BULLETIN DE LA S. M. F.

FABIEN MOREL

Ensembles profinis simpliciaux et interprétation géométrique du foncteur T

Bulletin de la S. M. F., tome 124, n^o 2 (1996), p. 347-373

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_2_347_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 347–373.

ENSEMBLES PROFINIS SIMPLICIAUX ET INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU FONCTEUR T

PAR

FABIEN MOREL (*)

RÉSUMÉ. — Pour chaque nombre premier p, on munit la catégorie des ensembles profinis simpliciaux d'une structure de catégorie de modèles fermée dans laquelle les équivalences faibles sont les applications induisant un isomorphisme en cohomologie modulo p continue. En utilisant la construction du p-complété de Bousfield-Kan d'un espace, on obtient tout d'abord une version «rigide» de la p-complétion profinie de Artin-Mazur et Sullivan et l'on en déduit une interprétation géométrique «concrète» du foncteur T introduit par J. Lannes (qui généralise celle de Dror-Smith).

ABSTRACT. — For each prime p, we define a closed model category structure on the category of simplicial profinite sets in which the weak equivalences are the maps which induce an isomorphism on continuous modulo p cohomology. Using the construction of Bousfield-Kan p-completion of a space, we first obtain a «rigid» version of the profinite p-completion of Artin-Mazur and Sullivan and we deduce then a «concrete» geometric interpretation of Lannes' functor T (generalising that of Dror-Smith).

0. Introduction

Dans [Mo], nous avons remarqué que les résultats de nature homotopique obtenus par J. Lannes [La] s'exprimaient et se démontraient naturellement dans la catégorie des pro-p-espaces utilisée par Artin-Mazur [A-M] et Sullivan [Su]. Comme l'avait fait remarquer le *referee* de [Mo], ces pro-p-espaces souffrent de ne pas être assez «rigides» : ce sont en effet des diagrammes de la catégorie homotopique et non pas des diagrammes de la catégorie des espaces.

L'objectif du présent travail est d'élaborer les versions rigides des notions de pro-p-espaces et de p-complétion profinie d'un espace arbitraire.

(*) Texte recu le 20 février 1995, révisé le 20 juillet 1995.

F. MOREL, Centre de Mathématiques, URA 169, École polytechnique, 91128, Palaiseau CEDEX (France).
Email : morel@orphee.polytechnique.fr.

Classification AMS : 55P60, 55S10.

L'approche de Quillen [Qu3] et Rector [Re] sur la p-complétion profinie repose sur la p-complétion profinie des groupes simpliciaux, introduite par Quillen, et ne peut ainsi « attraper » que les p-complétés profinis d'espaces connexes ; ceci était insuffisant pour notre propos. Une fois obtenue cette version rigide de la p-complétion profinie de Artin-Mazur et Sullivan, nous pouvons rendre optimales certaines idées développées dans [Mo] sur l'interprétation « géométrique » du foncteur T (qui généralisait celle de [D-S] , *cf.* § 2.2).

Dans la première partie, on développe une « théorie de l'homotopie » dans la catégorie des ensembles profinis simpliciaux : autrement dit, on munit cette catégorie d'une structure de catégorie de modèles fermée au sens de [Qu1], [Qu2]. Dans la seconde partie, on définit tout d'abord une version « rigide » de la p-complétion profinie (§ 2.1) et l'on en déduit une interprétation géométrique « concrète » du foncteur T (§ 2.2).

Dans la première version du présent travail, nous généralisions directement l'approche de [Qu3], [Re] en nous inspirant du travail de Dwyer et Kan [D-K] en remplaçant les groupoïdes simpliciaux par des groupoïdes profinis simpliciaux. Par la suite, nous avons réalisé que la p-complétion de Bousfield-Kan [B-K] convenablement adaptée fournit immédiatement une p-complétion profinie « rigide », et c'est cette approche que nous avons choisie d'exposer en détails.

1. Algèbre homotopique dans la catégorie des ensembles profinis simpliciaux

1.1. Ensembles profinis simpliciaux.

On note $\mathcal{E}$ la catégorie des ensembles, $\mathcal{F}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$ dont les objets sont les ensembles finis et $\widehat{\mathcal{E}}$ la catégorie des espaces topologiques compacts totalement discontinus. On identifiera très souvent la catégorie $\mathcal{F}$ à une sous-catégorie pleine de $\widehat{\mathcal{E}}$ de façon évidente. On sait que le foncteur « limite » : pro-$\mathcal{F} \to \widehat{\mathcal{E}}$, qui associe au pro-objet X de $\mathcal{F}$ la limite dans $\widehat{\mathcal{E}}$ du diagramme correspondant à X est une équivalence de catégories, pro-$\mathcal{F}$ désignant la catégorie des pro-objets de $\mathcal{F}$ (*cf.* l'appendice de [A-M] pour les notions relatives aux pro-objets). Nous identifierons très souvent ces deux catégories.

Le foncteur « oubli de la topologie » $\widehat{\mathcal{E}} \to \mathcal{E}$ admet un adjoint à gauche $\mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{E}}$ que l'on appellera *complétion profinie.*

On notera $\mathcal{S}$ (resp. $s\mathcal{F}$, resp. $\widehat{\mathcal{S}}$) la catégorie des ensembles simpliciaux (resp. des ensembles finis simpliciaux, resp. des ensembles profinis simpliciaux). Les objets de $\mathcal{S}$ (resp. $\widehat{\mathcal{S}}$) s'appelleront les *espaces* (resp. les *espaces profinis*).

Soient X un espace profini et $\mathcal{R}(X)$ l'ensemble ordonné, par l'inclusion, des relations d'équivalences simpliciales ouvertes (et donc fermées) sur X : un élément R de $\mathcal{R}(X)$ est donc un sous-ensemble profini simplicial du produit $X \times X$ tel que, en chaque degré n, R_n est une relation d'équivalence sur l'ensemble X_n et un ouvert de $X_n \times X_n$. Pour chaque élément R de $\mathcal{R}(X)$, l'ensemble simplicial quotient X/R est un ensemble fini simplicial et l'application $X \to X/R$ est un morphisme d'espaces profinis.

La démonstration du lemme suivant est tout à fait analogue à celle du lemme 2.3 de [Qu3] et laissée au lecteur :

LEMME 1.—*Pour tout espace profini X, le morphisme $X \to \lim_{R\in\mathcal{R}(X)} X/R$ est un isomorphisme.*

On déduit immédiatement de ce lemme que le foncteur «limite» : pro-$s\mathcal{F} \to \widehat{\mathcal{S}}$ est une équivalence de catégories.

On note $|\cdot| : \widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ le *foncteur oubli* qui à l'espace profini X associe l'ensemble simplicial sous-jacent $|X|$.

La complétion profinie $\mathcal{E} \to \widehat{\mathcal{E}}$ induit un foncteur $\widehat{(\text{-})} : \mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{S}}$, $X \mapsto \widehat{X}$, encore appelé *complétion profinie*, qui est adjoint à gauche de l'oubli $|\cdot| : \widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$.

Exemples d'espaces profinis : les pro-p-espaces.

Soit p un nombre premier.

• Un *p-espace fini* X est un ensemble simplicial ayant les propriétés suivantes :

a) X est un ensemble simplicial de Kan (ou encore «fibrant» [Qu1]) ;

b) X est un ensemble fini simplicial ;

c) pour chaque sommet x de X, les groupes d'homotopie $\pi_n(X, x)$, pour $n \geq 1$, sont triviaux sauf pour un nombre fini d'entre eux lesquels sont des p-groupes finis (on remarquera que l'ensemble $\pi_0(X)$ des composantes connexes de X est fini).

• Un *pro-p-espace* est un espace profini X qui peut s'écrire comme la limite d'un système filtrant de p-espaces finis.

Nous donnerons plus loin des exemples de pro-p-espaces : le classifiant d'un pro-p-groupe (§ 1.2) et le p-complété de Bousfield-Kan d'un espace profini (§ 2.1).

Remarquons que si K est un ensemble fini simplicial fibrant dont les groupes d'homotopie sont des p-groupes finis, la t-troncature de Postnikov $\mathrm{P}^t(K)$ de K (voir [Ma]) est un p-espace fini pout tout entier $t \geq 0$.

REMARQUE. — La notion de p-espace fini est une variante technique de la notion d'espace p-π_*-fini introduite dans [La] et la notion de pro-p-espace précédente est une version rigide de celle introduite dans [Mo] qui correspondait à des systèmes filtrants d'espaces p-π_*-finis dans la catégorie homotopique.

1.2. Cohomologie des espaces profinis.

Soient π un groupe topologique abélien et X un espace profini. On note $C^*(X;\pi)$ le complexe des cochaînes continues de X à valeurs dans π défini par les formules suivantes. Pour chaque entier $n \geq 0$:

- $C^n(X;\pi)$ est le groupe abélien des applications continues de X_n vers π ;
- $\delta^n : C^n(X;\pi) \to C^{n+1}(X;\pi)$ est l'homomorphisme qui à l'application continue α associe $\sum_{i=0,..,n+1} (-1)^i \alpha \circ \mathrm{d}_i$, où d_i désigne la i-ème face de l'espace profini X.

On note $H^*(X;\pi)$ la cohomologie de ce complexe et on l'appelle la *cohomologie de l'espace profini X à coefficients dans le groupe topologique abélien π.*

REMARQUES.

1) Soient X un espace profini et π un groupe topologique abélien. On dispose d'un morphisme naturel de complexes $C^*(X;\pi) \to C^*(|X|;|\pi|)$, $|X|$ désignant l'ensemble simplicial sous-jacent à X et $|\pi|$ le groupe abélien sous-jacent à π. En général, ce morphisme n'induit pas un isomorphisme en cohomologie.

Lorsque X est un ensemble fini simplicial, bien sûr, ce morphisme de complexes est un isomorphisme, et le morphisme induit en cohomologie également. Il n'y a donc pas lieu de distinguer par la notation la cohomologie d'un espace et la cohomologie d'un espace profini puisque lorsque ces deux notions ont un sens en même temps (c'est-à-dire l'espace profini X est en fait un ensemble fini simplicial) elles coïncident.

2) Soient X un ensemble simplicial et π un groupe abélien fini. Le complexe $C^*(\widehat{X};\pi)$ s'identifie canoniquement au complexe $C^*(X;\pi)$ à l'aide de la bijection naturelle $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{E}}}(\widehat{X}_n,\pi) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(X_n,\pi)$ et l'on obtient en particulier un isomorphisme naturel en X et π :

$$H^*(X;\pi) \simeq H^*(\widehat{X};\pi).$$

3) Soient X un espace profini et π un groupe abélien fini. Le complexe $C^*(X;\pi)$ s'identifie naturellement à la colimite (filtrante) des complexes $C^*(X/R;\pi)$, avec R parcourant $\mathcal{R}(X)$, et la cohomologie $H^*(X;\pi)$ s'identifie donc naturellement à la colimite des cohomologies $H^*(X/R;\pi)$.

4) Plus généralement, on pourrait définir la cohomologie d'un espace profini X à coefficients dans un système de coefficients locaux sur X. Ceci est nécessaire lorsqu'on souhaite par exemple construire la suite spectrale de Serre d'une fibration (cette notion sera définie au § 1.3). Nous laissons au lecteur intéressé le soin d'imaginer lui-même ces notions. Contentons-nous de remarquer que de telles considérations rendent naturelle l'introduction du « groupoïde profini fondamental » d'un espace profini, (et en particulier la construction du groupe profini fondamental), *etc.*

Exemple : cohomologie des groupes profinis.

Soient G un groupe profini (*i.e.* un groupe de la catégorie $\widehat{\mathcal{E}}$) et X un espace profini. On note $Z^1(X;G)$ l'ensemble des 1-cocycles de X à valeurs dans G; autrement dit, les applications continues $f : X_1 \to G$ vérifiant $f(\mathrm{d}_0 x)\cdot f(\mathrm{d}_2 x) = f(\mathrm{d}_1 x)$ pour tout 2-simplexe x de X (lorsque G est abélien, $Z^1(X;G)$ s'identifie à l'ensemble des 1-cocycles du complexe $C^*(X;G)$). Le foncteur $(\widehat{\mathcal{S}})^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{E}$, $X \mapsto Z^1(X;G)$ est représentable par un espace profini noté BG et appelé le *classifiant* du groupe profini G. Les 1-cocycles de X à valeurs dans G (et donc le classifiant de G) interviennent dans la classification des G-fibrés (profinis) principaux de base X (voir le § 1.5). On peut bien sûr donner une description explicite de BG en adaptant la définition standard, voir par exemple [Ma].

REMARQUE. — Il est clair que la catégorie des systèmes de coefficients locaux sur BG doit être équivalente à celle des G-modules discrets (*cf.* [Se]) et que pour tout G-module discret M, la cohomologie de BG à coefficient dans le système de coefficients locaux correspondant à M doit s'identifier à la cohomologie du groupe profini G à coefficients dans M telle qu'elle est définie dans [Se].

1.3. Algèbre homotopique.

On suppose que le lecteur est familier avec l'algèbre homotopique de Quillen [Qu1] et en particulier avec la notion de catégorie de modèles fermée (voir [Qu2, II, § 1]).

THÉORÈME 1. — *Soit p un nombre premier. Considérons les notions suivantes :*

- *une équivalence faible est un $\widehat{\mathcal{S}}$-morphisme induisant un isomorphisme en cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;*
- *une cofibration est un $\widehat{\mathcal{S}}$-morphisme injectif (dimension par dimension) ;*
- *une fibration est un $\widehat{\mathcal{S}}$-morphisme ayant la propriété de relèvement*

à droite par rapport aux cofibrations qui sont des équivalences faibles (*cf.* [Qu2, II, § 1]).

Alors ces notions d'équivalences faibles, de cofibrations et de fibrations munissent la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ d'une structure de catégorie de modèles fermée.

On notera $h\widehat{\mathcal{S}}$ la catégorie homotopique associée à cette structure de catégorie de modèles fermée [Qu1] et pour deux espaces profinis X et Y, on notera $[X,Y]$ l'ensemble des $h\widehat{\mathcal{S}}$-morphismes de X vers Y (le lecteur notera que la catégorie $h\widehat{\mathcal{S}}$ dépend de p).

Variantes.

1) On peut, dans la définition des équivalences faibles, remplacer $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par un produit sur un ensemble de nombres premiers p de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On peut également prendre pour équivalences faibles les morphismes induisant un isomorphisme en cohomologie continue à coefficients dans tous les systèmes de coefficients locaux finis. On obtient alors dans chacun de ces cas une structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\mathcal{S}}$ (en conservant les mêmes cofibrations). La démonstration de ce fait est analogue à celle que nous allons donner du théorème 1.

2) La classe des équivalences faibles étant fixée, on peut chercher à modifier la classe des cofibrations (et donc des fibrations). Prenons par exemple pour équivalences faibles les morphismes induisant un isomorphisme en cohomologie continue à coefficients dans tous les systèmes de coefficients locaux finis et pour cofibrations les morphismes injectifs $X \to Y$ tels que l'espace profini $Z = Y/X$ est «libre» au sens suivant : pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $\Sigma_n Z$ des n-simplexes non-dégénérés de Z est une partie fermée de Z_n (noter que c'est toujours un ouvert comme complémentaire de la réunion des images des dégénérescences), et donc un ensemble profini, et est rétracte du complété profini d'un ensemble (cette propriété caractérise les objets projectifs de la catégorie $\widehat{\mathcal{E}}$). Il est *probable* que ces notions munissent la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ d'une structure de catégorie de modèles fermée. La seule difficulté est d'établir qu'un morphisme $X \to Y$ ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations (ce qui signifie ici que l'application simpliciale sous-jacente est une fibration triviale au sens usuel) induit un isomorphisme en cohomologie continue à coefficients dans tous les systèmes de coefficients locaux finis. On peut facilement ramener ce problème au cas où Y est réduit à un point. Autrement dit, si X est un espace profini tel que l'ensemble simplicial $|X|$ est de Kan et contractile, la cohomologie continue de X est-elle triviale ?

3) On dispose également de la version pointée du théorème : la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\mathcal{S}}$ donnée par le théorème «induit»

au sens évident une structure de catégorie de modèles fermée sur la sous-catégorie pleine 0-$\widehat{\mathcal{S}}$ des espaces profinis 0-réduits (dont l'ensemble profini des 0-simplexes est réduit à un élément) ; on peut montrer que la catégorie homotopique associée est équivalente à celle obtenue en inversant les isomorphismes en cohomologie modulo p de la catégorie des pro-p-groupes simpliciaux (*cf.* [Qu3]).

On peut également « stabiliser » cette structure et définir une structure de catégorie de modèles fermée sur la catégorie des spectres profinis, un spectre profini X étant une collection d'espaces profinis pointés $\{X_n\}_n$ et de morphismes $S^1 \wedge X_n \to X_{n+1}$.

1.4. Fibrations.

On fixe un nombre premier p. L'objectif de ce paragraphe est d'établir le théorème 1 dont on utilise dorénavant les notions d'équivalence faibles, de cofibrations et de fibrations. Rappelons que dans la terminologie de [Qu1] on appelle *cofibration triviale* (resp. *fibration triviale*) un morphisme qui est à la fois une cofibration (resp. fibration) et une équivalence faible, et qu'un espace profini X sera dit *fibrant* si le morphisme $X \to *$ est une fibration ($*$ désignant l'objet final de la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$) ; on remarquera que pour tout espace profini X, le morphisme $\emptyset \to X$ est une cofibration ($\emptyset$ désignant cette fois l'objet initial, *i.e.* « vide »).

Soient n un entier ≥ 0 et S un ensemble profini. Le foncteur $\widehat{\mathcal{S}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{E}$, $X \mapsto \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{E}}}(X_n, S)$ est représentable par l'ensemble profini simplicial

$$L(S,n) : \Delta^{\mathrm{opp}} \to \widehat{\mathcal{E}}, \quad [k] \to S^{\mathrm{Hom}_\Delta([n],[k])}.$$

Lorsque M est un groupe profini abélien, $L(M,n)$ est muni d'une structure naturelle de groupe profini abélien simplicial et le groupe (abélien) $\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(X, L(M,n))$ s'identifie au groupe $C^n(X;M)$ des n-cochaînes continues de X à valeurs dans M. On note $Z^n(X;M)$ le groupe abélien des n-cocycles du complexe $C^*(X;M)$. Le foncteur

$$\widehat{\mathcal{S}}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathcal{E}, \quad X \longmapsto Z^n(X;M)$$

est lui aussi représentable par un groupe abélien profini simplicial noté $K(M,n)$, que l'on appelle l'*espace* (*profini*) *d'Eilenberg-MacLane de type* (M,n). (Cet espace est donné par les formules classiques, voir par exemple [Ma].)

L'homomorphisme naturel $C^n(X;M) \to Z^{n+1}(X;M)$ donné par la différentielle définit un morphisme naturel de groupes profinis abéliens simpliciaux $L(M,n) \to K(M,n+1)$.

LEMME 2. — *Soit M un pro-p-groupe abélien. Alors, pour tout entier $n \geq 0$:*

1) *le morphisme $L(M,n) \to *$ a la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations ;*

2) *les morphismes $L(M,n) \to K(M,n+1)$ et $K(M,n) \to *$ sont des fibrations.*

Démonstration.

1) Soit $X \hookrightarrow Y$ une cofibration ; il s'agit d'établir que tout morphisme $X \to L(M,n)$ se prolonge en un morphisme $Y \to L(M,n)$; autrement dit, que toute application continue $X_n \to M$ se prolonge à Y_n ; il suffit donc de montrer que l'ensemble profini sous-jacent à un pro-p-groupe abélien est un injectif de la catégorie $\widehat{\mathcal{E}}$. A l'aide de la filtration p-adique de M et la proposition 1, p. 2, de [Se], on voit facilement que l'ensemble profini sous-jacent à M est un produit d'ensembles profinis sous-jacents à des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels profinis ; or un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini est toujours isomorphe à un produit de $\mathbb{F}_p$ (comme $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini) : il suffit donc d'établir que l'ensemble sous-jacent à $\mathbb{F}_p$ est injectif dans $\widehat{\mathcal{E}}$.

En fait, tout ensemble fini F est injectif (et les injectifs de $\widehat{\mathcal{E}}$ sont précisément les ensembles profinis rétractes d'un produit d'ensembles finis) : soient $E \hookrightarrow G$ une injection continue entre ensembles profinis et $E \to F$ une application continue. Pour chaque élément R de $\mathcal{R}(G)$, notons E_R l'image de E dans G/R ; alors l'application continue $E \to \lim_R E_R$ est un isomorphisme si bien que l'application continue $E \to F$ se factorise par un des E_R ; il suffit alors de prolonger à G/R l'application $E_R \to F$ induite pour obtenir un prolongement de $E \to F$ à G. D'où le point 1).

2) Soit $X \hookrightarrow Y$ une cofibration triviale. Il résulte du 1) que le morphisme de complexes $C^*(Y;M) \to C^*(X;M)$ est surjectif. De plus, il induit un isomorphisme en cohomologie ; en effet, c'est vrai par définition pour $M = \mathbb{F}_p$, et donc pour M un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini arbitraire ; on en déduit que c'est vrai pour tout M annulé par une puissance de p et en utilisant le fait que le morphisme $M \to \lim_n M/p^n M$ est un isomorphisme pour tout pro-p-groupe abélien M et la suite exacte de Milnor, on obtient l'affirmation pour tout M.

On en déduit facilement que les applications naturelles

$$Z^n(Y;M) \to Z^n(X;M),$$
$$C^n(Y;M) \to C^n(X;M) \times_{Z^{n+1}(X;M)} Z^{n+1}(Y;M)$$

sont surjectives et donc que les morphismes $K(M,n) \to *$ et $L(M,n) \to K(M,n+1)$ sont des fibrations. $\square$

REMARQUE. — Soit G un groupe profini. L'espace profini $L(G,0)$ se notera aussi $\mathrm{E}G$; on dispose donc d'une bijection naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(X, \mathrm{E}G) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{E}}}(X_0, G)$$

en l'espace profini X. On introduit la transformation naturelle

$$\delta : \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(X, \mathrm{E}G) \longrightarrow Z^1(X; G) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(X, \mathrm{B}G)$$

(*cf.* § 1.2) qui à l'application continue $f : X_0 \to G$ associe le 1-cocycle

$$x \longmapsto \delta f(x) = f(\mathrm{d}_0 x) \cdot f(\mathrm{d}_1 x)^{-1}.$$

Cette transformation naturelle définit un morphisme naturel $\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$.

Nous établirons au § 1.5, corollaire 1, que, lorsque G est un pro-p-groupe, le morphisme $\mathrm{E}G \to *$ a la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations et les morphismes $\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$ et $\mathrm{B}G \to *$ sont des fibrations. Lorsque G est abélien, cela vient d'être établi (car BG s'identifie à $K(G,1)$ et le morphisme $\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$ au morphisme $L(G,0) \to K(G,1)$ considéré dans le lemme 2).

Le lemme suivant est une forme dégénérée du corollaire à la proposition 4, chap. II, § 2, de [Qu1] (puisque tous les espaces profinis sont cofibrants).

LEMME 3. — *Un $\widehat{\mathcal{S}}$-morphisme $X \to Y$ ayant la propriété de relèvement par rapport aux cofibrations est une équivalence d'homotopie, et en particulier une équivalence faible (et donc une fibration triviale).*

Rappelons qu'un $\widehat{\mathcal{S}}$-morphisme $f : X \to Y$ est une équivalence d'homotopie s'il existe un $\widehat{\mathcal{S}}$-morphisme $g : Y \to X$ tel que $g \circ f$ est homotope à Id_X et $f \circ g$ homotope à Id_Y (la relation d'homotopie se définit comme d'habitude à l'aide du 1-simplexe standard $\Delta[1]$, *cf.* [Qu1, chap. II, § 1, déf. 4]). En particulier, une équivalence d'homotopie est bien une équivalence faible (invariance par homotopie de la cohomologie).

PROPOSITION 1. — *Soit $f : X \to Y$ un $\widehat{\mathcal{S}}$-morphisme.*

1) *f peut s'écrire comme composé $q \circ j$ d'un morphisme q ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations et d'une cofibration j ;*

2) *f peut s'écrire comme composé $p \circ i$ d'une fibration p et d'une cofibration triviale i.*

Démonstration.

1) Soient X' l'espace profini

$$\prod_{\substack{n\geq 0\\ x\in C^n(X;\mathbb{F}_p)}} L(\mathbb{F}_p,n)$$

et $i : X \to X'$ le morphisme évident ; c'est une injection. Le morphisme $j : X \to X' \times Y$, produit de i et f est donc également une cofibration et de plus le morphisme $q : X' \times Y \to Y$ a la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations puisqu'il en est de même pour le morphisme $X' \to *$ d'après le lemme 2. Enfin on a bien $f = q \circ j$.

2) Nous allons construire pour tout entier n un espace profini Z_n et un diagramme :

$$X \to \cdots \to Z_n \to \cdots \to Z_1 \to Y$$

tels que :

- chacun des morphismes $Z_n \to Z_{n-1}$ est une fibration ;
- chacune des compositions évidentes $X \to Z_n \to Y$ est égale à f ;
- pour chaque entier $n \geq 1$, l'homomorphisme

$$H^*(Z_n;\mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(X;\mathbb{F}_p)$$

est surjectif et si M_n désigne son noyau, alors le composé

$$M_n \subset H^*(Z_n;\mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(Z_{n+1};\mathbb{F}_p)$$

est nul.

Cela permet d'établir le point 2) de la proposition comme suit. On pose

$$Z := \lim Z_n$$

et on obtient une factorisation

$$X \to Z \to Y$$

de f dans laquelle le morphisme $Z \to Y$ est une fibration (comme limite de la tour de fibrations $\cdots \to Z_n \to \cdots \to Z_1 \to Y$). De plus, le morphisme $X \to Z$ est une équivalence faible puisque le morphisme évident

$$\operatorname*{colim}_n H^*(Z_n;\mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(Z;\mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme et le morphisme

$$\operatorname*{colim}_n H^*(Z_n;\mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(X;\mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme par construction. On applique alors le point 1) précédemment établi au morphisme $X \to Z$, que l'on peut donc écrire comme composé $X \to T \to Z$ d'une cofibration $X \to T$ et d'un morphisme ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations $T \to Z$; d'après le lemme 3, ce morphisme est une équivalence faible et puisque le morphisme $X \to Z$ est lui-même une équivalence faible, le morphisme $X \to T$ est une cofibration triviale. Le diagramme $X \to T \to Y$ est donc une factorisation de f en une cofibration triviale suivie d'une fibration (composée de deux fibrations).

Avant de passer à la construction des espaces profinis Z_n, faisons une remarque. Soit V un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel. Son dual linéaire V^* s'identifie à l'espace vectoriel $\lim_{W \subset V} W^*$, où W parcourt l'ensemble ordonné par l'inclusion des sous-espaces vectoriels de V de dimension finie et est donc naturellement muni d'une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini. Pour tout espace profini X, l'application linéaire naturelle

$$H^*(X; V^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{F}_p}\big(V, H^*(X; \mathbb{F}_p)\big)$$

(induite par l'évaluation $H^*(X; V^*) \otimes V \to H^*(X; \mathbb{F}_p)$) est un isomorphisme : c'est trivial pour $V = \mathbb{F}_p$ et le cas général s'obtient en choisissant une base de V.

Commençons maintenant la construction par récurrence sur n des espaces Z_n. Soit M le noyau de l'homomorphisme

$$H^*(Y; \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(X; \mathbb{F}_p).$$

D'après ce qui précède, pour chaque $k \geq 0$, l'inclusion $M^k \subset H^k(Y; \mathbb{F}_p)$ détermine une classe de cohomologie dans $H^k(Y; (M^k)^*)$ que l'on représente par un k-cocycle (voir le début de ce paragraphe) :

$$\alpha_k : Y \longrightarrow K\big((M^k)^*, k\big).$$

On note :

- $K(M^*)$ le produit $\prod_{k \geq 0} K\big((M^k)^*, k\big)$;
- $L(M^*)$ le produit $\prod_{k \geq 1} L\big((M^k)^*, k-1\big)$ et
- $a : Y \to K(M^*)$ le produit des α_k.

Soit Z'_1 le produit fibré $Y \times_{K(M^*)} L(M^*)$; par construction, le composé $X \to Y \to K(M^*)$ peut se relever à $L(M^*)$ (l'image de la classe de α_k dans $H^k(X; (M^k)^*)$ est nulle par construction) et le morphisme $X \to Y$ se relève donc à Z'_1. Soient ensuite Z''_1 un espace profini fibrant et $X \to Z''_1$ un morphisme induisant une surjection en cohomologie continue à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ (prendre par exemple pour Z_1'' le produit $\prod_{k\geq 0} K\big(H^k(X;\mathbb{F}_p)^*, k\big)$.

On pose $Z_1 := Z_1'' \times Z_1'$; on dispose du morphisme $X \to Z_1$, produit des deux morphismes précédents et du morphisme $Z_1 \to Y$ composé de la projection sur le facteur Z_1', qui est une fibration car Z_1'' est fibrant, et de la fibration $Z_1' \to Y$, image réciproque de la fibration $L(M^*) \to K(M^*)$ (voir lemme 2).

Le diagramme $X \to Z_1 \to Y$ est une factorisation de f et

- le morphisme $Z_1 \to Y$ est une fibration ;

- le morphisme $H^*(Z_1;\mathbb{F}_p) \to H^*(X;\mathbb{F}_p)$ est surjectif et le composé $M \subset H^*(Y;\mathbb{F}_p) \to H^*(Z_1;\mathbb{F}_p)$ est nul par construction.

On itère alors cette construction et l'on en déduit le diagramme $X \to \cdots \to Z_n \to \cdots \to Z_1 \to Y$ cherché. $\square$

Démonstration du théorème 1.

Les axiomes CM1, CM2 et CM3 sont faciles à établir.

Pour établir l'axiome CM4, il s'agit de montrer que pour chaque carré commutatif (en trait plein) :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & B \end{tikzcd}$$

dans lequel i est une cofibration et p une fibration, alors il existe un morphisme $Y \to E$ (en pointillé) qui laisse le diagramme commutatif dès que ou bien i, ou bien p est une équivalence faible.

Dans le premier cas, c'est trivial, par définition d'une fibration.

Supposons maintenant que p est une fibration et une équivalence faible. D'après le point 1) de la proposition 1, on peut factoriser p en $E \to E' \to B$, avec $E' \to B$ un morphisme ayant la propriété de relèvement par rapport aux cofibrations et $E \to E'$ une cofibration ; or p est une équivalence faible et le morphisme $E' \to B$ également d'après le lemme 3 ; donc $E \to E'$ est une cofibration triviale et p est rétracte de $E' \to B$ et a donc aussi la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations.

L'axiome CM5 est contenu dans la proposition 1 compte tenu du lemme 3. $\square$

Remarques.

1) Il résulte de ces axiomes que les fibrations triviales sont précisément les morphismes ayant la propriété de relèvement à droite par rapport aux cofibrations : d'après le lemme 3, ce sont donc des équivalences d'homotopie. Ainsi une équivalence faible entre objets fibrants est une équivalence d'homotopie puisque c'est le composé d'une cofibration triviale et d'une fibration triviale : or une cofibration triviale entre objets fibrants est une équivalence d'homotopie [Qu1, chap. II, § 2, corollaire à la proposition 4], c'est la propriété duale du lemme 3) et l'on vient de voir qu'une fibration triviale est une équivalence d'homotopie.

2) Il est clair que la structure de catégorie de modèles fermée ainsi obtenue sur la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ est compatible avec sa structure naturelle de catégorie simpliciale [Qu1, chap. II, § 1] et est en fait une structure de catégorie simpliciale de modèles fermée [Qu1, chap. II, § 2].

1.5. Fibrés principaux.

Soit G un groupe profini. On note $G\text{-}\widehat{\mathcal{E}}$ la catégorie des G-ensembles profinis, c'est-à-dire celle dont les objets sont les ensembles profinis munis d'une action continue à gauche de G et dont les morphismes sont les applications continues G-équivariantes. On dit qu'un G-ensemble profini E est *fini* (resp. *libre*) si l'ensemble $|E|$ sous-jacent à E est fini (resp. si l'action du groupe discret $|G|$ sur l'ensemble $|E|$ est libre).

Lemme 4. — *Soient G un groupe fini et E un G-ensemble profini.*

1) *Le G-ensemble profini E est limite dans $G\text{-}\widehat{\mathcal{E}}$ d'un système filtrant de G-ensembles finis;*

2) *si E est un G-ensemble profini libre, alors E est la limite dans $G\text{-}\widehat{\mathcal{E}}$ d'un système filtrant de G-ensembles finis libres.*

Remarque. — Soient G un groupe profini et E un G-ensemble profini. L'ensemble $|G|\backslash|E|$ des orbites de $|E|$ possède une unique structure d'ensemble profini, notée $G\backslash E$, pour laquelle l'application $E \to G\backslash E$ est continue : cela résulte du fait que la relation d'équivalence associée à l'action de G sur E est un fermé de $E \times E$.

Lorsque E est un G-ensemble profini libre, le lemme précédent permet d'établir que l'application continue $E \to G\backslash E$ admet une section continue. En effet, en raisonnant comme dans la démonstration de [Se, prop. 1, p. 2], on se ramène facilement au cas où G est fini qui résulte du lemme : il existe un G-ensemble fini libre F et une application continue G-équivariante $E \to F$ qui identifie E au G-ensemble profini image réciproque de F par l'application continue $G\backslash E \to G\backslash F$; or l'application $F \to G\backslash F$ admet une section (continue), d'où le résultat. Ainsi, E est isomorphe comme

G-ensemble profini au G-ensemble profini $G \times {}_G\backslash E$ muni de l'action évidente de G.

Démonstration.

1) Soient R un élément de $\mathcal{R}(E)$ et g un élément de G; on note R^g la relation d'équivalence sur E image inverse de R par l'automorphisme $g : E \to E$ et R^G l'intersection des $g \cdot R \cdot g^{-1}$ lorsque g parcourt G; R^G est alors une relation d'équivalence ouverte et fermée avec laquelle l'action de G est « compatible » et de plus R^G est contenue dans R. Le G-ensemble profini E est donc la limite des G-ensembles finis E/R^G. On notera $\mathcal{R}^G(E)$ l'ensemble ordonné par l'inclusion des éléments R de $\mathcal{R}(E)$ tels que $R = R^G$.

2) Il suffit de démontrer que si E n'est pas vide, il existe un élément R de $\mathcal{R}^G(E)$ pour lequel E/R est un G-ensemble fini libre : en effet, pour tout élément R' de $\mathcal{R}^G(E)$, $R \cap R'$ est un élément de $\mathcal{R}^G(E)$ contenu dans R' et tel que $E/(R \cap R')$ est un G-ensemble (fini) libre puisque l'on dispose de l'application G-équivariante $E/(R \cap R') \to E/R$.

Pour tout élément R de $\mathcal{R}^G(E)$, on note $F(R)$ l'ensemble des éléments x de E/R dont le sous-groupe d'isotropie est non trivial; les $F(R)$ forment un système filtrant d'ensembles finis. Si chacun des $F(R)$ est non-vide, alors la limite des $F(R)$ est non vide. Soit x un élément de cette limite. On note I_R le sous-groupe d'isotropie de (l'image de) x dans E/R. Les I_R forment une famille filtrante de sous-groupes non triviaux du groupe fini G; cela force les I_R à être égaux entre eux pour R suffisamment « petit » : x a donc un sous-groupe d'isotropie non trivial dans G ce qui contredit l'hypothèse sur l'action de $|G|$ sur $|E|$. C'est donc qu'il existe un R tel que $F(R)$ est vide, d'où le lemme. $\square$

Soient G un groupe profini simplicial et E un G-espace profini (autrement dit, un objet simplicial de la catégorie G-$\widehat{\mathcal{E}}$).

- On dit que E est un *G-espace profini principal* si, pour tout entier n, le G_n-ensemble profini E_n est libre.
- Un *G-fibré principal de base* X est la donnée d'un G-espace profini E et d'un morphisme $f : E \to X$ induisant un isomorphisme ${}_G\backslash E \cong X$. On note $\Phi^G(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes (au sens évident) de G-fibrés principaux de base X. La correspondance $X \mapsto \Phi^G(X)$ définit un foncteur $\widehat{\mathcal{S}}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{E}$ à l'aide de la notion d'image réciproque de G-fibré principal.
- On dit qu'un espace profini X est *tronqué* s'il existe un entier $n \geq 0$ tel que l'application naturelle $X \to L(X_n, n)$ est une injection (cette notion est « duale » de la notion d'espace de dimension finie).

LEMME 5. — *Soit G un groupe fini simplicial tronqué. Pour tout espace profini X, l'application évidente* $\operatorname{colim}_{R\in\mathcal{R}(X)} \Phi^G(X/R) \to \Phi^G(X)$ *est bijective.*

Démonstration. — Il est facile de voir que pour établir ce lemme, il suffit de montrer que tout G-fibré principal de base X est induit par un G-fibré principal de base X/R (par le morphisme $X \to X/R$ bien sûr) pour un certain R dans $\mathcal{R}(X)$.

Soient H un groupe profini et S un H-ensemble profini. Pour chaque entier $n \geq 0$, l'espace profini $L(S,n)$ est muni d'une action continue du groupe simplicial $L(H,n)$: cela résulte du fait que le foncteur $Y \to L(Y,n)$ commute aux produits. Lorsque S est libre, l'espace profini $L(S,n)$ est un $L(H,n)$-espace profini principal. Pour le voir, rappelons (voir § 1.4) que $L(S,n)$ est l'ensemble profini simplicial $[k] \mapsto S^{\mathrm{Hom}_\Delta([n],[k])}$ et le $H^{\mathrm{Hom}\,\Delta([n],[m])}$-ensemble $S^{\mathrm{Hom}\,\Delta([n],[m])}$ est donc libre.

Revenons à la démonstration du lemme. Soit E un G-fibré principal de base X. Soit n un entier ≥ 0. D'après le point 2) du lemme 4, il existe un G_n-ensemble fini libre S et une application continue G_n-équivariante $E_n \to S$. La remarque précédente montre que le $L(G_n,n)$-espace $L(S,n)$ est libre et il est clair que le morphisme $E \to L(S,n)$ est équivariant par rapport au morphisme de groupes finis simpliciaux $\rho_n : G \to L(G_n,n)$; comme ce dernier est un monomorphisme pour n grand (par hypothèse sur G), il en résulte que pour n grand, l'action de G sur $L(S,n)$ induite par ρ_n est libre et le G-fibré principal E est donc l'image réciproque par le morphisme $X \to G\backslash L(S,n)$ du G-fibré principal $L(S,n)$, ce qui permet de conclure. $\square$

PROPOSITION 2. — *Soient G un pro-p-groupe simplicial et E un G-fibré principal de base B. Alors le morphisme $\pi : E \to B$ est une fibration.*

Démonstration. — On considère la filtration p-centrale descendante $\Gamma^p_s G$ du pro-p-groupe simplicial G (voir par exemple [Qu3, p. 48]) ; celle-ci permet facilement de se ramener au cas où G est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini simplicial en écrivant $\pi : E \to B$ comme la composition des $(\Gamma^p_s G/\Gamma^p_{s+1} G)$-fibrés principaux $\Gamma^p_{s+1} G\backslash E \to \Gamma^p_s G\backslash E$.

On suppose donc que G est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini simplicial. Soit

$$(D)\qquad \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ {\scriptstyle i}\downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Y & \longrightarrow & B \end{array}$$

un diagramme commutatif avec i une cofibration triviale. On souhaite montrer qu'il existe un morphisme $f : Y \to E$ (en pointillé) qui fait commuter le diagramme.

On considère l'ensemble des couples (N, f) formés d'un sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini simplicial N de G et d'un morphisme $f : Y \to {}_N\backslash E$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & {}_N\backslash E \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, "f"] & B \end{tikzcd}$$

On ordonne cet ensemble de la façon évidente et l'on obtient ainsi un ensemble ordonné inductif. Il nous suffit donc d'établir qu'un élément maximal (N, f) de cet ensemble vérifie forcément $N = 0$. Soit (N, f) un élément de cet ensemble. La théorie de Dold-Kan (voir par exemple [Ma]) montre que le foncteur « normalisation » induit une équivalence entre la catégorie des $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels profinis simpliciaux et celle des complexes de chaînes de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels profinis. Si N est non nul, on en déduit l'existence d'un sous-$\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini simplicial N' de N tel que le complexe normalisé de N/N' est nul sauf en une dimension où il est de dimension 1 ; en considérant le fibré N/N'-principal ${}_{N'}\backslash E \to {}_N\backslash E$, on voit qu'il suffit donc d'établir la proposition 2 pour un tel $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini simplicial.

LEMME 6. — *Soit G le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini simplicial dont le complexe normalisé est nul sauf en degré n où il est de dimension* 1 (*en particulier, G est un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel fini simplicial*). *Alors pour tout espace profini X, il existe une bijection naturelle $\Phi^G(X) \to H^{n+1}(X; \mathbb{F}_p)$.*

Démonstration. — Pour tout élément R de $\mathcal{R}(X)$, la théorie classique fournit une bijection naturelle $\Phi^G(X/R) \cong H^{n+1}(X/R; \mathbb{F}_p)$; or l'application naturelle

$$\operatorname*{colim}_{R \in \mathcal{R}(X)} H^{n+1}(X/R; \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^{n+1}(X; \mathbb{F}_p)$$

est bijective et, d'après le lemme 5, l'application naturelle

$$\operatorname*{colim}_{R \in \mathcal{R}(X)} \Phi^G(X/R) \longrightarrow \Phi^G(X)$$

est elle aussi bijective (car on vérifie facilement que G est tronqué). On en déduit bien une bijection naturelle $\Phi^G(X) \cong H^{n+1}(X/R; \mathbb{F}_p)$. □

Il reste à établir la proposition 2 lorsque G est comme dans le lemme 6. On se donne un diagramme commutatif (D) : quitte à prendre l'image réciproque du G-fibré principal de base B par le morphisme $Y \to B$, on peut supposer que $Y = B$. La commutativité du diagramme (D) signifie que l'image réciproque du G-fibré principal de base Y par la cofibration triviale $X \to Y$ est triviale; puisque le morphisme $X \to Y$ induit un isomorphisme en cohomologie modulo p, le lemme 6 implique que le G-fibré principal de base Y est lui-même trivial.

Pour conclure, il suffit de remarquer qu'un G comme ci-dessus est un objet fibrant ce qui résulte de ce que la théorie de Dold-Kan implique qu'un tel G est facteur direct de $K(\mathbb{F}_p, n)$, lui-même fibrant. □

REMARQUE. — La proposition montre au passage qu'un pro-p-groupe simplicial est fibrant.

COROLLAIRE 1. — *Soit π un pro-p-groupe. Alors le morphisme $E\pi \to *$ est une fibration triviale et les morphismes $E\pi \to B\pi$ et $B\pi \to *$ sont des fibrations.*

Démonstration. — Comme au § 1.4, la première affirmation résulte du fait que l'ensemble profini sous-jacent à un pro-p-groupe est un produit de $\mathbb{F}_p$ et est donc «injectif». La seconde affirmation est un cas particulier de la proposition 2 puisque $E\pi \to B\pi$ est de façon naturelle un π-fibré principal. Pour la dernière affirmation, on utilise la filtration p-centrale descendante $\Gamma_s^p\pi$ du pro-p-groupe π (voir par exemple [Qu3, p. 48]); on en déduit que le morphisme $B\pi \to *$ s'écrit comme la composition des $B(\Gamma_s^p\pi/\Gamma_{s+1}^p\pi)$-fibrés principaux $B(\pi/\Gamma_{s+1}^p\pi) \to B(\pi/\Gamma_s^p\pi)$ et on applique à nouveau la proposition 2. □

REMARQUE. — Soit G un pro-p-groupe simplicial. On peut faire dans la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ une théorie de la classification «homotopique» des G-fibrés principaux analogue à la classification dans $\mathcal{S}$. On obtient par exemple les affirmations suivantes (dont nous laissons la vérification au lecteur).

Soit $\mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$ un G-fibré principal tel que la cohomologie $H^*(\mathrm{E}G; \mathbb{F}_p)$ est triviale. Alors pour tout espace profini X, on définit une application naturelle

$$\Phi^G(X) \longrightarrow [X, \mathrm{B}G]$$

comme suit. Soit E un G-fibré principal de base X; alors dans le diagramme évident

$$X \longleftarrow E \times_G \mathrm{E}G \to \mathrm{B}G,$$

le morphisme $E \times_G \mathrm{E}G \to X$ est une équivalence faible (on peut pour s'en convaincre, filtrer X par ses squelettes et considérer la suite spectrale de Serre associée à la filtration induite sur $E \times_G \mathrm{E}G$; le point crucial pour identifier le terme E^2 est qu'un G-fibré principal de base $S \times \Delta[n]$, S un ensemble profini, est toujours trivial : utiliser la remarque qui suit le lemme 4). On associe au G-fibré principal E le $h\widehat{\mathcal{S}}$-morphisme $X \to \mathrm{B}G$

composé du morphisme inverse de $E \times_G \mathrm{E}G \to X$ et du morphisme $E \times_G \mathrm{E}G \to \mathrm{B}G$. On vérifie facilement que l'on obtient ainsi une bijection naturelle $\Phi^G(X) \cong [X, \mathrm{B}G]$.

Lorsque G est un groupe profini simplicial arbitraire, on peut faire une théorie analogue en utilisant cette fois la structure de catégorie de modèles fermée sur $\widehat{\mathcal{S}}$ obtenue en prenant pour équivalences faibles les morphismes induisant un isomorphisme en cohomologie à coefficients dans tous les systèmes de coefficients locaux finis (voir la variante 1) du § 1.3).

2. Applications

Dans toute cette partie, p désigne un nombre premier fixé.

2.1. p-complétion profinie.

On munit la catégorie $\mathcal{S}$ (resp. $\widehat{\mathcal{S}}$) de sa structure de catégorie de modèles fermée standard [Qu1] (resp. donnée par le théorème 1, § 1.3) et l'on se propose de comparer les catégories homotopiques $h\mathcal{S}$ et $h\widehat{\mathcal{S}}$ à l'aide de la paire de foncteurs adjoints $\widehat{(\text{-})} : \mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{S}}$, « complétion profinie », et $|\text{-}| : \widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$, « oubli de la topologie », du § 1.1. On suppose le lecteur familier avec les résultats de [Qu1, chap. I, § 4].

PROPOSITION 1.

• *Le foncteur* $\widehat{(\text{-})} : \mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{S}}$ *préserve les équivalences faibles et les cofibrations.*

• *Le foncteur* $|\text{-}| : \widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ *préserve les fibrations et les équivalences faibles entre objets fibrants.*

Si l'on note encore $\widehat{(\text{-})} : h\mathcal{S} \to h\widehat{\mathcal{S}}$ *le foncteur induit par* $\widehat{(\text{-})} : \mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{S}}$ *et* $\mathrm{R}|\text{-}| : h\widehat{\mathcal{S}} \to h\mathcal{S}$ *le foncteur dérivé à droite du foncteur* $|\text{-}| : \widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$, *il en résulte que le foncteur* $\mathrm{R}|\text{-}|$ *est adjoint à droite du foncteur* $\widehat{(\text{-})} : h\mathcal{S} \to h\widehat{\mathcal{S}}$.

Démonstration. — Le fait que le foncteur $\widehat{(\text{-})} : \mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{S}}$ préserve les équivalences faibles résulte de l'isomorphisme naturel $H^*(X; \mathbb{F}_p) \cong H^*(\widehat{X}; \mathbb{F}_p)$ établi dans l'exemple 2 du § 1.2. Le fait qu'il préserve les cofibrations est clair. Le fait que le foncteur $|\text{-}| : \widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ préserve les fibrations en résulte par adjonction (car le foncteur $\widehat{(\text{-})} : \mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{S}}$ préserve aussi les cofibrations triviales). Le fait que le foncteur $|\text{-}| : \widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ préserve les équivalences faibles entre objets fibrants résulte de la remarque 1) qui suit la proposition 1, § 1.4. La paire de foncteurs adjoints $\widehat{(\text{-})} : \mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{S}}$ et $|\text{-}| : \widehat{\mathcal{S}} \to \mathcal{S}$ vérifie donc les hypothèses du théorème 3 de [Qu1, chap. I, § 4], ce qui permet de conclure. □

Rappelons que pour calculer la valeur $\mathrm{R}|\text{-}|(Y)$ du foncteur dérivé à droite R|-| sur l'espace profini Y, on choisit une résolution fibrante de Y, c'est-à-dire une équivalence faible $r : Y \to Y_f$ avec Y_f fibrant (l'existence est garantie par l'axiome CM5) et l'on pose $R|\text{-}|(Y) := |Y_f|$.

Soit X un espace. On pourrait appeler l'espace profini $\widehat{X}$ le *complété profini* de X (on a d'ailleurs appelé «complétion profinie» le foncteur $\widehat{(\text{-})} : \mathcal{S} \to \widehat{\mathcal{S}}$). Ceci est justifié du point de vue cohomologique : la cohomologie continue de $\widehat{X}$ s'identifie naturellement à la cohomologie de X (ex. 2, § 1.2), ce qui est un bon critère pour être un complété profini (*cf.* [A-M]). Du point de vue homotopique en revanche, cet espace profini $\widehat{X}$ n'est pas vraiment utilisable surtout si l'on cherche à l'étudier comme «but» (voir le § 2.2) ; c'est plutôt une résolution fibrante de $\widehat{X}$ que l'on doit utiliser et qualifier de «complété profini» de l'espace X. En fait, puisque la notion de résolution fibrante dépend du nombre premier p, il est préférable d'appeler *p-complété profini* de X une telle résolution fibrante de $\widehat{X}$.

Foncteurs p-complétion.

On appelle *foncteur p-complétion* la donnée d'un foncteur $F : \widehat{\mathcal{S}} \to \widehat{\mathcal{S}}$ et d'une transformation naturelle $\theta_F : \mathrm{Id} \to F$ telle que pour chaque espace profini X, le morphisme $\theta_F(X) : X \to F(X)$ est une résolution fibrante de X (autrement dit, l'espace profini $F(X)$ est fibrant et le morphisme $\theta_F(X) : X \to F(X)$ est une équivalence faible).

En particulier, si X est un ensemble simplicial, le morphisme $\widehat{X} \to F(\widehat{X})$ est une résolution fibrante de $\widehat{X}$ et l'espace profini $F(\widehat{X})$ s'appellera le *p-complété profini de l'espace X associé au foncteur p-complétion F.*

Si F et G sont deux foncteurs p-complétion, alors pour tout espace profini X, les espaces profinis $F(X)$ et $G(X)$ sont canoniquement isomorphes dans la catégorie homotopique : l'isomorphisme est égal au composé de l'équivalence faible $F(\theta_G(X)) : F(X) \to F(G(X))$ et de l'inverse de l'équivalence faible $\theta_F(G(X)) : G(X) \to F(G(X))$.

Nous allons exhiber un foncteur p-complétion utilisant la construction de Bousfield-Kan [B-K]. Nous en esquisserons un autre plus bas qui généralise une construction de Quillen [Qu3] et Rector [Re].

On suppose le lecteur familllier avec [B-K]. Soit X un ensemble simplicial. On note $\text{Rés}^\bullet X$ la résolution cosimpliciale de X par rapport à $\mathbb{F}_p$. Lorsque X est fini en chaque degré, il en est de même pour chacun des espaces qui compose l'espace cosimplicial $\text{Rés}^\bullet X$. Il n'est pas difficile d'en déduire que pour chaque entier $s \geq 0$, l'espace $\mathrm{Tot}_s(\text{Rés}^\bullet X)$ est lui aussi fini en chaque degré. L'espace total $\mathrm{Tot}(\text{Rés}^\bullet X)$, autrement dit le p-complété de Bousfield-Kan de X, qui est limite de la tour des $\mathrm{Tot}_s(\text{Rés}^\bullet X)$ est donc muni d'une structure naturelle d'espace profini que l'on note $\widehat{X}^p$.

Soit X un espace profini. On note $\widehat{X}^p$ la limite dans la catégorie $\widehat{\mathcal{S}}$ des $\widehat{(X/R)}^p$ où R parcourt l'ensemble ordonné $\mathcal{R}(X)$; cet espace profini s'appellera le *p-complété de Bousfield-Kan* de l'espace profini X ; on pourrait aussi définir $\widehat{X}^p$ comme l'espace total (en un sens convenable) de l'espace profini cosimplicial $\lim_{R\in\mathcal{R}(X)} \text{Rés}^\bullet(X/R)$. On notera $\theta_X : X \to \widehat{X}^p$ le morphisme évident.

Proposition 2. — *Le couple formé du foncteur $X \mapsto \widehat{X}^p$ et de la transformation naturelle θ est un foncteur p-complétion.*

Démonstration. — Soit X un espace profini. Pour chaque entier $s \geq 0$, on pose

$$\text{Tot}_s(\widehat{X}^p) := \lim_{R\in\mathcal{R}(X)} \text{Tot}_s\big(\text{Rés}^\bullet(X/R)\big).$$

L'espace profini $\widehat{X}^p$ s'identifie bien sûr à la limite en s de la tour des $\text{Tot}_s(\widehat{X}^p)$.

Pour montrer que l'espace profini $\widehat{X}^p$ est fibrant, il suffit d'établir que pour tout $s \geq 0$, le morphisme $\text{Tot}_s(\widehat{X}^p) \to \text{Tot}_{s-1}(\widehat{X}^p)$ est une fibration (en posant $\text{Tot}_{-1}(\widehat{X}^p) := *$). Or (voir [B-K, chap. II, § 2, lemme 2.6]) on sait que, quitte à se fixer un sommet de X, les morphismes

$$\text{Tot}_s\big(\text{Rés}^\bullet(X/R)\big) \longrightarrow \text{Tot}_{s-1}\big(\text{Rés}^\bullet(X/R)\big)$$

sont de façon naturelle des fibrés principaux sous l'action de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels finis simpliciaux et donc en passant à la limite en R (tout est compatible puisque le point base provient de X) les morphismes $\text{Tot}_s(\widehat{X}^p) \to \text{Tot}_{s-1}(\widehat{X}^p)$ sont des fibrés principaux sous l'action de $\mathbb{F}_p$-espaces vectoriels profinis simpliciaux et ce sont donc des fibrations d'après la proposition 2 du § 1.5.

Enfin, d'après [B-K, chap. III, § 6], pour tout élément R de $\mathcal{R}(X)$, le morphisme $\text{colim}_s\, H^*(\text{Tot}_s(\text{Rés}^\bullet(X/R)); \mathbb{F}_p) \to H^*(X/R; \mathbb{F}_p)$ est un isomorphisme ; en passant à la colimite en R, on voit que le morphisme

$$\begin{aligned} H^*(\widehat{X}^p; \mathbb{F}_p) &\cong \operatorname*{colim}_R \operatorname*{colim}_s H^*\big(\text{Tot}_s(\text{Rés}^\bullet(X/R)); \mathbb{F}_p\big) \\ &\longrightarrow \operatorname*{colim}_R H^*(X/R; \mathbb{F}_p) \cong H^*(X; \mathbb{F}_p) \end{aligned}$$

est un isomorphisme et le morphisme $\theta_X : X \to \widehat{X}^p$ est bien une équivalence faible. □

Remarque. — Pour chaque espace profini X, l'espace profini $\widehat{X}^p$ est un exemple de pro-p-espace (voir § 1.1). L'espace profini $\widehat{X}^p$ s'identifie en effet à la limite (en R et s) des ensembles finis simpliciaux fibrants $\mathrm{Tot}_s(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R))$. Il est clair que pour chaque R et s, l'ensemble

$$\pi_0\big(\mathrm{Tot}_s\big(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R)\big)\big)$$

est fini et pour chaque sommet x de $\mathrm{Tot}_s(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R))$, les groupes d'homotopie

$$\pi_n\big(\mathrm{Tot}_s\big(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R)\big),x\big),\quad n\geq 1,$$

sont des p-groupes finis (utiliser le fait que le morphisme

$$\mathrm{Tot}_s\big(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R)\big)\longrightarrow \mathrm{Tot}_{s-1}\big(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R)\big)$$

est une fibration principale sous l'action d'un $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel fini simplicial). Alors pour tout entier t, la t-troncature de Postnikov (voir [Ma]) $\mathrm{P}^t(\mathrm{Tot}_s(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R)))$ de $\mathrm{Tot}_s(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R))$ est un p-espace fini et l'espace profini $\widehat{X}^p$, s'identifiant à la limite (filtrante) en R, s et t des p-espaces finis $\mathrm{P}^t(\mathrm{Tot}_s(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R)))$, est bien un pro-$p$-espace.

Autre foncteur p-complétion.

Dans [Qu3], D. Quillen introduit la construction suivante : soient X un ensemble simplicial 0-réduit et $\mathrm{G}X$ sa construction de Kan. On peut appliquer le foncteur « p-complétion profinie des groupes » degré par degré au groupe simplicial $\mathrm{G}X$: on obtient ainsi un pro-p-groupe simplicial $\widehat{\mathrm{G}X}^p$. L'espace profini classifiant $\overline{\mathrm{W}}\widehat{\mathrm{G}X}^p$ du pro-p-groupe simplicial $\widehat{\mathrm{G}X}^p$ est alors fibrant et le morphisme canonique $\widehat{X}\to\overline{\mathrm{W}}\widehat{\mathrm{G}X}^p$ est une équivalence faible [Re].

On peut généraliser cette construction et obtenir ainsi un autre exemple de foncteur p-complétion. On utilise à cet effet le travail de Dwyer et Kan sur la théorie homotopique des groupoïdes simpliciaux [D-K]. Si X est un ensemble fini simplicial, on note $\mathrm{G}X$ le groupoïde simplicial qui lui est associé dans [D-K] par une construction généralisant celle de Kan ; on construit ensuite le pro-p-groupoïde simplicial $\widehat{\mathrm{G}X}^p$ en appliquant degré par degré la p-complétion profinie des groupoïdes (un p-groupoïde fini est un groupoïde tel que l'ensemble de ses objets est fini et pour chaque objet le groupe des automorphismes de ce groupoïde est un p-groupe fini : la p-complétion profinie des groupoïdes associe à un groupoïde le système filtrant de ses p-groupoïdes finis « quotients »). Lorsque X est un espace profini arbitraire on pose :

$$\widehat{\mathrm{G}X}^p := \lim_{R\in\mathcal{R}(X)}\widehat{\mathrm{G}(X/R)}^p\,;$$

enfin on applique le foncteur classifiant de [D-K] (ou plutôt sa variante profinie évidente) à ce p-groupoïde profini simplicial pour obtenir l'espace profini $\overline{\mathrm{W}}\widehat{\mathrm{G}X}^p$. On peut alors vérifier que le couple formé du foncteur

$X \mapsto \overline{\mathrm{W}}\widehat{\mathrm{G}X}^p$ et de la transformation naturelle évidente $\mathrm{Id} \to \overline{\mathrm{W}}\widehat{G(\text{-})}^p$ est un foncteur p-complétion.

Comparaison avec le point de vue de Artin-Mazur-Sullivan [A-M], [Su].

Rappelons brièvement ce point de vue (pour plus de détails, voir par exemple [Mo]). On note p-$h\mathcal{S}$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $h\mathcal{S}$ dont les objets sont les espaces isomorphes à un p-espace fini (un tel espace est dit *p-π_*-fini* [La]). Artin et Mazur remarquent que pour tout espace X, le foncteur $p\text{-}h\mathcal{S} \to \mathcal{E}$, $F \mapsto [X, F]$ est pro-représentable; le pro-objet $\widehat{X}^{\mathrm{AM}}$ de la catégorie p-$h\mathcal{S}$ ainsi obtenu s'appelle le *p-complété profini d'Artin-Mazur* de l'espace X. Sullivan remarque de plus que le diagramme de la catégorie $h\mathcal{S}$ sous-jacent au pro-objet $\widehat{X}^{\mathrm{AM}}$ admet une limite notée $\widehat{X}^{\mathrm{Su}}$ (le *p-complété profini de Sullivan*).

On peut comparer cette approche avec l'approche précédente de la façon suivante. Soit X un espace profini. On lui associe le pro-objet de la catégorie p-$h\mathcal{S}$ défini comme suit : la catégorie (filtrante) d'indices est le produit de la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\mathcal{R}(X)$ et de deux copies de la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$; au triplet (R, s, t), on associe l'espace $\mathrm{P}^t(\mathrm{Tot}_s(\mathrm{Rés}^\bullet(X/R)))$ qui est un p-espace fini (voir ci-dessus); ce pro-objet est noté X^{AM}. Ce foncteur $\widehat{\mathcal{S}} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathcal{S}$, $X \mapsto X^{\mathrm{AM}}$ transforme les équivalences faibles en isomorphismes si bien qu'il induit un foncteur $h\widehat{\mathcal{S}} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathcal{S}$.

Le foncteur composé du foncteur $\widehat{(\text{-})} : h\mathcal{S} \to h\widehat{\mathcal{S}}$ (*cf.* prop. 1) et du foncteur précédent est isomorphe à la p-complétion d'Artin-Mazur $h\mathcal{S} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathcal{S}$, $X \mapsto \widehat{X}^{\mathrm{AM}}$: pour le voir, il suffit d'après [A-M] d'établir que pour tout espace X, le morphisme de pro-objets (de $h\mathcal{S}$) $X \to \widehat{X}^{\mathrm{AM}}$ induit un isomorphisme en cohomologie continue, ce qui est immédiat. Il en résulte que le foncteur $\widehat{(\text{-})} : h\mathcal{S} \to h\widehat{\mathcal{S}}$ est un « raffinement » du foncteur $h\mathcal{S} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathcal{S}$, $X \mapsto \widehat{X}^{\mathrm{AM}}$ (c'est un raffinement « strict » d'après la remarque ci-dessous). Enfin il est facile d'établir que pour tout espace X, l'espace $|\widehat{X}^p|$ est canoniquement $h\mathcal{S}$-isomorphe au p-complété profini de Sullivan.

REMARQUE. — Le foncteur $h\widehat{\mathcal{S}} \to \text{pro-}p\text{-}h\mathcal{S}$ précédent n'est pas une équivalence de catégories : on peut s'en convaincre en considérant un entier n et un espace profini X et en remarquant que l'application naturelle

$$[X, K(\mathbb{Z}_p, n)]_{h\widehat{\mathcal{S}}} \to \mathrm{Hom}_{\text{pro-}p\text{-}h\mathcal{S}}(X^{\mathrm{AM}}, K(\mathbb{Z}_p, n)) \cong \lim_k H^n(X; \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})$$

est surjective et que son noyau s'identifie naturellement au groupe $\lim^1\{H^{n+1}(X; \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z})\}$ qui n'est pas trivial en général.

Signalons par ailleurs que l'auteur ignore si un pro-objet de p-$h\mathcal{S}$ quelconque est toujours isomorphe à l'image X^{AM} d'un espace profini X.

2.2. Interprétation géométrique du foncteur T.

Espaces profinis fonctionnels.

Soit W un ensemble fini simplicial. Le foncteur $\widehat{\mathcal{S}} \to \widehat{\mathcal{S}}$, $X \mapsto W \times X$ admet un adjoint à droite que l'on note $Y \mapsto \underline{\mathrm{hom}}(W, Y)$; l'ensemble profini des n-simplexes de $\underline{\mathrm{hom}}(W, Y)$ est l'ensemble profini

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(W \times \Delta[n], Y)$$

limite sur les entiers ℓ et sur les éléments R de $\mathcal{R}(Y)$ des ensembles finis

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{S}}}(\mathrm{Sk}_\ell(W) \times \Delta[n], Y/R)$$

($\mathrm{Sk}_\ell(W)$ désignant le ℓ-squelette de W).

La paire de foncteurs adjoints $\widehat{\mathcal{S}} \to \widehat{\mathcal{S}}$, $X \mapsto W \times X$ et $\widehat{\mathcal{S}} \to \widehat{\mathcal{S}}$, $Y \mapsto \underline{\mathrm{hom}}(W, Y)$ vérifie les hypothèses du théorème 3 du § I.4 de [Qu1].

En effet, le foncteur $X \mapsto W \times X$ préserve les équivalences faibles (cela découle de la formule de Künneth) et les cofibrations et induit donc un foncteur $h\widehat{\mathcal{S}} \to h\widehat{\mathcal{S}}$ toujours noté $X \mapsto W \times X$. Le foncteur $\widehat{\mathcal{S}} \to \widehat{\mathcal{S}}$, $Y \mapsto \underline{\mathrm{hom}}(W, Y)$ préserve les fibrations (c'est immédiat en utilisant l'adjonction) et les équivalences faibles entres objets fibrants : en effet, une équivalence faible entre objets fibrants est une équivalence d'homotopie et le foncteur $Y \mapsto \underline{\mathrm{hom}}(W, Y)$ préserve les équivalences d'homotopie. Il résulte de la théorie de Quillen que le foncteur $\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{hom}}(W, \text{-}) : h\widehat{\mathcal{S}} \to h\widehat{\mathcal{S}}$ dérivé à droite du foncteur $\underline{\mathrm{hom}}(W, \text{-}) : \widehat{\mathcal{S}} \to \widehat{\mathcal{S}}$ est adjoint à droite du foncteur $h\widehat{\mathcal{S}} \to h\widehat{\mathcal{S}}$, $X \mapsto W \times X$.

Comme nous disposons de la résolution fibrante naturelle donnée par la p-complétion de Bousfield-Kan, le foncteur $\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{hom}}(W, \text{-}) : h\widehat{\mathcal{S}} \to h\widehat{\mathcal{S}}$ s'identifie ici au foncteur qui à tout espace profini Y associe l'espace profini $\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{hom}}(W, Y) := \underline{\mathrm{hom}}(W, \widehat{Y}^p)$.

$\mathcal{A}$-algèbres instables et foncteur T.

On note $\mathcal{K}$ la catégorie des algèbres instables sur l'algèbre de Steenrod modulo p (notée $\mathcal{A}$) encore appelées *$\mathcal{A}$-algèbres instables* (voir par exemple [La, § 1.7]).

Rappelons que pour tout ensemble simplicial X, la cohomologie modulo p de X, que l'on notera ici $H^*(X)$, possède une structure naturelle de $\mathcal{A}$-algèbre instable. De même, la cohomologie modulo p des espaces profinis « vit » naturellement dans la catégorie $\mathcal{K}$: en effet, pour tout espace profini X, le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel gradué $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ s'identifie à la colimite $\mathrm{colim}_{R \in \mathcal{R}(X)} H^*(X/R)$ et à ce titre possède une structure naturelle de $\mathcal{A}$-algèbre instable (induite par celle des $H^*(X/R)$).

Comme le remarque J. Lannes [La, § 1.13], la catégorie $\mathcal{K}$ doit en fait être considérée comme la catégorie où vivent naturellement les colimites filtrantes de $\mathcal{A}$-algèbres instables de dimension finie en chaque degré, dont l'exemple type est précisément la cohomologie modulo p des espaces profinis. Remarquons par exemple que l'on dispose toujours de la formule de Künneth pour la cohomologie modulo p des espaces profinis : si X et Y sont des espaces profinis, pour tout $R \in \mathcal{R}(X)$ et tout $S \in \mathcal{R}(Y)$ on a l'isomorphisme de Künneth

$$H^*(X/R) \otimes H^*(Y/S) \cong H^*\big((X/R) \times (Y/S)\big)$$

et en passant à la colimite en R et S, on obtient un isomorphisme de $\mathcal{A}$-algèbres instables $H^*X \otimes H^*Y \cong H^*(X \times Y)$.

Au contraire, la cohomologie modulo p d'un espace X, qui s'identifie au dual de son homologie modulo p, est munie naturellement d'une structure de $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel profini gradué pour laquelle le cup-produit et l'action des opérations de Steenrod sont continus. Oublier cette topologie sur la cohomologie modulo p d'un ensemble simplicial X, c'est en fait considérer la cohomologie modulo p de l'ensemble profini simplicial $\widehat{X}$ *via* l'isomorphisme naturel $H^*X \cong H^*\widehat{X}$ de l'exemple 2 du § 1.2.

Posons $H := H^*(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. J. Lannes introduit le foncteur

$$T : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}$$

adjoint à gauche du foncteur $K \mapsto H \otimes K$; autrement dit, pour toute paire (K, L) de $\mathcal{A}$-algèbres instables, on a une bijection naturelle :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(TL, K) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}}(L, H \otimes K).$$

(En fait, ce n'est pas la notation exacte : J. Lannes note $L \longmapsto (L : H)_{\mathcal{K}}$ (division par H) l'adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{K} \to \mathcal{K}$, $K \mapsto H \otimes K$. Le véritable foncteur T est l'adjoint à gauche du foncteur $\mathcal{U} \to \mathcal{U}$, $N \mapsto H \otimes N$, $\mathcal{U}$ désignant la catégorie des $\mathcal{A}$-modules à gauche instables (voir par exemple [S-E], [La]). Le foncteur T ainsi défini possède des propriétés remarquables (*cf.* [La]) qui impliquent finalement que pour toute $\mathcal{A}$-algèbre instable L, le morphisme canonique de $\mathcal{A}$-modules instables $TL \to (L : H)_{\mathcal{K}}$ est un isomorphisme ; c'est pourquoi on a également envie d'appeler T le foncteur $L \mapsto (L : H)_{\mathcal{K}}$, ce que l'on n'hésitera pas à faire dans ce qui suit !)

Le foncteur T est à la catégorie $\mathcal{K}$ ce que le foncteur $h\widehat{\mathcal{S}} \to h\widehat{\mathcal{S}}$, $X \mapsto \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X)$ est à la catégorie $h\widehat{\mathcal{S}}$ (remarquer que l'espace profini $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est fini en chaque degré) : en effet, ce dernier est l'adjoint à droite du foncteur $h\widehat{\mathcal{S}} \to h\widehat{\mathcal{S}}$, $X \mapsto \mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times X$.

Puisque le foncteur $H^*(\text{-}) : (h\widehat{\mathcal{S}})^{\text{opp}} \to \mathcal{K}$ envoie l'espace profini $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times X$ sur la $\mathcal{A}$-algèbre instable $H \otimes H^*X$ (à l'aide de l'isomorphisme de Künneth précédent), on en déduit un $\mathcal{K}$-morphisme naturel η : $T(H^*X) \to H^*(\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X))$ pour tout espace profini X.

THÉORÈME 1 (J. Lannes [La]). — *Pour tout p-espace fini X, le $\mathcal{K}$-morphisme naturel*

$$\eta : T(H^*X) \longrightarrow H^*\big(\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X)\big)$$

est un isomorphisme.

Dans [D-S], E. Dror-Farjoun et J. Smith donnent de ce théorème une démonstration reposant sur les propriétés du foncteur T et sur le théorème de convergence de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore de Dwyer [Dw].

En «passant à la colimite filtrante» et compte tenu du fait que le foncteur T commute aux colimites filtrantes (comme tout adjoint à gauche), on obtient immédiatement la variante suivante du théorème 1 (voir aussi [Mo]) :

THÉORÈME 1′. — *Pour tout pro-p-espace X, le $\mathcal{K}$-morphisme naturel*

$$\eta : T(H^*X) \longrightarrow H^*\big(\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X)\big)$$

est un isomorphisme.

(On pourra remarquer que pour tout pro-p-espace X, l'espace profini $\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X)$ est également un pro-p-espace car si Y est un p-espace fini il en est de même pour $\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, Y)$).

On en déduit deux autres variantes :

COROLLAIRE 1. — *Pour tout espace profini X, le $\mathcal{K}$-morphisme naturel*

$$\eta' : T(H^*X) \cong T(H^*\widehat{X}^p) \longrightarrow H^*\big(\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \widehat{X}^p)\big) \cong H^*\big(\mathrm{R}\,\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X)\big)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — On a vu (à la remarque suivant la démonstration de la proposition 2) que l'espace profini $\widehat{X}^p$ est un pro-p-espace et le $\mathcal{K}$-morphisme naturel $TH^*(\widehat{X}^p) \to H^*(\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \widehat{X}^p))$ est donc un isomorphisme d'après le théorème 1′. $\square$

COROLLAIRE 2. — *Pour tout espace profini fibrant X, le $\mathcal{K}$-morphisme naturel*

$$\eta : T(H^*X) \longrightarrow H^*\big(\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X)\big)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. — Puisque X est fibrant, le morphisme naturel θ_X : $X \to \widehat{X}^p$ qui est une équivalence faible d'après la proposition 2 est une équivalence d'homotopie; il en est donc de même pour le morphisme $\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X) \to \underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \widehat{X}^p)$ qui induit donc un isomorphisme en cohomologie et l'on conclut à l'aide du corollaire 1. $\square$

REMARQUE. — Pour tout ensemble simplicial X, on obtient ainsi une interprétation «concrète» de la $\mathcal{A}$-algèbre instable TH^*X : c'est la cohomologie modulo p de l'espace profini fonctionnel $\underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \widehat{X}^p)$ de source $\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et de but le p-complété de Bousfield-Kan de l'espace profini $\widehat{X}$.

On obtient également l'énoncé suivant (qui est à comparer avec le théorème 3.3.1 de [La] et le théorème 3.4.4 de [Mo]) :

COROLLAIRE 3. — *Soient X et Z deux espaces profinis fibrants et $f : Z \to \underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, X)$ un morphisme. Il y a équivalence entre les propriétés suivantes* :

(i) *f est une équivalence faible* (*en fait une équivalence d'homotopie*) ;

(ii) *le $\mathcal{K}$-morphisme $H^*f \circ \eta : TH^*X \to H^*Z$ est un isomorphisme.*

On a montré dans [Mo] comment un tel résultat permet de retouver les résultats de [La].

REMARQUE. — On peut établir qu'un morphisme entre deux espaces profinis fibrants est une équivalence faible si et seulement si l'application simpliciale sous-jacente est une équivalence faible (dans $\mathcal{S}$). La démonstration repose sur la suite spectrale de Serre (que nous n'avons pas construite ici; on peut l'obtenir en procédant comme dans [Dr]).

Ainsi, dans le corollaire 3 précédent, les deux conditions sont aussi équivalentes à la condition :

(iii) l'application simpliciale $|f| : |Z| \to \underline{\mathrm{hom}}(\mathrm{B}\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, |X|)$ est une équivalence faible (en fait une équivalence d'homotopie).

Signalons pour conclure que cette remarque permet d'affirmer que la condition (iii) du théorème 3.4.4. de [Mo] est bien équivalente aux conditions (i) et (ii), sans aucune hypothèse.

BIBLIOGRAPHIE

[A-M] ARTIN (M.) and MAZUR (B.). — *Étale homotopy.* — Lecture Notes in Math., t. **100**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1969.

[B-K] BOUSFIELD (A.K.) and KAN (D.M.). — *Homotopy limits, completions and Localizations.* — Lecture Notes in Math., t. **304**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

[D-K] DWYER (W.G.) and KAN (D.M.). — *Homotopy theory and simplicial groupoïds*, Ned. Akad. Wetensch. Indag. Math., t. **46**, n° 4, 1984, p. 379–385.

[Dr] DRESS (A.). — *Zur Spectralsequenz von Faserungen*, Inv. Math., t. **3**, 1967, p. 172–178.

[D-S] DROR FARJOUN (E.) and SMITH (J.). — *A Geometric interpretation of Lannes' functor T, Théorie de l'homotopie*, Astérisque, t. **191**, 1990, p. 87–95.

[Dw] DWYER (W.G.). — *Strong convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Topology, t. **13**, 1974, p. 255–265.

[G-Z] GABRIEL (P.) and ZISMAN (M.). — *Calculus of fractions and homotopy theory*, Ergebnisse der Math., t. **35**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[La] LANNES (J.). — *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p-groupe abélien élémentaire*, Publ. Math. I.H.E.S., t. **75**, 1992, p. 135–244.

[Ma] MAY (J.P.). — *Simplicial objects in algebraic topology.* — Van Nostrand Math. Studies, t. **11**, 1967.

[Mo] MOREL (F.). — *Quelques remarques sur la cohomologie modulo p continue des pro-p-espaces et les résultats de J. Lannes concernant les espaces fonctionnels* hom(BV, X), Ann. Scient. École Norm. Sup., t. **26**, 1993, p. 309–360.

[Qu1] QUILLEN (D.G.). — *Homotopical algebra.* — Lecture Notes in Math. t. **43**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.

[Qu2] QUILLEN (D.G.). — *Rationnal homotopy.* — Annals of Math., 1969.

[Qu3] QUILLEN (D.G.). — *An Application of simplicial profinite groups*, Comm. Math. Helv., t. **44**, 1969, p. 5–60.

[Re] RECTOR (D.L.). — *Homotopy theory of rigid profinite spaces I*, Pacif. J. of Math., t. **85**, n° 2, 1979, p. 413–445.

[S-E] STEENROD (N.E.) and EPSTEIN (B.B.A.). — *Cohomology operations.* — Princeton University Press, 1962.

[Se] SERRE (J.-P.). — *Cohomologie galoisienne.* — Lecture Notes in Math., t. **5**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1965.

[Su] SULLIVAN (D.). — *Genetics of homotopy theory and the Adams conjecture*, Annals of Math., t. **100**, 1974, p. 1–79.