M}_3^1 , in *Mapping class groups and moduli spaces of Riemann surfaces*, Contemporary Mathematics 150, Amer. Math. Soc., 1993, p. 205–228.
- [10] MUMFORD (D.). — *Curves and their Jacobians*. — Univ. of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [11] MUMFORD (D.) and FOGARTY (F.). — *Geometric invariant theory (second edition)*. — Ergebnisse..., n° 34, Springer, 1982.