BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LOUP WALDSPURGER

Quelques questions sur les intégrales orbitales unipotentes et les algèbres de Hecke

Bulletin de la S. M. F., tome 124, n° 1 (1996), p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1996__124_1_1_0>

Bull. Soc. math. France,
124, 1996, p. 1–34.

QUELQUES QUESTIONS SUR LES INTÉGRALES ORBITALES UNIPOTENTES ET LES ALGÈBRES DE HECKE

PAR

JEAN-LOUP WALDSPURGER (*)

RÉSUMÉ. — Pour un groupe réductif sur un corps local, on formule une conjecture exprimant la dimension de l'espace engendré par les restrictions des intégrales orbitales unipotentes à l'algèbre de Hecke-Iwahori.

ABSTRACT. — For a reductive group over a local field, we propose a conjecture that give the dimension of the space generated by the restrictions of unipotent integral orbitals to the Hecke-Iwahori algebra.

Introduction

Soient F un corps local non archimédien, $\underline{G}$ un groupe réductif connexe défini sur F et $G = \underline{G}(F)$. On suppose $\underline{G}$ quasi-déployé, déployé sur une extension non ramifiée de F. Fixons un sous-groupe d'Iwahori B de G et notons $\mathcal{X}$ l'espace des fonctions sur G, à valeurs complexes, à support compact et biinvariantes par B. Notons d'autre part U l'ensemble des orbites unipotentes de G. Pour tout $u \in U$, fixons une mesure sur u invariante par conjugaison. On définit alors une distribution J_u sur G, l'intégrale orbitale associée à u. On note $J_{u|\mathcal{X}}$ sa restriction à $\mathcal{X}$ et $D_u(\mathcal{X})$ le sous-espace du dual de $\mathcal{X}$ engendré par les formes linéaires $J_{u|\mathcal{X}}$ quand u parcourt U. On propose ci-dessous une formule conjecturale pour la dimension de $D_U(\mathcal{X})$.

(*) Texte recu le 9 mai 1994, révisé le 12 octobre 1994.
J.-L. WALDSPURGER, Université Paris 7, UFR de Mathématiques, URA 748 CNRS, 2, Place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05 (France).
Email : waldspur@mathp7.jussieu.fr.
Classification AMS : 11F70, 22E35.

Fixons maintenant un sous-groupe compact maximal hyperspécial K de G et notons $\mathcal{X}^K$ l'espace des fonctions sur G, à valeurs complexes, à support compact et biinvariantes par K. On définit comme ci-dessus un sous-espace $D_U(\mathcal{X}^K)$ du dual de $\mathcal{X}^K$ et on propose une formule conjecturale pour la dimension de $D_U(\mathcal{X}^K)$.

Ces formules nécessitent des constructions immobilières un peu subtiles pour l'auteur. Lequel a donc préféré les décrire à titre conjectural et vérifier leur validité dans le cas des groupes classiques non ramifiés. On démontre ensuite les conjectures pour les groupes $\mathrm{GL}(n)$ et $\mathrm{SL}(n)$. Il ne s'agit que d'une reformulation de résultats déjà connus dus à HALES et à l'auteur. Dans le cas des groupes classiques non ramifiés, on montre seulement que les formules proposées ont une certaine cohérence. On obtient des résultats très partiels en reformulant certains résultats de Magdy ASSEM.

On note $\mathfrak{O}$ l'anneau des entiers de F, $\mathbb{F}_q$ son corps résiduel et p la caractéristique de $\mathbb{F}_q$.

2. Constructions immobilières

2.1. — On décrit dans ce paragraphe les constructions immobilières conjecturales évoquées ci-dessus. On suppose dans tout le paragraphe 2 que p est « assez grand ». Soit $I(G)$ l'immeuble de Bruhat-Tits de G.

Commencons par décrire ce que nous appelerons les *sous-espaces affines distingués* de $I(G)$. Ce sont les sous-ensembles C de $I(G)$ obtenus ainsi : soit $A \subset I(G)$ un appartement; c'est un espace affine réel muni d'une décomposition en facettes; fixons une facette; alors C est le sous-espace affine de A qu'elle engendre. Soit donc C un tel sous-espace affine distingué de $I(G)$, notons M le sous-groupe des éléments de G qui fixent tout point de C. La théorie de Bruhat et Tits associe à C un groupe $\underline{M}$ sur $\mathfrak{O}$, lisse et tel que $M = \underline{M}(\mathfrak{O})$. Notons $\underline{M}^{\mathrm{red}}$ le plus grand quotient réductif de $\underline{M} \times_{\mathfrak{O}} \mathbb{F}_q$ et $M^{\mathrm{red}} = \underline{M}^{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_q)$. Il y a une application naturelle

$$p_M : M \longrightarrow M^{\mathrm{red}}$$

qui est surjective. Soit $N_G(M)$ le normalisateur de M dans G. Il y a une action de $N_G(M)$ sur M^{red} telle que p_M soit équivariante. Notons $U_G(M^{\mathrm{red}})$ l'ensemble des orbites pour l'action de $N_G(M)$ d'éléments unipotents de M^{red} et $U_G^{\mathrm{anis}}(M^{\mathrm{red}})$ le sous-ensemble des orbites anisotropes, *i.e.* qui ne coupent pas de Lévi propre de M^{red} défini sur $\mathbb{F}_q$. Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des sous-groupes M comme ci-dessus (quand on fait varier C), U' l'ensemble des couples (M, u_M) où $M \in \mathcal{M}$ et $u_M \in U_G^{\mathrm{anis}}(M^{\mathrm{red}})$. Le groupe G agit par conjugaison sur U' ; on note U'' l'ensemble des orbites.

Nous ferons les hypothèses suivantes.

HYPOTHÈSE 2.2. — *Soit* $(M, u_M) \in U'$. *L'ensemble des orbites* $u \in U$ *telles que* $u \cap p_M^{-1}(u_M) \neq \emptyset$ *est non vide et possède un unique élément de dimension minimale.*

Cet élément ne dépend que de la classe de conjugaison de (M, u_M). Cela définit une application $\varphi : U'' \to U$.

HYPOTHÈSE 2.3. — *L'application* φ *est une bijection.*

2.4. — Soit $M \in \mathcal{M}$. On note $\mathcal{F}_G^u(M^{\mathrm{red}})$ l'espace des fonctions sur M^{red} à support unipotent invariantes par conjugaison par $N_G(M)$ et $\mathcal{F}_{G,\mathrm{unif}}^u(M^{\mathrm{red}})$ le sous-espace des fonctions uniformes. (Rappelons qu'une fonction sur un groupe fini réductif connexe est dite *uniforme* si elle est combinaison linéaire des caractères $R_{T,\theta}$ de Deligne-Lusztig, *cf.* [C, chap. 7]; remarquons que les fonctions sur M^{red} à support unipotent sont *a fortiori* à support dans la composante neutre de M^{red}.) Notons

$$p_{\mathrm{unif}} : \mathcal{F}_G^u(M^{\mathrm{red}}) \longrightarrow \mathcal{F}_{G,\mathrm{unif}}^u(M^{\mathrm{red}})$$

la projection orthogonale. Si $X \subset M^{\mathrm{red}}$, notons $\mathbf{1}_X$ la fonction caractéristique de X. Notons $\mathcal{F}_{G,\mathrm{unif}}^{u,\mathrm{anis}}(M^{\mathrm{red}})$ l'espace engendré par les fonctions $p_{\mathrm{unif}}(\mathbf{1}_u)$ pour $u \in U_G^{\mathrm{anis}}(M^{\mathrm{red}})$. Fixons un ensemble de représentants $\{M_i\,;\ i = 1, \cdots, m\}$ des classes de conjugaison d'éléments de $\mathcal{M}$. Posons :

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{F}_{G,\mathrm{unif}}^{u,\mathrm{anis}}(M_i^{\mathrm{red}}).$$

On définit une application

$$\widetilde{\varphi} : U \longrightarrow \mathcal{F}$$

de la facon suivante. Soit $u \in U$. Il existe un unique $i \in \{1, \ldots, m\}$ et un unique $u_i \in U_G^{\mathrm{anis}}(M_i^{\mathrm{red}})$ tels que $\varphi(M_i, u_i) = u$. On note $\widetilde{\varphi}(u)$ l'élément de $\mathcal{F}$ dont la i-ième composante est $p_{\mathrm{unif}}(\mathbf{1}_{u_i})$ et dont les autres composantes sont nulles.

2.5. — Soit $M \in \mathcal{M}$. Notons $\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}(M^{\mathrm{red}})$ l'ensemble des classes de conjugaison par $N_G(M)$ de tores maximaux de $\underline{M}^{\mathrm{red}}$, définis sur $\mathbb{F}_q$ et elliptiques (*i.e.* non contenus dans un Lévi propre de $\underline{M}^{\mathrm{red}}$ défini sur $\mathbb{F}_q$). Notons $\mathcal{T}'$ l'ensemble des couples (M, T) où $M \in \mathcal{M}$ et $T \in \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}(M^{\mathrm{red}})$. Le groupe G agit par conjugaison sur $\mathcal{T}'$; on note $\mathcal{T}''$ l'ensemble des orbites.

Soit maintenant $\underline{T}$ un sous-tore de $\underline{G}$, maximal et non ramifié, *i.e.* déployé sur une extension non ramifiée de F. Il est naturellement défini sur $\mathfrak{O}$. Soient F' une extension non ramifiée de F, $\mathfrak{O}'$ son anneau d'entiers,

$G' = \underline{G}(F')$ et $I(G')$ l'immeuble de G'. L'immeuble $I(G)$ se plonge naturellement dans $I(G')$ et $\underline{T}(\mathfrak{O}')$ agit sur $I(G')$. Notons C_F l'ensemble des éléments de $I(G)$ fixes par $\underline{T}(\mathfrak{O}')$.

HYPOTHÈSE 2.6. — *Si F' est assez grand, $C_{F'}$ ne dépend pas de F' et est un sous-espace affine distingué de $I(G)$.*

2.7. — Notons simplement C le sous-espace ainsi défini ; soit $\underline{M}$ le groupe sur $\mathfrak{O}$ associé à C. Alors $\underline{T}$ (considéré comme défini sur $\mathfrak{O}$) se plonge dans $\underline{M}$ et définit donc un sous-groupe réduit $\underline{T}^{\mathrm{red}}$ de $\underline{M}^{\mathrm{red}}$.

HYPOTHÈSE. — *$\underline{T}^{\mathrm{red}}$ est un sous-tore maximal elliptique de M^{red}.*

2.8. — Notons $\mathcal{T}$ l'ensemble des classes de conjugaison de sous-tores maximaux de $\underline{G}$, non ramifiés. L'application $\underline{T} \mapsto (\underline{M}, \underline{T}^{\mathrm{red}})$ définit naturellement une application

$$\psi : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}''.$$

HYPOTHÈSE. — *L'application ψ est une bijection.*

3. Les conjectures

3.1. — Soit X un sous-ensemble de U. Notons $D_X(\mathcal{X})$ le sous-espace du dual de $\mathcal{X}$ engendré par les formes linéaires $J_{u|\mathcal{X}}$ pour $u \in X$ et $\mathcal{F}_X$ le sous-espace de $\mathcal{F}$ engendré par $\widetilde{\varphi}(X)$ (*cf.* 2.4).

QUESTION. — *A-t-on l'égalité* $\dim_{\mathbb{C}} D_X(\mathcal{X}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_X$ *?*

3.2. — On peut imaginer que pour tout $M \in \mathcal{M}$, on a l'égalité :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_{G,\mathrm{unif}}^{u,\mathrm{anis}}(M^{\mathrm{red}}) = \# \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}(M^{\mathrm{red}}).$$

Pour $X = U$, on peut conjecturer que la question ci-dessus admet une réponse positive. L'hypothèse 2.8 conduit alors à la

CONJECTURE. — *On a les égalités :*

$$\dim_{\mathbb{C}} D_U(\mathcal{X}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F} = \sum_{i=1}^{m} \# \mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}(M_i^{\mathrm{red}}) = \# \mathcal{T}.$$

L'explication des égalités extrêmes est la suivante. Soit

$$\{\underline{T}_i \,;\ i = 1, \ldots, t\}$$

un système de représentants des classes dans $\mathcal{T}$. Pour tout i, fixons un élément $x_i \in \underline{T}_i(\mathfrak{O})$ dont la réduction dans $(\underline{T}_{i_{\mathfrak{O}}} \times \mathbb{F}_q)(\mathbb{F}_q)$ soit régulière (un tel élément existe si p est assez grand). Munissons la classe de conjugaison de x_i dans G d'une mesure invariante et définissons l'intégrale orbitale $J(x_i)$ et sa restriction $J(x_i)_{|\mathcal{X}}$.

On peut penser que $J(x_i)_{|\mathcal{X}}$ ne dépend pas du choix de x_i et que $D_u(\mathcal{X})$ n'est autre que l'espace engendré par ces formes linéaires $J(x_i)_{|\mathcal{X}}$ pour $i = 1, \ldots, t$.

3.3. — Définissons l'espace $\mathcal{X}^K$ comme dans l'introduction. L'explication esquissée ci-dessus conduit à la conjecture ci-dessous. Considérons l'ensemble des données

$$(\underline{H}, {}^L H, s, \xi, \Theta)$$

où :

• $(\underline{H}, {}^L H, s, \xi)$ est une donnée endoscopique non ramifiée du groupe $\underline{G}$ (*cf.* [LS, § 1.2] et [H1, § 6]) ;

• Θ est une classe de conjugaison stable de tores maximaux elliptiques et non ramifiés de $\underline{H}$.

Deux telles données $(\underline{H}, {}^L H, ; s, \xi, \Theta)$ et $(\underline{H}, {}^L H', s', \xi' \Theta')$ seront dites *équivalentes* s'il existe un isomorphisme $\alpha : \underline{H} \to \underline{H}'$ défini sur F et un élément $g \in \widehat{G} \subset {}^L G$ tels que :

(i) $\xi' = \mathrm{Int}(g) \circ \xi \circ {}^L\alpha$, où ${}^L\alpha : {}^L H' \to {}^L H$ est l'isomorphisme associé à α et $\mathrm{Int}(g)$ la conjugaison par g ;

(ii) $\alpha(\Theta) = \Theta'$.

Remarque. — Notons qu'il n'y a pas de condition portant sur s et s'. En particulier, les conditions ci-dessus n'impliquent pas que les données $(\underline{H}, {}^L H, s, \xi)$ et $(\underline{H}', {}^L H', s', \xi')$ soient équivalentes au sens de [LS, § 1.2].

Notons θ le nombre de classes d'équivalence de telles données.

Conjecture. — A-t-on $\dim_{\mathbb{C}} D_U(\mathcal{X}^K) = \theta$?

4. Le cas des groupes linéaires

Proposition 4.1. — *Soit n un entier ≥ 1.*

(i) *Si $\underline{G} = \mathrm{GL}(n)$ les hypothèses du* § 2 *et les conjectures* 3.2 *et* 3.3 *sont toutes vérifiées et la question* 3.1 *admet une réponse positive.*

(ii) *Si $\underline{G} = \mathrm{SL}(n)$, il en est de même si $n < p$.*

Démonstration. — Soit V un espace de dimension n sur F.

4.2. — Supposons $\underline{G} = \mathrm{GL}(n)$. On identifie G à $\mathrm{GL}_F(V)$. Notons $P(n)$ l'ensemble des partitions de n, *i.e.* les suites $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ d'entiers telles que

$$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n.$$

L'ensemble U est en bijection avec $P(n)$: à un unipotent, on associe la partition définie par sa décomposition en blocs de Jordan.

Les sommets de $I(G)$ correspondent aux classes d'homothétie de réseaux de V. Soient $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de V et $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ une partition de n. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, notons L_i le $\mathfrak{O}$-module engendré par $e_{\Lambda(i-1)+1}, \ldots, e_{\Lambda(i)}$, où, pour tout j,

$$\Lambda(j) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_j.$$

A notre base et à $\underline{\lambda}$, on associe le sous-espace affine distingué de $I(G)$ dont les sommets sont les classes d'homothétie de réseaux de la forme

$$z_1 L_1 \oplus \cdots \oplus z_r L_r, \quad \text{avec} \quad z_1, \ldots, z_r \in F^\times.$$

Le groupe M associé est :

$$M = \big\{g \in \mathrm{GL}(V)\,;\ \forall i \in \{1, \ldots, r\},\ g(L_i) = L_i\big\}.$$

Tous les éléments de $\mathcal{M}$ sont obtenus ainsi. La classe de conjugaison du M ci-dessus ne dépend que de $\underline{\lambda}$. On a :

$$M \simeq \mathrm{GL}(\lambda_1, \mathfrak{O}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, \mathfrak{O}),$$

$$M^{\mathrm{red}} \simeq \mathrm{GL}(\lambda_1, \mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, \mathbb{F}_q).$$

Ce dernier groupe a pour seule orbite anisotrope l'orbite régulière.

L'hypothèse 2.2 est immédiate : un unipotent de $\mathrm{GL}(\lambda_i, \mathfrak{O})$ qui se projette sur un unipotent régulier de $\mathrm{GL}(\lambda_i, \mathbb{F}_q)$ est lui-même régulier. La construction ci-dessus met U'' en bijection avec $P(n)$. L'application φ de 2.3 se réduit à l'identité de $P(n)$.

Pour tout entier $\ell \geq 1$, notons F_ℓ l'extension non ramifiée de F de degré ℓ. Soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ une partition de n ; fixons un isomorphisme de V sur $F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_r}$. Alors le tore

$$T = F_{\lambda_1}^\times \times \cdots \times F_{\lambda_r}^\times$$

se plonge dans G. Sa classe de conjugaison ne dépend que de $\underline{\lambda}$. L'ensemble $\mathcal{T}$ s'identifie ainsi à $P(n)$. Pour le tore ci-dessus, choisissons une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\{e_{\Lambda(i-1)+1}, \ldots, e_{\Lambda(i)}\}$ soit une base sur $\mathfrak{O}$ de l'anneau des entiers $\mathfrak{O}_{\lambda_i}$ de F_{λ_i}.

On vérifie aisément que pour toute extension F' de F non ramifiée et assez grande, l'ensemble $C_{F'}$ de 2.6 associé à T n'est autre que le sous-espace affine distingué de $I(G)$ associé à la base ci-dessus et à $\underline{\lambda}$. Décrivons $\underline{T}^{\mathrm{red}}(\mathbb{F}_q)$: c'est l'image de $\mathcal{O}_{\lambda_1}^{\times} \times \cdots \times \mathcal{O}_{\lambda_r}^{\times}$ dans $\mathrm{GL}(\lambda_1, \mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, \mathbb{F}_q)$. C'est bien (l'ensemble des points sur $\mathbb{F}_q$ de) l'unique sous-tore maximal elliptique de ce dernier groupe. Cela vérifie les hypothèses 2.6 et 2.7, et 2.8 est immédiate.

On sait que l'ensemble $\{J_{u|\mathcal{X}^K} \; ; \; u \in U\}$ est linéairement indépendant (*cf.* [W1, cor. III.I). Les conjectures du paragraphe 3 en résultent immédiatement, ainsi que la réponse à la question 3.1.

4.3. — Supposons maintenant $\underline{G} = \mathrm{SL}(n)$. On identifie G à $\mathrm{SL}_F(V)$. On fixe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de V et une uniformisante ϖ de F.

Soit $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in P(n)$. Notons $g(\underline{\lambda})$ le pgcd de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$. Pour $\eta \in F^{\times}$, choisissons $\eta_1, \ldots, \eta_r \in F^{\times}$ tels que $\prod_{i=1}^{r} \eta_i = \eta$ et définissons un unipotent $x \in G$ par les formules : pour $i \in \{1, \ldots, r\}$ et $j \in \{\Lambda(i-1)+1, \ldots, \Lambda(i)\}$;

$$x(e_j) = \begin{cases} e_j + e_{j-1} & \text{si } j \geq \Lambda(i-1)+3, \\ e_j + \eta_i e_{j-1} & \text{si } j = \Lambda(i-1)+2, \\ e_j & \text{si } j = \Lambda(i-1)+1. \end{cases}$$

La classe de x ne dépend pas du choix des η_i et ne dépend que de la classe de η dans $F^{\times}/F^{\times g(\underline{\lambda})}$ (où pour tout $\ell \geq 1$, on pose $F^{\times \ell} = \{z^{\ell} \; ; \; z \in F^{\times}\}$). Toutes les classes unipotentes sont ainsi obtenues. Donc U est en bijection avec l'ensemble $P_{\mathrm{SL}}(n)$ des couples $(\underline{\lambda}, \eta)$ où $\underline{\lambda} \in P(n)$ et $\eta \in F^{\times}/F^{\times g(\underline{\lambda})}$.

A une base de V et à une partition $\underline{\lambda}$ de n, on associe encore un sous-espace affine distingué de $I(G)$. Sa classe de conjugaison ne dépend que de celle de l'ensemble de réseaux

$$\{z_1 L_1 \oplus \cdots \oplus z_r L_r \; ; \; z_1, \ldots, z_r \in F^{\times}\}$$

(les notations sont celles de 4.2). On voit facilement que l'ensemble des classes de conjugaison de sous-espaces affines distingués est en bijection avec l'ensemble $P'_{\mathrm{SL}}(n)$ des couples $(\underline{\lambda}, a)$ où $\underline{\lambda}$ est dans $P(n)$ et a dans $\{0, \ldots, g(\underline{\lambda})-1\}$. On décrit un ensemble de représentants des classes de la facon suivante. Pour $j \in \{n+1, \ldots, 2n\}$, posons :

$$e_j = \varpi e_{j-n}.$$

Soit $(\underline{\lambda}, a) \in P'_{\mathrm{SL}}(n), \underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$. Pour $i \in \{1, \ldots, r\}$, soit L_i

le $\mathfrak{O}$-module engendré par $e_{\Lambda(i-1)+a+1}, \dots, e_{\Lambda(i)+a}$. Le sous-espace affine associé à $(\underline{\lambda}, a)$ a pour sommets les classes d'homothétie de réseaux de la forme $z_1 L_1 \oplus \cdots \oplus z_r L_r$, avec $z_1, \dots, z_r \in F^\times$. On note $M_{\underline{\lambda},a}$ le fixateur de ce sous-espace affine. Alors

$$M_{\underline{\lambda},a} = \{g \in \mathrm{SL}(V)\,;\ \forall\, i \in \{1, \dots, r\},\ g(L_i) = L_i\};$$

$$M^{\mathrm{red}}_{\underline{\lambda},a} \simeq \Big\{(g_1, \dots, g_r);\ \text{pour tout } i,\ g_i \in \mathrm{GL}(\lambda_i, \mathbb{F}_q) \text{ et } \prod_{i=1}^{r} \det(g_i) = 1\Big\}.$$

Comme ci-dessus, on associe à tout $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times g(\underline{\lambda})}$ une classe unipotente anisotrope de $M^{\mathrm{red}}_{\underline{\lambda},a}$. Ces classes décrivent entièrement $U_G^{\mathrm{anis}}(M^{\mathrm{red}}_{\underline{\lambda},a})$. On en déduit que U'' est en bijection avec l'ensemble $P''_{\mathrm{SL}}(n)$ des triplets $(\underline{\lambda}, a, \varepsilon)$ où $\underline{\lambda} \in P(n)$, $a \in \{0, \dots, g(\underline{\lambda}) - 1\}$ et $\varepsilon \in \mathbb{F}_q^\times / \mathbb{F}_q^{\times g(\underline{\lambda})}$.

Comme $n < p$, $P''_{\mathrm{SL}}(n)$ et $P_{\mathrm{SL}}(n)$ sont en bijection : à $(\underline{\lambda}, a, \varepsilon)$ appartenant à $P''_{\mathrm{SL}}(n)$, on associe $(\underline{\lambda}, \omega^{-a}\varepsilon' F^{\times g(\underline{\lambda})})$, où ε' est un élément de $\mathfrak{O}$ dont la réduction appartient à ε. Il est alors facile de vérifier l'hypothèse 2.2 et de montrer que l'application φ de 2.3 est la bijection ci-dessus modulo nos identifications.

Décrivons maintenant l'ensemble $\mathcal{T}$. Pour alléger les notations, on ne décrira que les points sur F, ou $\mathbb{F}_q$, des tores considérés. On construit les tores maximaux non ramifiés de $\mathrm{SL}(V)$ de la même facon que ceux de $\mathrm{GL}(V)$, en remplaçant $F^\times_{\lambda_1} \times \cdots \times F^\times_{\lambda_r}$ par

$$\Big\{(z_1, \dots, z_r)\,;\ \text{pour tout i},\ z_i \in F^\times_{\lambda_i} \text{ et } \prod_{i=1}^{r} N_{F_{\lambda_i}/F}(z_i) = 1\Big\},$$

où $N_{F_\ell/F}$ désigne la norme de l'extension F_ℓ/F. La classe de conjugaison du tore obtenu est déterminée par un élément de l'ensemble des classes

$$F^\times_{\lambda_1} \times \cdots \times F^\times_{\lambda_r} \backslash \mathrm{Isom}(V, F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_r}) / \mathrm{SL}(V).$$

Alors $\mathcal{T}$ est en bijection avec $P'_{\mathrm{SL}}(n)$: pour $(\underline{\lambda}, a)$ appartenant à $P'_{\mathrm{SL}}(n)$ et $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, on identifie V à $F_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_r}$ de sorte que pour tout i, $\{e_{\Lambda(i-1)+a+1}, \dots, e_{\Lambda(i)+a}\}$ s'identifie à une base de $\mathfrak{O}_{\lambda_i}$ sur $\mathfrak{O}$ et on note $T_{\underline{\lambda},a}$ le tore associé à cette identification. L'élément de $\mathcal{M}$ associé à $T_{\underline{\lambda},a}$ est $M_{\underline{\lambda},a}$ et le tore réduit dans $M^{\mathrm{red}}_{\underline{\lambda},a}$ appartient à l'unique classe de conjugaison de tores elliptiques maximaux dans $M^{\mathrm{red}}_{\underline{\lambda},a}$. Ces descriptions vérifient les hypothèses 2.6, 2.7 et 2.8.

Pour tout M dans $\mathcal{M}$, l'espace $\mathcal{F}^{U,\mathrm{anis}}_{G,\mathrm{unif}}(M^{\mathrm{red}})$ est de dimension 1 : il est engendré par la fonction caractéristique de l'ensemble des éléments unipotents anisotropes de M^{red}. Identifions U à $P_{\mathrm{SL}}(n)$; notons

$$\xi : P_{\mathrm{SL}}(n) \longrightarrow P'_{\mathrm{SL}}(n)$$

la composée de l'inverse de la bijection $P''_{\mathrm{SL}}(n) \to P_{\mathrm{SL}}(n)$ décrite ci-dessus et de la projection évidente $P''_{\mathrm{SL}}(n) \to P'_{\mathrm{SL}}(n)$. Soit $X \subset P_{\mathrm{SL}}(n)$. Il résulte des considérations ci-dessus que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_X = \#\xi(X)$.

Soient $(\underline{\lambda}, \eta)$ et $(\underline{\lambda}', \eta') \in P_{\mathrm{SL}}(n)$; supposons $\xi(\underline{\lambda}, \eta') = \xi(\underline{\lambda}', \eta')$. Je dis qu'alors $J_{\underline{\lambda},\eta|\mathcal{X}}$ et $J_{\underline{\lambda}',\eta'|\mathcal{X}}$ sont proportionnelles, où l'on note $J_{\underline{\lambda},\eta}$ et $J_{\underline{\lambda}',\eta'}$, les intégrales orbitales unipotentes associées à $(\underline{\lambda}, \eta)$ et $(\underline{\lambda}', \eta')$. Notons $\underline{T}$ le tore de $\mathrm{GL}(V)$ qui stabilise les droites portées par les vecteurs de base et $T_0 = \underline{T}(\mathfrak{O})$. On peut supposer que le sous-groupe d'Iwahori fixé dans l'introduction est attaché à une alcôve dans l'appartement associé à $\underline{T} \cap \mathrm{SL}(V)$. Alors la conjugaison par T_0 respecte $\mathcal{X}$ et y agit trivialement. Comme $\xi(\underline{\lambda}, \eta) = \xi(\underline{\lambda}', \eta')$, on a $\underline{\lambda} = \underline{\lambda}'$ et on peut choisir des représentants, encore notés η et η', dans $F^\times$ de sorte que $\eta\eta'^{-1}$ est dans $\mathfrak{O}^\times$. Construisons comme au début de la démonstartion des éléments x (resp. x') attachés à $(\underline{\lambda}, \eta)$ (resp. $(\underline{\lambda}', \eta')$). Alors x et x' sont conjugués par un élément de T_0. Il existe donc $t \in T_0$ tel que $J_{\underline{\lambda},\eta} = cJ_{\underline{\lambda}',\eta'} \circ \mathrm{ad}(t)$, où c est un scalaire dépendant des choix des mesures. L'assertion en résulte. $\square$

Pour $(\underline{\lambda}, a) \in P'_{\mathrm{SL}}(n)$, posons alors :

$$J_{\underline{\lambda},a} = \sum J_{\underline{\lambda},\eta'},$$

où l'on somme sur les $(\underline{\lambda}, \eta) \in P_{\mathrm{SL}}(n)$ tels que $\xi(\underline{\lambda}, \eta) = (\underline{\lambda}, a)$. Alors les espaces engendrés par

$$\big\{J_{\underline{\lambda},\eta|\mathcal{X}}\,;\ (\underline{\lambda}, \eta) \in X\big\} \quad \text{et} \quad \big\{J_{\underline{\lambda},a|\mathcal{X}}\,;\ (\underline{\lambda}, a) \in \xi(X)\big\}$$

sont égaux. Or Hales [H2, th. 3.2] a prouvé que l'ensemble

$$\big\{J_{\underline{\lambda},a|\mathcal{X}}\,;\ (\underline{\lambda}, a) \in P'_{\mathrm{SL}}(n)\big\}$$

est linéairement indépendant. D'où :

$$\dim_{\mathbb{C}} D_X(\mathcal{X}) = \#\xi(X).$$

Cela montre que la question 3.1 admet une réponse positive. Grâce aux descriptions précédentes, cela implique la conjecture 3.2. $\square$

Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des caractères non ramifiés de $F^\times$ d'ordre divisant n. Pour tout diviseur d de n, on fixe un élément ε_d de $\mathcal{E}$ d'ordre d et l'on pose

$$\mathcal{E}^0 = \big\{\varepsilon_d\,;\ d \mid n\big\}.$$

Soient $\varepsilon \in \mathcal{E}$, $\underline{\lambda} \in P(n)$; notons $d(\varepsilon)$ l'ordre de ε et supposons que $d(\varepsilon)$ divise $g(\underline{\lambda})$. On pose :

$$J^{\varepsilon}_{\underline{\lambda}} = \sum_{a=0}^{g(\underline{\lambda})-1} \varepsilon(\omega^a) c_a J_{\underline{\lambda},a},$$

où les c_a sont des scalaires dépendant des mesures, choisis tels que l'on ait l'équation $J^\varepsilon_{\underline{\lambda}} \circ \mathrm{ad}(g) = \varepsilon(\det g)^{-1} J^\varepsilon_{\underline{\lambda}}$ pour tout $g \in GL(V)$. On pose :

$$D^\varepsilon = \{J^\varepsilon_{\underline{\lambda}|\mathcal{X}^K}\ ;\ \underline{\lambda} \in P(n),\ d(\varepsilon) \mid g(\underline{\lambda})\},$$

$$D = \{J^\varepsilon_{\underline{\lambda}|\mathcal{X}^K}\ ;\ \underline{\lambda} \in P(n),\ \varepsilon \in \mathcal{E}^0,\ d(\varepsilon) \mid g(\underline{\lambda})\}.$$

LEMME 4.4.

(i) *Soit $\varepsilon \in \mathcal{E}$. L'ensemble D^ε est linéairement indépendant.*

(ii) *Soient $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{E}$. Supposons $d(\varepsilon) = d(\varepsilon')$. Alors les espaces engendrés par D^ε et $D^{\varepsilon'}$ sont égaux.*

(iii) *L'ensemble D est linéairement indépendant.*

Démonstration. — Pour $\varepsilon = 1$, les distributions $J^1_{\underline{\lambda}|\mathcal{X}^K}$ se calculent en termes de transformés de Satake (*cf.* [W1, lemme III. 1.1]). Elles sont linéairement indépendantes et sont données par des fonctions C^∞ sur la partie imaginaire du tore maximal standard du groupe dual $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$. Notons que pour tout ε, l'espace engendré par D^ε est égal à celui engendré par les formes linéaires $J^\varepsilon(x)_{|\mathcal{X}^K}$ quand x parcourt les éléments semi-simples de tout voisinage assez petit de l'origine, où l'on note $J^\varepsilon(x)$ l'intégrale orbitale tordue par ε attachée à x. Le lemme fondamental (*cf.* [W2] en caractéristique 0, généralisé par HENNIART en caractéristique positive) montre alors que l'espace engendré par D^ε est égal à celui engendré par

$$\{\Delta \circ b^\varepsilon\ ;\ \Delta \in (D^1)'\}$$

où l'on note par des « $'$ » les objets relatifs au groupe

$$\{g \in \mathrm{GL}(n/d(\varepsilon), F_{d(\varepsilon)})\ ;\ N_{F_{d(\varepsilon)}/F} \circ \det(g) = 1\}$$

et où $b^\varepsilon : \mathcal{X}^K \to \mathcal{X}'^{K'}$ est le transfert. La dimension de l'espace engendré par D^ε est égale à celle de l'espace engendré par $(D^1)'$, dont on vient de voir qu'elle vaut $\#(D^1)'$. Or $\#D^\varepsilon = \#(D^1)'$. Cela démontre (i).

Comme b^ε ne dépend que de l'ordre de ε, on obtient aussi (ii).

Enfin la description ci-dessus montre que les formes linéaires $J^\varepsilon_{\underline{\lambda}|\mathcal{X}^K}$ s'expriment en termes de transformées de Satake comme des fonctions C^∞ sur une sous-variété T^ε de la partie imaginaire du tore maximal de $\mathrm{PGL}(n, \mathbb{C})$. Quand ε décrit $\mathcal{E}^0$, ces sous-variétés sont toutes distinctes. Une combinaison linéaire non triviale de telles distributions est donc non nulle et cela démontre (iii). $\square$

Les espaces engendrés par

$$\{J_{\underline{\lambda},\eta|\mathcal{X}^K}\ ;\ (\underline{\lambda},\eta)\in P_{\mathrm{SL}}(n)\},$$
$$\{J_{\underline{\lambda},a|\mathcal{X}^K}\ ;\ (\underline{\lambda},a)\in P'_{\mathrm{SL}}(n)\},$$
$$\{J^{\varepsilon}_{\underline{\lambda}|\mathcal{X}^K}\ ;\ \underline{\lambda}\in P(n),\ \varepsilon\in\mathcal{E},\ d(\varepsilon)\mid g(\underline{\lambda})\}$$

sont égaux. D'après le lemme, leur dimension est égale à

$$\sum_{d\,|\,n}\#P(n/d).$$

C'est aussi le nombre de classes d'équivalence de données $(\underline{H},{}^LH,s,\xi,\Theta)$ comme en 3.3 : à d divisant n et $\underline{\lambda}\in P(n/d)$, $\underline{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_r)$, on associe le groupe

$$\underline{H}=\Big\{(g_1,\dots,g_r)\ ;\ \text{pour tout } i,\ g_i\in\mathrm{GL}(\lambda_i,F_d)\ \text{et}\ \prod_{i=1}^{r}N_{F_d/F}\circ\det(g_i)=1\Big\}.$$

La construction de données s,ξ est aisée. Elles ne sont pas uniques mais les différentes données possibles sont équivalentes au sens de 3.3. (mais pas au sens de [LS, § 1.2]). Chacun de ces groupes possède une unique classe stable de sous-tores maximaux elliptiques non ramifiés. La conjecture 3.3 en résulte. $\square$

5. Le cas des groupes classiques non ramifiés

5.1. — On considère deux cas :

- V est un espace de dimension finie sur F muni d'une forme Q symplectique ou quadratique non dégénérée ; on suppose que V possède un sous-$\mathcal{O}$-réseau autodual ; $\underline{G}$ est la composante neutre du groupe d'isométries de V.

- E est l'extension quadratique non ramifiée de F, V est un espace de dimension finie sur E muni d'une forme hermitienne Q non dégénérée ; on suppose que V possède un sous-$\mathcal{O}_E$-réseau autodual (où $\mathcal{O}_E$ est l'anneau des entiers de E) ; $\underline{G}$ est le groupe d'isométries de V.

Proposition. — *Supposons $p\neq 2$. Sous les hypothèses ci-dessus, les hypothèses du § 2 sont toutes vérifiées. De plus, on a les égalités*

$$\dim_{\mathbb{C}}\mathcal{F}=\sum_{i=1}^{m}\#\mathcal{T}_G^{\mathrm{ell}}(M_i^{\mathrm{red}})=\#\mathcal{T}.$$

5.2. — *Démonstration.* On note N la dimension de V sur F dans les cas symplectique ou quadratique, sur E dans le cas hermitien, n le rang déployé de Q. On utilisera la notation suivante : une partition

$$\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$$

d'un entier k peut aussi s'écrire

$$\underline{\lambda} = (c_1 \times 1, c_2 \times 2, \dots, c_k \times k),$$

où c_i est la multiplicité avec laquelle intervient l'entier i dans la suite $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$.

Introduisons l'ensemble $P(V)$ suivant : c'est l'ensemble des couples $(\underline{\lambda}, (Q_i))$, où $\underline{\lambda} = (c_1 \times 1, \dots, c_N \times N) \in P(N)$ et

• si V est symplectique, $\underline{\lambda}$ vérifie : i impair $\Rightarrow$ c_i pair, et, pour tout entier i pair avec $2 \leq i \leq n$, Q_i est une classe de forme quadratique sur F non dégénérée de dimension c_i ;

• si V est quadratique, $\underline{\lambda}$ vérifie : i pair $\Rightarrow$ c_i pair, et, pour tout entier i impair avec $1 \leq i \leq N$, Q_i est une classe de forme quadratique sur F non dégénérée de dimension c_i ; on impose $\bigoplus_i Q_i \sim_a Q$, où par définition $Q' \sim_a Q''$ si Q' et Q'' ont même noyau anisotrope ;

• si V est hermitienne, pour tout entier i impair, resp. pair, Q_i est une classe de forme hermitienne (resp. antihermitienne) sur E non dégénérée de dimension c_i ; on impose $\bigoplus_{i \text{ impair}} Q_i \sim_a Q$ avec une notation analogue à ci-dessus.

(Il n'y a pas de donnée Q_i dans les cas non indiqués.)

Il est bien connu qu'il y a une application naturelle $U \to P(V)$ qui est une bijection sauf dans le cas où V est quadratique déployé et N est pair. Dans ce cas, l'application est surjective, la fibre au-dessus de $(\underline{\lambda}, (Q_i))$ a au plus deux éléments et en a deux si et seulement si $c_i = 0$ pour tout i impair. Pour faciliter la rédaction, on écrira la suite de la démonstration en supposant que l'on n'est pas dans le cas : V quadratique déployé et N pair. On signalera par des remarques ce qu'il faut modifier dans ce cas.

5.3. — Si L est un sous-$\mathfrak{O}$-réseau de V (ou un $\mathfrak{O}_E$-réseau de V), on pose :

$$\widetilde{L} = \{v \in V \,;\, \forall \ell \in L,\ Q(\ell, v) \in \mathfrak{O} \text{ (ou } \mathfrak{O}_E)\}.$$

Fixons une uniformisante ω de F. Les sommets de $I(G)$ correspondent aux réseaux L de V tels que

$$\omega\widetilde{L} \subset L \subset \widetilde{L}$$

et, si V est quadratique, $\widetilde{L}/L$ n'est pas de dimension 2 sur $\mathbb{F}_q$ et, si de plus $N = 2n$, $L/\omega\widetilde{L}$ n'est pas non plus de dimension 2.

Introduisons un ensemble I à $(N-2n)$ éléments, disjoints de $\mathbb{Z}$, posons

$$J = \{-n, \dots, -1\} \cup I \cup \{1, \dots, n\}.$$

On appellera *base standard* de V une base $\{e_j\ ;\ j \in J\}$ de v (sur F ou sur E) telle que

- $Q(e_j, e_k) = 0$ pour $j \in J - I$ et $k \in J - \{-j\}$;
- $Q(e_{-j}, e_j) = 1$ pour $j \in \{1, \dots, n\}$;
- le réseau L engendré par les vecteurs de base est autodual, *i.e.* on a $\widetilde{L} = L$.

Par hypothèse, il existe des bases standards.

Notons $P'(V)$ l'ensemble des triplets $(n', n'', \underline{\lambda})$, où n', n'' sont dans $\mathbb{N}$, $n' + n'' \leq n$, $\underline{\lambda} \in P(n - n' - n'')$ vérifiant

- $n' \neq 1$ si V est quadratique et $n'' \neq 1$ si de plus $N = 2n$.

Soient $\{e_i\ ;\ i \in J\}$ une base standard de V et $(n', n'', \underline{\lambda})$ un élément de $P'(V)$, $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$. On définit les sous-$\mathcal{O}$-modules (ou $\mathcal{O}_E$-modules) de V suivants :

- L_0 est engendré par les vecteurs

$$e_{-n}, \dots, e_{n'-n-1}, e_{-n''}, \dots, e_{-1}, e_j \quad \text{pour} \quad j \in I,$$
$$e_1, \dots, e_{n''},\ \omega e_{n-n'+1}, \dots, \omega e_n\ ;$$

- pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$,

  L_i^+ est engendré par $e_{n''+\Lambda(i-1)+1}, \dots, e_{n''+\Lambda(i)}$ et

  L_i^- est engendré par $e_{-n''-\Lambda(i)}, \dots, e_{-n''-\Lambda(i-1)-1}$

(on rappelle que $\Lambda(k) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$).

On associe à notre base et à notre élément de $P'(V)$ le sous-espace affine distingué C dont les sommets sont les réseaux L de la forme

$$L = L_0 \oplus z_1^+ L_1^+ \oplus \cdots \oplus z_r^+ L_r^+ \oplus z_1^- L_1^- \oplus \cdots \oplus z_r^- L_r^-,$$

avec $z_1^+, \dots, z_r^- \in F^\times$ et $z_i^+ z_i^- \in \mathcal{O}^\times \cup \omega\mathcal{O}^\times$ pour tout $i = 1, \dots, r$. Tout espace affine distingué est obtenu ainsi. La classe de conjugaison du C ci-dessus ne dépend que de l'élément de $P'(V)$.

REMARQUE. — Si V est quadratique et $N = 2n$, il y a deux classes de conjugaison de bases standards et tout triplet $(0, 0, \underline{\lambda})$ tel que $\underline{\lambda}$ ne contienne que des termes pairs donne naissance à deux classes de sous-espaces affines distingués.

Le fixateur de l'espace C ci-dessus est :

$$M = \{g \in G\,;\ g(L_0) = L_0 \text{ et pour tout } i \in \{1,\ldots,r\},\\ g(L_i^+) = L_i^+,\ g(L_i^-) = L_i^-\}.$$

Les espaces $\widetilde{L}_0/L_0$ (resp. $L_0/\omega\widetilde{L}_0$) (où $\widetilde{L}_0$ est le dual de L_0 dans $L_0 \otimes_{\mathfrak{O}} F$, ou $L_0 \otimes_{\mathfrak{O}_E} E$) sont munis de formes Q' (resp. Q''), à valeurs dans $\mathbb{F}_q$ ou $\mathbb{F}_{q^2}$. Le groupe M^{red} se décrit ainsi :

- si V est symplectique,

$$M^{\mathrm{red}} \simeq \mathrm{Sp}(2n', \mathbb{F}_q) \times \mathrm{Sp}(2n'', \mathbb{F}_q) \times \mathrm{GL}(\lambda_1, \mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, \mathbb{F}_q)\,;$$

- si V est quadratique,

$$M^{\mathrm{red}} \simeq \{(g_1, g_2) \in \mathrm{O}_{Q'} \times \mathrm{O}_{Q''}\,;\ \det(g_1)\det(g_2) = 1\}\\ \times \mathrm{GL}(\lambda_1, \mathbb{F}_q) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, \mathbb{F}_q),$$

où $\mathrm{O}_{Q'}$ (resp. $\mathrm{O}_{Q''}$) est le groupe orthogonal de la forme Q' (resp. Q'') ;

- si V est hermitien,

$$M^{\mathrm{red}} \simeq \mathrm{U}_{Q'} \times \mathrm{U}_{Q''} \times \mathrm{GL}(\lambda_1, \mathbb{F}_{q^2}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, \mathbb{F}_{q^2})$$

avec une notation analogue.

Les orbites unipotentes de ces groupes se décrivent comme pour G. Introduisons l'ensemble $P^{\mathrm{anis}}(n', n'', \underline{\lambda})$ suivant : c'est l'ensemble des quadruplets

$$(\underline{\lambda}', (Q_i'), \underline{\lambda}'', (Q_i'')),$$

où

$$\underline{\lambda}' = (c_1' \times 1, \ldots, c_{2n'}' \times 2n') \in P(2n')$$
$$\underline{\lambda}'' = (c_1'' \times 1, \ldots, c_{N''}'' \times N'') \in P(N''),$$

avec $N'' = N - 2n + 2n''$, tels que

- si V est symplectique, $c_i' = c_i'' = 0$ pour tout i impair ; pour tout entier i pair, Q_i' (resp. Q_i'') est une classe de forme quadratique sur $\mathbb{F}_q$ anisotrope de dimension c_i' (resp. c_i'') (ce qui impose $c_i' \leq 2$, $c_i'' \leq 2$) ;

- si V est quadratique, $c_i' = c_i'' = 0$ pour tout i pair ; pour tout entier i impair, Q_i' et Q_i'' sont comme ci-dessus ; on impose que $\bigoplus_i Q_i'$ est déployée et $\bigoplus_i Q''_i \sim_a Q''$; remarquons que les noyaux anisotropes de Q' et Q'' sont uniquement déterminés par l'espace V ; en particulier Q' est déployée ;

- si V est hermitien, $c'_i \leq 1$ et $c''_i \leq 1$ pour tout i.

Alors les orbites anisotropes de M^{red} sont en bijection avec

$$P^{\mathrm{anis}}(n', n'', \underline{\lambda}).$$

Notons que ces orbites sont toutes stables par $N_G(M)$.

Notons $P''(V)$ l'ensemble des données $(n', n'', \underline{\lambda}, \underline{\lambda}', (Q'_i), \underline{\lambda}'', (Q''_i))$ telles que $(n', n'', \underline{\lambda}) \in P'(V)$ et $(\underline{\lambda}', (Q'_i), \underline{\lambda}'', (Q''_i)) \in P^{\mathrm{anis}}(n', n'', \underline{\lambda})$. Alors U'' est en bijection avec $P''(V)$.

Remarque. — Si V est quadratique et $N = 2n$, il ne s'agit pas de bijection. Un élément de $P''(V)$ pour lequel $n' = n'' = 0$ et $\underline{\lambda}$ ne contient que des termes pairs donne naissance à deux classes dans U''.

5.4. — Remarquons qu'une forme quadratique R sur un espace sur F s'écrit sous la forme

$$R = R^1 \oplus \omega^{-1}\widetilde{R}' \oplus \widetilde{R}'',$$

où R^1 est déployée, $\widetilde{R}'$ et $\widetilde{R}''$ sont anisotropes et possèdent des réseaux autoduaux. Les formes $\widetilde{R}'$ et $\widetilde{R}''$ définissent des réductions naturelles R' et R'' sur $\mathbb{F}_q$. On associe à R les données

$$R', \quad R'', \quad c' = \dim R', \quad c'' = \dim R'', \quad c^1 = \dim R^1.$$

Il y a un procédé analogue pour les formes hermitiennes ou anti-hermitiennes.

Soit alors $(\underline{\lambda}, (Q_i)) \in P(V)$, où $\underline{\lambda} = (c_1 \times 1, \ldots, c_N \times N)$. Associons à chaque Q_i des données Q'_i, Q''_i, c'_i, c''_i, c^1_i. On définit

$$\xi\big(\underline{\lambda}, (Q_i)\big) = \big(n', n'', \underline{\lambda}^1, \underline{\lambda}', (Q'_i), \underline{\lambda}'', (Q''_i)\big)$$

par :

- si V est symplectique,

$$\underline{\lambda}^1 = \big(\big(\tfrac{1}{2}c^*_1\big) \times 1, \ldots, \big(\tfrac{1}{2}c^*_n\big) \times n\big),$$

où $c^*_i = c_i$ ou c^1_i selon que i est impair ou pair,

$$n' = \tfrac{1}{2} \sum_{i \text{ pair}} ic'_i, \quad n'' = \tfrac{1}{2} \sum_{i \text{ pair}} ic''_i,$$

$$\underline{\lambda}' = (c'_2 \times 2, c'_4 \times 4, \ldots, c'_N \times N),$$

$$\underline{\lambda}'' = (c''_2 \times 2, c''_4 \times 4, \ldots, c''_N \times N),$$

Q'_i et Q''_i sont les formes associées à Q_i ;

• si V est quadratique, $\underline{\lambda}^1$ est comme ci-dessus, où cette fois $c_i^* = c_i$ ou c_i^1 selon que i est pair ou impair,

$$\begin{aligned} &n' = \tfrac{1}{2} \sum_{i \text{ impair}} ic'_i, \quad n'' = \tfrac{1}{2}\Big(2n - N + \sum_{i \text{ impair}} ic''_i\Big), \\ &\underline{\lambda}' = (c'_1 \times 1, c'_3 \times 3, \ldots, c'_{N^*} \times N^*), \\ &\underline{\lambda}'' = (c''_1 \times 1, c''_3 \times 3, \ldots, c''_{N^*} \times N^*) \end{aligned}$$

avec $N^* = N$ ou $(N-1)$ selon que N est impair ou pair ; Q'_i et Q''_i sont les formes associées à Q_i ;

• si V est hermitien,

$$\begin{aligned} &\underline{\lambda}^1 = \big((\tfrac{1}{2}c_1^1) \times 1, (\tfrac{1}{2}c_2^1) \times 2, \ldots, (\tfrac{1}{2}c_n^1) \times n\big), \\ &n' = \tfrac{1}{2} \sum_i ic'_i, \quad n'' = \tfrac{1}{2}\Big(2n - N + \sum_i ic''_i\Big), \\ &\underline{\lambda}' = (c'_1 \times 1, c'_2 \times 2, \ldots, c'_N \times N), \\ &\underline{\lambda}'' = (c''_1 \times 1, c''_2 \times 2, \ldots, c''_N \times N) \, ; \end{aligned}$$

il n'y a pas de données Q'_i, Q''_i.

Remarquons que dans le cas quadratique, les hypothèses $\bigoplus_{i \text{ impair}} Q_i \sim_a Q$ et Q admet un réseau autodual impliquent que $\bigoplus_{i \text{ impair}} Q'_i$ est déployée et que $\bigoplus_{i \text{ impair}} Q''_i \sim_a Q''$. En particulier n' et n'' sont bien entiers et ≥ 0.

Une remarque analogue vaut dans le cas hermitien.

On vérifie aisément que $\xi(\underline{\lambda}, (Q_i))$ appartient à $P''(V)$ et que ξ ainsi définie est une bijection de $P(V)$ sur $P''(V)$. On en déduit une bijection entre U et U''.

REMARQUE. — Dans le cas V quadratique, $N = 2n$, les éléments de $P(V)$ (resp. $P''(V)$) dont la fibre dans U (resp. U'') a deux éléments se correspondent. On peut préciser la bijection sur ces fibres en faisant choix d'une classe de base standard.

LEMME 5.5. — *L'hypothèse* 2.2 *est vérifiée et l'application* φ *de* 2.3 *est l'inverse de la bijection déduite de* ξ.

La structure des éléments de $\mathcal{M}$ nous ramène au cas d'un sous-groupe d'un groupe linéaire, pour lequel le résultat a déjà été vu, et à celui d'un sous-groupe M attaché à un élément de $P'(V_0)$ de la forme $(n', n'', \emptyset)$ pour un espace V_0 de même type que V et de dimension inférieure. Traitons ce cas. Soient donc $(n', n'', \emptyset) \in P'(V)$, $\{e_i\,;\ i \in J\}$ une base standard. On construit un réseau L_0 comme ci-dessus et on pose

$$M = \{g \in G\,;\ g(L_0) = L_0\}.$$

Soient $(\underline{\lambda}', (Q_i'), \underline{\lambda}'', (Q_i'')) \in P^{\mathrm{anis}}(n', n'', \emptyset)$ et x un élément de l'orbite unipotente anisotrope de M^{red} associée. Écrivons

$$\underline{\lambda}' = (c_1' \times 1, \dots, c_{2n'}' \times 2n'), \quad \underline{\lambda}'' = (c_1'' \times 1, \dots, c_{N''}'' \times N''),$$

posons

$$\underline{\lambda} = (c_1 \times, \dots, c_N \times N)$$

où $c_i = c_i' + c_i''$ pour tout i (avec par exemple $c_i' = 0$ si $i > 2n'$). Dans les cas symplectique ou quadratique, chaque forme Q_i' (resp. Q_i'') se relève en une forme sur F possédant un réseau autodual. On note $\widetilde{Q}_i'$ (resp. $\widetilde{Q}_i''$) cette forme. Dans le cas hermitien, on prend pour $\widetilde{Q}_i'$ (resp. $\widetilde{Q}_i''$) l'unique forme de dimension c_i' (resp. c_i'') possédant un réseau autodual. En tout cas, on pose :

$$\widetilde{Q}_i = \omega^{-1}\widetilde{Q}_i' + \widetilde{Q}_i''.$$

Alors $(\underline{\lambda}, (\widetilde{Q}_i))$ est dans $P(V)$. On lui associe une orbite unipotente u de G. On doit prouver :

(i) $u \cap p_M^{-1}(x) \neq \emptyset$;

(ii) si $u^0 \in U$ vérifie $u^0 \neq u$ et $u^0 \cap p_M^{-1}(x) \neq \emptyset$, alors $\dim_F u^0 > \dim_F u$.

Pour (i), il suffit d'écrire x sous une forme matricielle simple et de relever convenablement les coefficients de la matrice.

Démontrons (ii). Soient u^0 vérifiant les hypothèses de (ii), $(\underline{\lambda}^0, (\widetilde{Q}_i^0))$ l'élément de $P(V)$ associé et y un élément de $u^0 \cap p_M^{-1}(x)$. Notons

$$\ell' = \widetilde{L}_0 / L_0, \quad \ell'' = L_0 / \omega \widetilde{L}_0, \quad p' : \widetilde{L}_0 \to \ell', \quad p'' : L_0 \to \ell''$$

les projections naturelles. Posons

$$X = 2(x-1)(x+1)^{-1}, \quad Y = 2(y-1)(y+1)^{-1}.$$

Alors X (resp. Y) est un élément nilpotent de l'algèbre de Lie du groupe d'isométries de $\ell' \times \ell''$ (resp. V). On a $Y(L_0) \subset L_0$ et la réduction naturelle de Y est égale à X. L'élément X se décompose en $X' + X''$ où X' (resp. X'') appartient à l'algèbre de Lie du groupe d'isométries de ℓ' (resp. ℓ'').

Soit i un entier ≥ 1. L'espace $\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \widetilde{L}_0/\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \omega\widetilde{L}_0$ est de dimension sur $\mathbb{F}_q$ égale à $\dim_F \operatorname{Ker}(Y^i)$ (il faut changer F en E et $\mathbb{F}_q$ en $\mathbb{F}_{q^2}$ dans le cas hermitien, ici comme dans la suite). Il a pour sous-espace $\operatorname{Ker}(Y^i) \cap L_0/\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \omega\widetilde{L}_0$. D'où

$$\begin{aligned}\dim_F\big(\operatorname{Ker}(Y^i)\big) = \dim_{\mathbb{F}_q}&\big(\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \widetilde{L}_0)/\operatorname{Ker}(Y^i) \cap L_0\big)\\ &+ \dim_{\mathbb{F}_q}\big(\operatorname{Ker}(Y^i) \cap L_0/\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \omega\widetilde{L}_0\big).\end{aligned}$$

Or p' est injective sur $\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \widetilde{L}_0/\operatorname{Ker}(Y^i) \cap L_0$, d'image incluse dans $\operatorname{Ker}(X'^i)$. D'où :

$$\dim_{\mathbb{F}_q}\big(\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \widetilde{L}_0/\operatorname{Ker}(Y^i) \cap L_0\big) \leq \dim_{\mathbb{F}_q}\big(\operatorname{Ker}(X'^i)\big).$$

De même :

$$\dim_{\mathbb{F}_q}\big(\operatorname{Ker}(Y^i) \cap L_0\big)/\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \omega\widetilde{L}_0 \leq \dim_{\mathbb{F}_q}\big(\operatorname{Ker}(X''^i)\big).$$

D'où :

$$\dim_F \operatorname{Ker}(Y^i) \leq \dim_{\mathbb{F}_q}\big(\operatorname{Ker}(X'^i)) + \dim_{\mathbb{F}_q}(\operatorname{Ker}(X''^i)\big).$$

Mais cela implique que $\underline{\lambda}^0 \geq \underline{\lambda}$ pour l'ordre usuel des partitions. Donc

$$\dim_F u^0 \geq \dim_F u.$$

On n'a l'égalité que si $\underline{\lambda}^0 = \underline{\lambda}$, ce que l'on suppose désormais. Alors

$$p'(\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \widetilde{L}_0) = \operatorname{Ker}(X'^i), \quad p''(\operatorname{Ker}(Y^i) \cap L_0) = \operatorname{Ker}(X''^i)$$

pour tout i.

Supposons par exemple V symplectique. Pour tout i pair, Q'_i est le noyau non dégénéré de la forme quadratique R'_i définie sur $\operatorname{Ker}(X'^i)$ par

$$R'_i(v,w) = Q'\big(X'^{i-1}(v), w\big)$$

pour $v, w \in \operatorname{Ker}(X'^i)$, où Q' est la forme symplectique sur ℓ'. On a des descriptions analogues pour Q''_i et $\widetilde{Q}^0_i$. Fixons des éléments $e'_1, \ldots, e'_{c'_i}$ de $\operatorname{Ker}(Y^i) \cap \widetilde{L}_0$ (resp. $e''_1, \ldots, e''_{c''_i}$ de $\operatorname{Ker}(Y^i) \cap L_0$), de sorte que $\{p'(e'_1), \ldots, p'(e'_{c'_i}\}$ (resp. $\{p''(e''_1), \ldots, p''(e''_{c''_i})\}$) soit une base d'un supplémentaire du noyau de R'_i (resp. R''_i). L'ensemble $\{e'_1, \ldots, e'_{c'_i}, e''_1, \ldots, e''_{c''_i}\}$

est linéairement indépendant. Écrivons la matrice $Q(Y^{i-1}(v), w)$ où v et w parcourent les éléments de cet ensemble. Elle est de la forme

$$\begin{bmatrix} \omega^{-1}A & B \\ B' & C \end{bmatrix}$$

où A, B, B', C sont entières et les réductions de A (resp. C) sont les matrices des formes Q'_i (resp. Q''_i). Il est facile d'en déduire que la forme définie par la matrice ci-dessus est équivalente à $\widetilde{Q}_i$. D'après la description ci-dessus de $\widetilde{Q}_i^0$, $\widetilde{Q}_i$ est donc « représentée » par $\widetilde{Q}_i^0$ (*i.e.* équivalente à la restriction de $\widetilde{Q}_i^0$ à un sous-espace d'un espace dans lequel se réalise $\widetilde{Q}_i^0$). Comme $\widetilde{Q}_i$ et $\widetilde{Q}_i^0$ ont même dimension, elles sont donc équivalentes. Mais cela prouve que $u^0 = u$. Un raisonnement analogue vaut dans les cas quadratique et hermitien. □

5.6. — Décrivons les tores maximaux non ramifiés de G. Une description analogue vaut pour les tores ramifiés, mais est techniquement un peu plus compliquée. Rappelons que pour tout entier $\ell \geq 1$, on note F_ℓ l'unique extension non ramifiée de F de degré ℓ. Si ℓ divise ℓ', on note $N_{\ell'/\ell}$ et $\mathrm{Tr}_{\ell'/\ell}$ la norme et la trace de l'extension $F_{\ell'/\ell}$. Commencons par construire des tores élémentaires de groupe symplectiques, orthogonaux ou unitaires, où l'on abandonne l'hypothèse que les espaces possèdent des réseaux autoduaux.

(1) *Cas symplectique.*

Type (I). — Soit ℓ un entier ≥ 1. On munit l'espace $F_\ell \oplus F_\ell$ de la forme symplectique

$$Q\big((v, v'), (w, w')\big) = \mathrm{Tr}_{\ell/1}(vw' - v'w).$$

Le tore $F_\ell^\times$ se plonge naturellement dans $\mathrm{Sp}(F_\ell \oplus F_\ell)$.

Type (II). — Soient ℓ un entier ≥ 1 et $\eta \in F_{2\ell}^\times$ tel que $\mathrm{Tr}_{2\ell/\ell}(\eta) = 0$. Notons σ l'élément non trivial du groupe de Galois de $F_{2\ell}/F_\ell$. Munissons l'espace $F_{2\ell}$ de la forme symplectique

$$Q(v, w) = \mathrm{Tr}_{2\ell/1}\big(v\sigma(w)\eta\big).$$

Alors le tore $F_{2\ell}^1 = \{x \in F_{2\ell}^\times\,;\ N_{2\ell/\ell}(x) = 1\}$ se plonge dans $\mathrm{Sp}(F_{2\ell})$. La classe d'isomorphie du couple formé du tore et de la forme Q ne dépend que de η modulo le groupe $N_{2\ell/\ell}(F_{2\ell}^\times)$. On obtient donc deux classes d'isomorphie. On dira que la classe est de type (II_1) si la valuation de η est paire, de type (II_2) si elle est impaire. Dans la suite, on supposera que cette valuation est 0 dans le cas (II_1), 1 dans le cas (II_2).

(2) *Cas quadratique.*

Type (I). — Analogue au précédent.

Type (II). — Soient ℓ un entier ≥ 1 et $\eta \in F_\ell^\times$. Munissons l'espace $F_{2\ell}$ de la forme quadratique

$$Q(v,w) = \mathrm{Tr}_{2\ell/1}\big(v\sigma(w)\eta\big).$$

Alors le tore $F_{2\ell}^1$ se plonge dans $\mathrm{SO}(F_{2\ell})$ et on obtient de nouveau deux classes d'isomorphie du couple formé du tore et de la forme Q, que l'on appellera encore type (II_1) et type (II_2). Rappelons qu'une forme quadratique Q non dégénérée est déterminée par sa dimension, son discriminant $d(Q) \in F^\times/F^{\times 2}$ et son invariant de Hasse $\varepsilon(Q) \in \{\pm 1\}$ (on normalise $d(Q) = (-1)^{[(\dim Q)/2]}\det(Q)$, où $\det(Q)$ est le déterminant de la matrice de Q dans une base quelconque et $[\frac{1}{2}\dim Q]$ est la partie entière de $\frac{1}{2}\dim Q$. Pour la forme ci-dessus, on calcule aisément $d(Q)$: c'est l'élément non trivial de $\mathfrak{O}^\times/\mathfrak{O}^{\times 2}$; et $\varepsilon(Q)$ vaut 1 dans le cas (II_1) et -1 dans le cas (II_2).

(3) *Cas hermitien.*

Type (I). — Soient ℓ un entier ≥ 1 et τ un élément du groupe de Galois de $F_{2\ell}/F$ tel que $\tau_{|F_2}$ soit non trivial (notons que $F_2 = E$). On munit l'espace $F_{2\ell} \oplus F_{2\ell}$ de la forme hermitienne

$$Q\big((v,v'),(w,w')\big) = \mathrm{Tr}_{2\ell/2}\big(v\tau(w') + v'\tau^{-1}(w)\big).$$

Le tore $F_{2\ell}^\times$ se plonge naturellement dans $\mathrm{U}(F_{2\ell} \oplus F_{2\ell})$.

Type (II). — Soient ℓ un entier impair ≥ 1 et $\eta \in F_\ell^\times$. Munissons l'espace $F_{2\ell}$ de la forme hermitienne

$$Q(v,w) = \mathrm{Tr}_{2\ell/2}\big(v\sigma(w)\eta\big).$$

Le tore $F_{2\ell}^1$ se plonge dans $\mathrm{U}(F_{2\ell})$ et on obtient encore deux classes d'isomorphie que l'on appellera type (II_1) et type (II_2). Rappelons qu'une forme hermitienne Q non dégénérée est déterminée par sa dimension et son discriminant $d(Q) \in F^\times/N_{E/F}(E^\times)$, normalisé comme ci-dessus. Pour la forme ci-dessus, on calcule $d(Q)$: c'est 1 dans le cas (II_1), l'élément non trivial de $F^\times/N_{E/F}(E^\times)$ dans le cas (II_2).

Revenons à notre espace V de départ. Notons $P_T(V)$ l'ensemble des triplets $(\underline{\lambda}^0, \underline{\lambda}^1, \underline{\lambda}^2)$ tels que $\underline{\lambda}^0$ (resp. $\underline{\lambda}^1, \underline{\lambda}^2$) sont des partitions d'entiers ℓ^0 (resp. ℓ^1, ℓ^2) tels que :

• si V est symplectique, $\ell^0+\ell^1+\ell^2=n$;

• si V est quadratique et N impair, $\ell^0+\ell^1+\ell^2=n$ et $r(\underline{\lambda}^2)$ est pair, où l'on note $r(\underline{\lambda})$ le nombre de termes d'une partition $\underline{\lambda}$;

• si V est quadratique et N pair, $\ell^0+\ell^1+\ell^2=\frac{1}{2}N$, $r(\underline{\lambda}^2)$ est pair et $r(\underline{\lambda}^1)\equiv\frac{1}{2}N-n \bmod 2$;

• si V est hermitien, $2\ell^0+\ell^1+\ell^2=N$, $r(\underline{\lambda}^2)$ est pair et tous les termes de $\underline{\lambda}^1$ et $\underline{\lambda}^2$ sont impairs.

Soit $(\underline{\lambda}^0,\underline{\lambda}^1,\underline{\lambda}^2)\in P_T(V)$. On construit un espace V' muni d'une forme Q' de la façon suivante. Supposons V symplectique. A tout terme λ_i^0 (resp. λ_i^1,λ_i^2) de la partition $\underline{\lambda}^0$ (resp. $\underline{\lambda}^1,\underline{\lambda}^2$), on associe l'espace $F_{\lambda_i^0}\oplus F_{\lambda_i^0}$ (resp. $F_{2\lambda_i^1}$, $F_{2\lambda_i^2}$) muni d'une forme de type (I) (resp. (II_1), (II_2)).

On note V' la somme de ces espaces et Q' la somme orthogonale des formes sur chaque espace. Le tore

$$F_{\lambda_1^0}^\times\times\cdots F_{\lambda_{r^0}^0}^\times\times F_{2\lambda_1^1}^1\times\cdots\times F_{2\lambda_{r^1}^1}^1\times F_{2\lambda_1^2}^1\cdots\times F_{2\lambda_{r^2}^2}^1$$

(avec une notation évidente) se plonge dans $\mathrm{Sp}(V')$. Mais V' muni de Q' est isomorphe à V muni de Q. Le choix d'un isomorphisme définit un plongement du tore précédent dans G. La classe de conjugaison du tore obtenu ne dépend que de $(\underline{\lambda}^0,\underline{\lambda}^1,\underline{\lambda}^2)$. Tout tore maximal non ramifié de G est ainsi obtenu. Si V est hermitien, la construction est analogue. Si V est quadratique, il y a deux modifications :

(a) si N est impair, on rajoute pour construire V' un espace de dimension 1 muni de l'unique forme quadratique telle que la somme orthogonale Q' de toutes les formes soit isomorphe à Q ;

(b) le tore obtenu ne dépend que de $(\underline{\lambda}^0,\underline{\lambda}^1,\underline{\lambda}^2)$ à conjugaison près par $\mathrm{O}(V)$. Comme on travaille avec $G=\mathrm{SO}(V)$, la classe de conjugaison peut se dédoubler. Cela se produit quand le normalisateur dans $\mathrm{O}(V)$ du tore est contenu dans $\mathrm{SO}(V)$. On vérife que cela se produit si et seulement si $N=2n$, $\underline{\lambda}^1=\underline{\lambda}^2=\emptyset$ et tous les termes de $\underline{\lambda}^0$ sont pairs. Notons par exemple que le normalisateur d'un tore de type (II) coupe les deux composantes du groupe orthogonal car le Frobenius de $F_{2\ell}$ normalise $F_{2\ell}^1$ et est de déterminant -1.

5.7. — Une classification analogue des tores maximaux vaut si le corps de base est fini. Indiquons seulement la classification des tores elliptiques. Soient W un espace sur $\mathbb{F}_q$ (resp. $\mathbb{F}_{q^2}$) muni d'une forme symplectique ou quadratique (resp. hermitienne) $\underline{H}$ la composante neutre de son groupe d'isométries et $H=\underline{H}(\mathbb{F}_q)$. Notons ν la dimension de W sur $\mathbb{F}_q$ (resp. $\mathbb{F}_{q^2}$).

Notons $P_T^{\mathrm{ell}}(W)$ l'ensemble des partitions $\underline{\lambda}$ d'un entier ℓ telles que :

- si W est symplectique, $\ell = \frac{1}{2}\nu$;
- si W est quadratique et ν impair, $\ell = \frac{1}{2}(\nu - 1)$;
- si W est quadratique et ν pair, $\ell = \frac{1}{2}\nu$, $r(\underline{\lambda})$ est pair si la forme quadratique est déployée, impair sinon ;
- si W est hermitien, $\ell = \nu$ et les termes de $\underline{\lambda}$ sont impairs.

Alors $P_T^{\mathrm{ell}}(W)$ est en bijection avec les classes de conjugaison de tores maximaux elliptiques de H.

5.8. — Soient $(\underline{\lambda}^0, \underline{\lambda}^1, \underline{\lambda}^2) \in P_T(V)$ et $\underline{T} \subset \underline{G}$ le tore associé. D'après 5.6, à $\underline{T}$ est associée une décomposition de V. Écrivons-la dans le cas où G est symplectique ; c'est :

$$V = F_{\lambda_1^0} \oplus F_{\lambda_1^0} \oplus \cdots \oplus F_{\lambda_{r^0}^0} \oplus F_{\lambda_{r^0}^0} \oplus F_{2\lambda_1^1} \oplus \cdots \oplus F_{2\lambda_{r^1}^1} \oplus F_{2\lambda_1^2} \oplus \cdots \oplus F_{2\lambda_{r^2}^2}.$$

Il est clair que les seuls réseaux de V stables par $T(\mathcal{O}')$ pour toute extension F'/F non ramifiée (où $\mathcal{O}'$ est l'anneau des entiers de F') sont ceux de la forme

$$L = z_1'\mathcal{O}_{\lambda_1^0} \oplus z''\mathcal{O}_{\lambda_1^0} \oplus \cdots \oplus z_{r^0}'\mathcal{O}_{\lambda_{r^0}^0} \oplus z_{r^0}''\mathcal{O}_{\lambda_{r^0}^0} \oplus z_1^1\mathcal{O}_{2\lambda_1^1} \oplus \cdots \oplus z_{r^1}^1\mathcal{O}_{2\lambda_{r^2}^1} \oplus z_1^2\mathcal{O}_{2\lambda_1^2} \oplus \cdots \oplus z_{r^2}^2\mathcal{O}_{2\lambda_{r^2}^2},$$

avec $z_1', \ldots, z_{r^2}^2 \in F^\times$, où pour tout entier ℓ, on note $\mathcal{O}_\ell$ l'anneau des entiers de F_ℓ. Comme on ne s'intéresse qu'aux réseaux L tels que $\widetilde{L} \supset L \supset \omega\widetilde{L}$, on doit imposer :

- $z_i'z_i'' \in \mathcal{O}^\times \cup \omega\mathcal{O}^\times$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r^0\}$;
- $z_i^j \in \mathcal{O}^\times$ pour $j = 1, 2$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, r^j\}$.

L'ensemble de réseaux obtenu est l'ensemble des sommets du sous-espace affine distingué de I(G) associé à une base convenable et à l'élément $(n', n'', \underline{\lambda}^0)$ de $P'(V)$ (*cf.* 5.3), où $n' = \ell^2$, $n'' = \ell^1$. Soit $M \in \mathcal{M}$ le fixateur de ce sous-espace affine. On a décrit M^{red} en 5.3. Il est clair que le tore T^{red} de M^{red} est elliptique maximal. Il s'écrit :

$$T^{\mathrm{red}} = T' \times T'' \times T_1^0 \times \cdots \times T_{r^0}^0,$$

où pour tout $i \in \{1, \ldots, r^0\}$, T_i^0 est l'unique tore elliptique maximal de $\mathrm{GL}(\lambda_i^0, \mathbb{F}_q)$, T' est le tore elliptique maximal de $\mathrm{Sp}(2n', \mathbb{F}_q)$ associé à la partition $\underline{\lambda}^2$ et T'' est le tore elliptique maximal de $\mathrm{Sp}(2n'', \mathbb{F}_q)$ associé à la partition de $\underline{\lambda}^1$ (*cf.* 5.7). Cela démontre les hypothèses 2.6 et 2.7. On voit sur les paramétrisations que l'application ψ de 2.8 est bien une bijection.

Un raisonnement analogue vaut dans le cas quadratique ou hermitien. Il faut définir n' et n'' ainsi :

- $n' = \ell^2$, $n'' = \ell^1$ si V est quadratique et N impair;
- $n' = \ell^2$, $n'' = \ell^1 + n - \frac{1}{2}N$ si V est quadratique et N est pair;
- $n' = \frac{1}{2}\ell^2$, $n'' = \frac{1}{2}(\ell^1 - N) + n$ si V est hermitien,.

REMARQUE. — Si V est quadratique et $N = 2n$, les éléments de $P_T(V)$ donnant naissance à deux classes de tores correspondent aux éléments de $P'(V)$ donnant naissance à deux classes dans $\mathcal{M}$.

5.9. — Pour achever la preuve de la PROPOSITION 5.1, il reste à démontrer que pour tout $M \in \mathcal{M}$, on a l'égalité

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}^{u,\mathrm{anis}}_{G,\mathrm{unif}}(M^{\mathrm{red}}) = \#\mathcal{T}^{\mathrm{ell}}_G(M^{\mathrm{red}}).$$

Considérons la même situation qu'en 5.7 : W est un espace sur $\mathbb{F}_q$ (resp. $\mathbb{F}_{q^2}$) muni d'une forme symplectique ou quadratique (resp. hermitiennes); $\underline{H}$ est la composante neutre de son groupe d'isométries et $H = \underline{H}(\mathbb{F}_q)$. On note :

- $U(H)$ l'ensemble des orbites unipotentes de H, $U^{\mathrm{anis}}(H)$ le sous-ensemble des orbites unipotentes anisotropes;
- $\mathcal{F}^u(H)$ l'espace des fonctions sur H à valeurs complexes, invariantes par conjugaison, à support unipotent, $\mathcal{F}^{u,\mathrm{anis}}(H)$ le sous-espace engendré par les fonctions caractéristiques d'orbites unipotentes anisotropes, $\mathcal{F}^u_{\mathrm{unif}}(H)$ le sous-espace de $\mathcal{F}^u(H)$ formé des fonctions uniformes;
- $p_{\mathrm{unif}} : \mathcal{F}^u(H) \to \mathcal{F}^u_{\mathrm{unif}}(H)$ la projection orthogonale;
- $\mathcal{F}^{u,\mathrm{anis}}_{\mathrm{unif}}(H) = p_{\mathrm{unif}}(\mathcal{F}^{u,\mathrm{anis}}(H))$.

LEMME 5.10. — *On a l'inclusion* $\mathcal{F}^{u,\mathrm{anis}}_{\mathrm{unif}}(H) \subset \mathcal{F}^{u,\mathrm{anis}}(H)$.

Si la forme est hermitienne, toute fonction est uniforme et le lemme est évident. On suppose désormais la forme symplectique ou quadratique, on pose $\nu = \dim_{\mathbb{F}_q}(W)$. Soient $u \in U^{\mathrm{anis}}(H)$, $(\underline{\lambda}, (Q_i))$ le paramètre de u (analogue aux paramètres décrits en 5.2), $\underline{\lambda} = (c_1 \times 1, \dots, c_\nu \times \nu)$. Posons

$$I = \{i \in \{1, \dots, \nu\}\; ;\; c_i \neq 0\}.$$

Remarquons que puisque u est anisotrope, les éléments de I ont tous même parité et qu'à tout élément de I correspond une forme Q_i. De plus $c_i = 1$ ou 2 pour tout $i \in I$.

Pour tout $\underline{\varepsilon} = \{\varepsilon(i)\,;\ i\varepsilon I\} \in \{\pm 1\}^I$, définissons une fonction $f_{\underline{\varepsilon}}$ sur H, invariante par conjugaison et à support unipotent, par les relations suivantes. Soient u' une orbite unipotente de H, $(\underline{\lambda}', (Q'_i))$ son paramètre ; alors

$$f_{\underline{\varepsilon}\,|\,u'} = \begin{cases} 0 & \text{si } \underline{\lambda}' \neq \underline{\lambda}\,; \\ \prod\limits_{i\in I,\, Q'_i \neq Q_i} \varepsilon(i) & \text{si } \underline{\lambda}' = \underline{\lambda}. \end{cases}$$

On a l'égalité :

$$\mathbf{1}_u = \frac{1}{2^{\#I}} \sum_{\underline{\varepsilon}\in\{\pm 1\}} I f_{\underline{\varepsilon}}.$$

Notons S l'ensemble des caractères $\underline{\varepsilon}$ tels que $(\underline{\lambda}, \underline{\varepsilon})$ appartienne à l'image de la correspondance de Springer. On déduit de la définition des fonctions uniformes (*cf.* [S, prop. 4.15]) que

$$p_{\text{unif}}(\mathbf{1}_u) = \frac{1}{2^{\#I}} \sum_{\underline{\varepsilon}\in S} f_{\underline{\varepsilon}}.$$

Soit u' une orbite unipotente de H. Supposons que u' n'est pas anisotrope. On veut montrer que $p_{\text{unif}}(\mathbf{1}_u)$ s'annule sur u'. Soit $(\underline{\lambda}', (Q'_i))$ le paramètre de u'. Si $\underline{\lambda}' \neq \underline{\lambda}$, l'assertion est claire. Supposons $\underline{\lambda}' = \underline{\lambda}$. Comme u' n'est pas anisotrope, il existe $j \in I$ tel que Q'_j ne soit pas anisotrope ; fixons un tel j. On a nécessairement $Q'_j \neq Q_j$ et $c_j = 2$. Notons $\underline{\varepsilon}_j$ l'élément de $\{\pm 1\}^I$ tel que :

$$\underline{\varepsilon}_j(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j, \\ -1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Il résulte du lemme de l'appendice que S est stable par multiplication par $\underline{\varepsilon}_j$. Or pour tout $\underline{\varepsilon} \in S$, on a $f_{\underline{\varepsilon}\underline{\varepsilon}_j\,|\,u'} = -f_{\underline{\varepsilon}\,|\,u'}$. Donc $p_{\text{unif}}(\mathbf{1}_u)$ s'annule sur u' comme on le voulait.

5.11. — Pour tout sous-groupe de Lévi L de H, défini sur $\mathbb{F}_q$ et tel qu'il existe un sous-groupe parabolique P de H défini sur $\mathbb{F}_q$ et de Lévi L, notons

$$i_L^H : \mathcal{F}^u(L) \longrightarrow \mathcal{F}^u(H)$$

l'induction de Harisch-Chandra. Elle est définie ainsi. Fixons un sous-groupe parabolique P de H, défini sur $\mathbb{F}_q$ et de Lévi L, soit ${}^uP$ son radical unipotent. Pour $f \in \mathcal{F}^u(L)$ et $h \in H$, on pose

$$i_L^H(f)(h) = \frac{1}{|P|} \sum f(\ell),$$

sommé sur les triplets $(h', \ell, u) \in H \times L \times {}^uP$ tels que $h = h'\ell u h'^{-1}$. Cette construction est indépendante du choix de P. Fixons un ensemble $\{L_1, \dots, L_k\}$ de représentants des classes de conjugaison de sous-groupes de Lévi de H vérifiant les conditions ci-dessus.

LEMME. — *On a l'égalité* $\mathcal{F}^u(H) = \bigoplus_{i=1}^{k} i_{L_i}^H \big[\mathcal{F}^{u,\mathrm{anis}}(L_i)\big]$.

Démonstration. — Notons $V(H)$ l'ensemble des couples (i, v) où i est dans $\{1, \dots, k\}$ et v dans $U^{\mathrm{anis}}(L_i)$. L'ensemble $\{\mathbf{1}_u\ ;\ u \in U(H)\}$ est une base de $\mathcal{F}^u(H)$. L'ensemble $\{i_{L_i}^H(\mathbf{1}_v)\ ;\ (i, v) \in V(H)\}$ est un système de générateurs de l'espace de droite de l'énoncé. Il y a une application naturelle

$$\xi : V(H) \longrightarrow U(H)$$

qui à (i, v) associe la H-orbite engendrée par v. C'est une bijection. Il suffit donc de montrer que la matrice exprimant les fonctions $i_{L_i}^H(\mathbf{1}_v)$ dans la base $\{\mathbf{1}_u\ ;\ u \in U(H)\}$ est triangulaire pour un ordre convenable. A l'aide des paramétrisations, on montre comme dans la démonstration de 5.5 que pour $(i, v) \in V(H)$, on a l'égalité

$$i_{L_i}^H(\mathbf{1}_v) = c\mathbf{1}_{\xi(i,v)} + \sum_{u' \in U(H)} c_{u'} \mathbf{1}_{u'}$$

où $c \neq 0$ et, dans la dernière somme, n'interviennent que des orbites u' de dimension strictement supérieure à celle de $\xi(i, v)$. Cela achève la preuve.

COROLLAIRE 5.12. — *La dimension de* $\mathcal{F}_{\mathrm{unif}}^{u,\mathrm{anis}}(H)$ *est égale au nombre de classes de conjugaison de tores elliptiques maximaux de* H.

Démonstration. — Posons

$$\mathcal{F}^{u,\mathrm{ind}}(H) = \sum_{L \neq H} i_L^H\big(\mathcal{F}^u(L)\big)$$

où l'on somme sur tous les Lévi propres de H. Il résulte du LEMME 5.11 que

$$\mathcal{F}^u(H) = \mathcal{F}^{u,\mathrm{anis}}(H) \oplus \mathcal{F}^{u,\mathrm{ind}}(H).$$

La projection sur les fonctions uniformes commute à l'induction (*cf.* [DL, th. 7]). On déduit alors du LEMME 5.10 que l'on a :

$$\mathcal{F}^u_{\text{unif}}(H) = \mathcal{F}^{u,\text{anis}}_{\text{unif}}(H) \oplus \Big(\sum_{L\neq H} i_L^H\big(\mathcal{F}^u_{\text{unif}}(L)\big)\Big).$$

Mais on sait que l'ensemble des fonctions de Green Q_T associées aux tores elliptiques maximaux de H forme une base de l'orthogonal de la dernière somme ci-dessus dans $\mathcal{F}^u_{\text{unif}}(H)$. D'où le corollaire.

5.13. — Soit $M \in \mathcal{M}$. On veut montrer que

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}^{u,\text{anis}}_{G,\text{unif}}(M^{\text{red}}) = \#\mathcal{T}^{\text{ell}}_G(M^{\text{red}}).$$

Il résulte de la classification des tores elliptiques maximaux que toute classe de conjugaison de tels tores dans M^{red} est stable par $N_G(M)$. Idem pour les orbites unipotentes anisotropes, et le LEMME 5.10 montre qu'appliquer p_{unif} ne nous fait pas sortir de cet ensemble d'orbites. On peut donc remplacer, dans les définitions de $\mathcal{F}^{u,\text{anis}}_{G,\text{unif}}(M^{\text{red}})$ et $\mathcal{T}^{\text{ell}}_G(M^{\text{red}})$, la conjugaison par $N_G(M)$ par la conjugaison par M^{red}. Une remarque analogue nous permet de remplacer M^{red} par sa composante neutre. Compte tenu de la structure des groupes M^{red} et comme les groupes linéaires se traitent immédiatement, on est ramené au cas d'un groupe M tel qu'en 5.9. Le COROLLAIRE 5.12 résout la question. Cela achève la preuve de la PROPOSITION 5.1.

REMARQUE 5.14. — Il est facile de donner une formule explicite pour $\#\mathcal{T}$ à l'aide de la description de 5.6. C'est le coefficient de X^k dans la série formelle $S(X)$, où :

- si V est symplectique, $k = n$,

$$S(X) = \prod_{i\geq 1}(1 - X^i)^{-3};$$

- si V est quadratique et N impair, $k = n$,

$$S(X) = \tfrac{1}{2}\Big[\prod_{i\geq 1}(1 - X^i)^{-3} + \prod_{i\geq 1}(1 - X^i)^{-1}(1 - X^{2i})^{-1}\Big];$$

- si V est quadratique, N pair et Q non déployée, $k = \frac{1}{2}N$,

$$S(X) = \tfrac{1}{4}\Big[\prod_{i\geq 1}(1 - X^i)^{-3} - \prod_{i\geq 1}(1 + X^i)^{-1}(1 - X^{2i})^{-1}\Big];$$

- si V est quadratique, N pair et Q déployée, $k = \frac{1}{2}N$,

$$S(X) = \tfrac{1}{4}\Big[\prod_{i\geq 1}(1-X^i)^{-3} + \prod_{i\geq 1}(1+X^i)^{-1}(1-X^{2i})^{-1}\Big] \\ + \tfrac{1}{2}\prod_{i\geq 1}(1-X^i)^{-1}(1-X^{2i})^{-1} + \prod_{i\geq 1}(1-X^{2i})^{-1};$$

- si V est hermitien, $k = N$,

$$S(X) = \frac{1}{2}\Big[\prod_{i\geq 1}(1+X^i)(1-X^i)^{-1} + \prod_{i\geq 1}(1+X^{2i})(1-X^{2i})^{-1}\Big].$$

PROPOSITION 5.15. — *Supposons $p \neq 2$. Sous les hypothèses de* 5.1, *on a l'égalité :*

$$\#\mathcal{T} = \theta.$$

(*Cf.* 3.3 *pour la définition de θ.*)

Notons qu'une telle égalité n'est pas vraie pour tout groupe : on a vu qu'elle était fausse pour $\mathrm{SL}(n)$.

Démonstration. — Notons d'abord que d'après 5.6, l'ensemble des classes de conjugaison stable de tores maximaux elliptiques et non ramifiés de G est en bijection avec l'ensemble des partitions $\underline{\lambda}$ d'un entier ℓ telles que :

- si V est symplectique ou si V est quadratique et N impair, $\ell = n$;
- si V est quadratique et N pair, $\ell = \frac{1}{2}N$ et $r(\underline{\lambda}) = \frac{1}{2}N - n \bmod 2$;
- si V est hermitien, $\ell = N$ et tous les termes de $\underline{\lambda}$ sont impairs.

Décrivons un ensemble de représentants des classes d'équivalence de données endoscopiques non ramifiées $(\underline{H}, {}^L H, s, \xi)$ du groupe $\underline{G}$. Ces classes sont uniquement déterminées par le groupe H $(= \underline{H}(F))$ que l'on décrit ci-dessous :

- si V est symplectique,

$$H = \mathrm{GL}(\lambda_1, F) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, F) \times \mathrm{SO}^{\pm}(2n', F) \times \mathrm{Sp}(2n'', F),$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in P(\ell)$, $\ell + n' + n'' = n$ et où l'on note SO^+ la forme déployée du groupe SO et SO^- sa forme quasi-déployée mais non déployée « non ramifiée » ; si $n' = 1$, on interdit SO^+ ;

• si V est quadratique et N impair,

$$H = \mathrm{GL}(\lambda_1, F) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, F) \times \mathrm{SO}(2n'+1, F) \times \mathrm{SO}(2n''+1, F),$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in P(\ell)$, $\ell + n' + n'' = n$ et $n' \leq n''$; on note SO l'unique forme quasi-déployée ;

• si V est quadratique et N pair,

$$H = \mathrm{GL}(\lambda_1, F) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, F) \times \mathrm{SO}^{\varepsilon'}(2n', F) \times \mathrm{SO}^{\varepsilon''}(2n'', F),$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in P(\ell)$, $\ell + n' + n'' = \frac{1}{2}N$, $n' \leq n''$, ε' et ε'' sont des signes tels que, en un sens évident, $\varepsilon'\varepsilon'' = +$ si Q est déployée, $\varepsilon'\varepsilon'' = -$ sinon ;

• si V est hermitien,

$$H = \mathrm{GL}(\lambda_1, E) \times \cdots \times \mathrm{GL}(\lambda_r, E) \times \mathrm{U}(n') \times \mathrm{U}(n''),$$

où $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \in P(\ell)$, $2\ell + n' + n'' = N$, $n' \leq n''$; on note U la forme quasi-déployée du groupe unitaire relatif à l'extension E/F.

Remarque. — Si V est quadratique et $N = 2n$, si de plus $n' = n'' = 0$ et tous les termes λ_i sont pairs, le groupe décrit ci-dessus donne naissance à deux classes de données endoscopiques.

On décrit les classes de conjugaison stable de tores maximaux elliptiques et non ramifiés de ces groupes comme on l'a fait pour le groupe G. Pour obtenir le nombre θ, il reste à considérer les équivalences possibles. Il est clair que celle-ci consistent à échanger deux copies de groupes identiques, par exemple, dans le cas V quadratique et N impair, échanger les deux copies $\mathrm{SO}(2n'+1, F) \times \mathrm{SO}(2n''+1, F)$ quand $n' = n''$. Alors θ est le nombre de classes d'équivalence, pour l'équivalence décrite ci-dessous, de l'ensemble des triplets $(\underline{\lambda}, \underline{\lambda}', \underline{\lambda}'')$, où $\underline{\lambda}$ (resp. $\underline{\lambda}', \underline{\lambda}''$) est une partition d'un entier ℓ (resp. n', n'') tels que

• si V est symplectique, $\ell + n' + n'' = n$; l'équivalence est l'égalité ;

• si V est quadratique et N impair, $\ell + n' + n'' = n$; l'équivalence est engendrée par la relation

$$(*) \qquad (\underline{\lambda}, \underline{\lambda}', \underline{\lambda}'') \sim (\underline{\lambda}, \underline{\lambda}'', \underline{\lambda}') ;$$

• si V est quadratique déployé et N pair, $\ell + n' + n'' = \frac{1}{2}N$, $r(\underline{\lambda}') + r(\underline{\lambda}'')$ est pair ; l'équivalence est engendrée par la relation (*) ;

• si V est quadratique non déployé et N pair, $\ell + n' + n'' = \frac{1}{2}N$, $r(\underline{\lambda}')$ est pair et $r(\underline{\lambda}'')$ est impair ; l'équivalence est l'égalité ;

• si V est hermitien, $2\ell + n' + n'' = N$, tous les termes de $\underline{\lambda}'$ et $\underline{\lambda}''$ sont impairs ; l'équivalence est engendré par la relation (*).

REMARQUE. — Si V est quadratique et $N = 2n$, on doit compter deux fois les triplets $(\underline{\lambda}, \emptyset, \emptyset)$ pour lesquels tous les termes de $\underline{\lambda}$ sont pairs.

On veut montrer que
$$\theta = \#P_T(V).$$
A l'aide de la description ci-dessus et de 5.6, c'est immédiat dans le cas symplectique ou quadratique et $N = 2n + 2$. Dans les autres cas, il suffit d'utiliser le lemme ci-dessous.

5.16. — Si k' et k'' sont des entiers et
$$\underline{\lambda}' = (c'_1 \times 1, \ldots, c'_{k'} \times k') \in P(k'),$$
$$\underline{\lambda}'' = (c''_1 \times 1, \ldots, c''_{k''} \times k'') \in P(k''),$$
on note $\underline{\lambda}' \cup \underline{\lambda}''$ la partition de $k' + k''$ définie par
$$\underline{\lambda}' \cup \underline{\lambda}'' = \big(c_1 \times 1, \ldots, c_{k'+k''} \times (k' + k'')\big)$$
où pour tout i, $c_i = c'_i + c''_i$ (et par exemple $c'_i = 0$ si $i > k'$). Soient k un entier ≥ 1 et $\underline{\lambda} \in P(k)$. Notons θ_1 le nombre de couples $(\underline{\lambda}', \underline{\lambda}'')$ de partitions d'entiers k', k'' telles que $\underline{\lambda}' \cup \underline{\lambda}'' = \underline{\lambda}$ et $r(\underline{\lambda}'')$ est pair. Notons θ_2 le nombre de classes d'équivalence de couples $(\underline{\lambda}', \underline{\lambda}'')$ de partitions d'entiers k', k'' telles que $\underline{\lambda}' \cup \underline{\lambda}'' = \underline{\lambda}$, l'équivalence étant engendrée par la relation $(\underline{\lambda}', \underline{\lambda}'') \sim (\underline{\lambda}'', \underline{\lambda}')$.

LEMME. — *On a l'égalité* $\theta_1 = \theta_2$.

On laisse la démonstration au lecteur. $\square$

Cela achève la preuve de la PROPOSITION 5.15.

5.17. — La PROPOSITION 5.15 suggère que, pour les groupes que l'on considère ici, on peut remplacer $\mathcal{X}$ par $\mathcal{X}^K$ dans la question 3.1, en définissant $D_X(\mathcal{X}^K)$ de façon évidente. On peut extraire des résultats de MAGDY ASSEM [MA1] et [MA2] la proposition suivante.

PROPOSITION. — *Supposons $p \neq 2$. Sous les hypothèses de* 5.1, *soit $X \subset U$. On a l'égalité* $\dim_{\mathbb{C}}(D_X(\mathcal{X}^K)) = \dim_C \mathcal{F}_X$ *dans chacun des cas suivants* :

(i) *V est symplectique de dimension* 4 ;

(ii) *V est quadratique de dimension* 5 ;

(iii) *V est quadratique, N est impair et X est formé d'orbites associés à la partition* $(3, 1, \ldots, 1)$.

Appendice : l'image de la correspondance de Springer

Soit N un entier ≥ 1. On considère :

- une partition $\underline{\lambda} = (c_1 \times 1, \dots, c_N \times N) \in P(N)$,
- un ensemble I et
- un élément $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon(i))_{i \in I} \in \{\pm 1\}^I$,

soumis à l'une des conditions suivantes :

(I) $\underline{\lambda}$ est symplectique, *i.e.* c_i est pair pour tout i impair et

$$I = \big\{ i \in \{1, \dots, N\} \, ; \, i \text{ pair}, \; c_i \geq 1 \big\} \, ;$$

(II) $\underline{\lambda}$ est orthogonale, *i.e.* c_i est pair pour tout i pair et

$$I = \big\{ i \in \{1, \dots, N\} \, ; \, i \text{ impair}, \; c_i \geq 1 \big\}.$$

A de telles données, LUSZTIG [L, § 10] associe un *symbole.* C'est une paire (ordonnée dans le cas (I), non ordonnée dans le cas (II)) d'ensembles finis d'entiers (A, B). Le *défaut* de ce symbole est l'entier

$$d = \begin{cases} \#A - \#B & \text{dans le cas (I),} \\ |\#A - \#B| & \text{dans le cas (II).} \end{cases}$$

On donne ci-dessous une formule pour ce défaut qui nous a échappé dans la littérature.

À la partition $\underline{\lambda}$ est associée une classe unipotente u dans un groupe $\mathrm{Sp}(N, k)$ ou $\mathrm{SO}(N, k)$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$ (pour $\mathrm{SO}(N)$ et N pair, il peut y avoir deux classes; négligeons cette difficulté). À $\underline{\varepsilon}$ est associé un caractère, encore noté $\underline{\varepsilon}$, du groupe des composantes du centralisateur d'un élément de u. À $(u, \underline{\varepsilon})$ est associé un autre couple $(u', \underline{\varepsilon}')$ relatif à un groupe plus petit, avec $(u', \underline{\varepsilon}')$ cuspidal. L'entier d détermine entièrement ce couple. En particulier, $(u, \underline{\varepsilon})$ intervient dans la représentation de Springer si et seulement si $d = 1$ dans le cas (I) ou dans le cas (II) avec N impair, $d = 0$ dans le cas (II) avec N pair.

Posons $J = \{i \in I \, ; \, c_i \text{ est impair}\}$; écrivons :

$$J = \{i_1, \dots, i_r\}, \quad \text{avec} \quad i_1 > \dots > i_r.$$

Posons :

$$\delta = \#\big\{ j \in \{1, \dots, r\} \, ; \, j \text{ pair et } \varepsilon(i_j) = -1 \big\} \\ - \#\big\{ j \in \{1, \dots, r\} \, ; \, j \text{ impair et } \varepsilon(i_j) = -1 \big\}.$$

LEMME. — *On a l'égalité :*

$$d = \begin{cases} 1 + 2\delta & \textit{dans le cas (I)}, \\ |1 + 2\delta| & \textit{dans le cas (II) avec } N \textit{ impair}, \\ |2\delta| & \textit{dans le cas (II) avec } N \textit{ pair}. \end{cases}$$

Démonstration. — Traitons le cas (I). On laisse le cas (II) au lecteur, la preuve étant analogue. Rappelons la construction du symbole (A, B). On pose

$$c = c_1 + \cdots + c_N, \quad m = \begin{cases} \frac{1}{2}c & \text{si } c \text{ est pair}, \\ \frac{1}{2}(c+1) & \text{si } c \text{ est impair}. \end{cases}$$

Soit $(z_1, \ldots, z_{2m})$ la suite telle que $z_1 \leq \cdots \leq z_{2m}$ contenant c_i fois le nombre i si $i \geq 1$ et $(2m - c)$ fois le nombre 0.

Posons $t_i = z_i + i - 1$ pour $i = 1, \ldots, 2m$. La suite $(t_1, \ldots, t_{2m})$ contient m nombres pairs $2y_1 < \cdots < 2y_m$ et m nombres impairs $2x_1 + 1 < \cdots < 2x_m + 1$. On pose :

$$A_* = \{0, x_1 + 2, x_2 + 3, \ldots, x_m + m + 1\},$$
$$B_* = \{y_1 + 1, y_2 + 2, \ldots, y_m + m\}.$$

Notons :

$$C = (A_* \cup B_*) - (A_* \cap B_*).$$

Appelons *intervalle* de C un sous-ensemble de C de la forme

$$\{k, k+1, \ldots, \ell\}$$

tel que $k - 1 \notin C$, $\ell + 1 \notin C$ et $k \neq 0$. On vérifie que l'ensemble des intervalles de C est en bijection naturelle avec I. Pour $i \in I$, notons C_i l'intervalle associé. On pose :

$$A = \Big(A_* - \bigcup_{i \in I; \varepsilon(i) = -1} C_i \cap A_*\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in I; \varepsilon(i) = -1} C_i \cap B_*\Big),$$
$$B = \Big(B_* - \bigcup_{i \in I; \varepsilon(i) = -1} C_i \cap B_*\Big) \cup \Big(\bigcup_{i \in I; \varepsilon(i) = -1} C_i \cap A_*\Big).$$

D'où l'égalité :

$$d = \#A - \#B = 1 + 2 \sum_{i \in I; \varepsilon(i) = -1} \big[\#(C_i \cap B_*) - \#(C_i \cap A_*)\big].$$

Il nous suffit de vérifier

$$(1)\qquad \begin{cases} \#(C_i \cap B_*) = \#(C_i \cap A_*) & \text{si } i \in I - J, \\ \#(C_{i_j} \cap B_*) = \#(C_{i_j} \cap A_*) + (-1)^j & \text{si } j \in \{1, \dots, r\}. \end{cases}$$

On vérifie ces assertions par récurrence sur N. Soit h le plus grand entier tel que $c_h \neq 0$. Posons

$$N' = N - hc_h \quad \text{et} \quad \underline{\lambda}' = \big(c_1 \times 1, \dots, c_{h-1} \times (h-1)\big).$$

On déduit de $\underline{\lambda}'$ un ensemble I', des suites (z_i'), (t_i'), (x_i'), (y_i') et un symbole (A_*', B_*'). Explicitons comment l'on déduit (A_*, B_*) de (A_*', B_*').

Premier cas : c_h est pair. Alors $m' = m + \frac{1}{2}c_h$,

$$(z_1, \dots, z_{2m}) = (z_1', \dots, z_{2m'}', h, \dots, h),$$
$$(t_1, \dots, t_{2m}) = (t_1', \dots, t_{2m'}', h + 2m', \dots, h + 2m - 1).$$

(a) Si h est pair,

$$\begin{aligned} (y_1, \dots, y_m) &= \big(y_1', \dots, y_{m'}', \tfrac{1}{2}h + m', \dots, \tfrac{1}{2}h + m - 1\big), \\ (x_1, \dots, x_m) &= \big(x_1', \dots, x_{m'}', \tfrac{1}{2}h + m', \dots, \tfrac{1}{2}h + m - 1\big), \\ A_* &= A_*' \cup \big\{\tfrac{1}{2}h + 2m' + 2, \dots, \tfrac{1}{2}h + 2m\big\}, \\ B_* &= B_*' \cup \big\{\tfrac{1}{2}h + 2m' + 1, \dots, \tfrac{1}{2}h + 2m - 1\big\}. \end{aligned}$$

Alors $I = I' \cup \{h\}$, $J = J'$,

$$C_i = C_i' \quad \text{si} \quad i < h, \qquad C_h = \big\{\tfrac{1}{2}h + 2m' + 1, \dots, \tfrac{1}{2}h + 2m\big\}.$$

Les assertions (1) pour $\underline{\lambda}$ se déduisent des mêmes assertions pour $\underline{\lambda}'$ et du fait que $\#(C_h \cap B_*) = \#(C_h \cap A_*)$.

(b) Si h est impair,

$$\begin{aligned} (y_1, \dots, y_m) &= \big(y_1', \dots, y_{m'}', \tfrac{1}{2}(h+1) + m', \dots, (h-1)/2 + m\big), \\ (x_1, \dots, x_m) &= \big(x_1', \dots, x_{m'}', \tfrac{1}{2}(h-1) + m', \dots, \tfrac{1}{2}(h-3) + m\big), \\ A_* &= A_*' \cup \big\{\tfrac{1}{2}(h+3) + 2m', \dots, \tfrac{1}{2}(h-1) + 2m\big\}, \\ B_* &= B_*' \cup \big\{\tfrac{1}{2}(h+3) + 2m', \dots, \tfrac{1}{2}(h-1) + 2m\big\}. \end{aligned}$$

Alors $I = I'$, $C_i = C_i'$ pour tout $i \in I$ et les assertions (1) pour $\underline{\lambda}$ résultent immédiatement des mêmes assertions pour $\underline{\lambda}'$.

Deuxième cas : c_h est impair. Comme $\underline{\lambda}$ est symplectique, h est pair. Distinguons deux sous-cas :

(a) c' est pair. Alors $m' = \frac{1}{2}c'$ et $m = m' + \frac{1}{2}(c_h + 1)$,

$$\begin{aligned}
(z_1, \dots, z_{2m}) &= (0, z'_1, \dots, z'_{2m'}, h, \dots, h),\\
(t_1, \dots, t_{2m}) &= (0, t'_1 + 1, \dots, t'_{2m'} + 1, h + 2m' + 1, \dots, h + 2m - 1),\\
(y_1, \dots, y_m) &= (0, x'_1 + 1, \dots, x'_{m'} + 1, \tfrac{1}{2}h + m' + 1, \dots, \tfrac{1}{2}h + m - 1),\\
(x_1, \dots, x_m) &= (y'_1, \dots, y'_{m'}, \tfrac{1}{2}h + m', \dots, \tfrac{1}{2}h + m - 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_* &= \{0\} \cup \{b + 1; b \in B'_*\} \cup \{\tfrac{1}{2}h + 2m' + 2, \dots, \tfrac{1}{2}h + 2m\},\\
B_* &= \{1\} \cup \{a + 1; a \in A'_*\} \cup \{\tfrac{1}{2}h + 2m' + 3, \dots, \tfrac{1}{2}h + 2m - 1\}.
\end{aligned}$$

Alors $I = I' \cup \{h\}$, $J = J' \cup \{h\}$,

$$C_i = \{\gamma + 1\ ;\ \gamma \in C'_i\} \quad \text{si } i < h, \quad C_h = \{\tfrac{1}{2}h + 2m' + 2, \dots, \tfrac{1}{2}h + 2m\},$$

$r = r' + 1$, $i_j = i'_{j-1}$ si $j \in \{2, \dots, r\}$, $i_1 = h$. Pour $i < h$, on a

$$\#(C_i \cap A_*) = \#(C'_i \cap B'_*), \quad \#(C_i \cap B_*) = \#(C'_i \cap A'_*)$$

et $\#(C_h \cap A_*) = \#(C_h \cap B_*) + 1$

De ces relations et des assertions (1) pour $\underline{\lambda}'$ se déduisent les assertions (1) pour $\underline{\lambda}$.

(b) c' est impair. Alors $m' = \frac{1}{2}(c' + 1)$ et $m = m' + \frac{1}{2}(c_h - 1)$,

$$\begin{aligned}
(z_1, \dots, z_{2m}) &= (z'_2, \dots, z'_{2m'}, h, \dots, h),\\
(t_1, \dots, t_{2m}) &= (t'_2 - 1, \dots, t'_{2m'} - 1, h + 2m' - 1, \dots, h + 2m - 1),\\
(y_1, \dots, y_m) &= (x'_1, \dots, x'_{m'}, \tfrac{1}{2}h + m', \dots, \tfrac{1}{2}h + m - 1),\\
(x_1, \dots, x_m) &= (y'_2 - 1, \dots, y'_{m'} - 1, \tfrac{1}{2}h + m' - 1, \dots, \tfrac{1}{2}h + m - 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_* &= \{b - 1\ ;\ b \in B'_*\} \cup \{\tfrac{1}{2}h + 2m', \dots, \tfrac{1}{2}h + 2m\},\\
B_* &= \{a - 1\ ;\ a \in A'_*, a \neq 0\} \cup \{\tfrac{1}{2}h + 2m' + 1, \dots, \tfrac{1}{2}h + 2m - 1\}.
\end{aligned}$$

Alors $I = I' \cup \{h\}$, $J = J' \cup \{h\}$ et

$$C_i = \{\gamma - 1\ ;\ \gamma \in C'_i\} \quad \text{si } i < h, \quad C_h = \{\tfrac{1}{2}h + 2m', \dots, \tfrac{1}{2}h + 2m\}.$$

Le calcul se poursuit comme dans le sous-cas (a), ce qui achève la preuve.

BIBLIOGRAPHIE

[C] Carter (R.). — *Finite groups of Lie type, conjugacy classes and complex characters*, Wiley-Interscience, 1993.

[DL] Deligne (P.) and Lusztig (G.). — *Duality for representations of a reductive group over a finite field II*, J. of Algebra, t. **81**, 1983, p. 540–545.

[H1] Hales (T.). — *A simple definition of transfer factors for unramified groups*, Contemporary Math, t. **145**, 1993, p. 109–134.

[H2] Hales (T.). — *Unipotent representations and unipotent classes in* $\mathrm{SL}(N)$, Amer J. of Math, t. **115**, 1993, p. 1347–1383.

[LS] Langlands (R.P.) and Shelstad (D.). — *On the definition of transfer factors*, Math. Ann., t. **278**, 1987, p. 219–271.

[L] Lusztig (G.). — *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent. math, t. **75**, 1984, p. 205–272.

[MA1] Assem (M.). — *Some result on unipotent orbital integrals*, Compositio Math, t. **78**, 1991, p. 37–78.

[MA2] Assem (M.). — Unipotent orbital integrals of spherical functions on p adic 4×4 symplectic groups, prépublication.

[S] Shoji (T.). — *On the Green polynomials of classical groups*, Invent. Math, t. **74**, 1983, p. 239–267.

[W1] Waldspurger (J.-L.). — *Intégrales orbitales sphériques pour* $\mathrm{GL}(N)$ *sur un corps p-adique*, in Orbites unipotentes et représentations II, Astérisque 171–172, 1989.

[W2] Waldspurger (J.-L.). — *Sur les intégrales orbitales tordues pour les groupes linéaires : un lemme fondamental*, J. Can. de Math., t. **43**, 1991, p. 852–896.