BULLETIN DE LA S. M. F.

LAURENT GARNIER

Théorèmes de division sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ et applications

Bulletin de la S. M. F., tome 123, nº 4 (1995), p. 547-589

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_4_547_0>

Bull. Soc. math. France,
123, 1995, p. 547–589.

THÉORÈMES DE DIVISION SUR $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ ET APPLICATIONS

PAR

LAURENT GARNIER (*)

RÉSUMÉ. — Soient X une courbe lisse sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}} \otimes \mathbb{Q}$ le faisceau des opérateurs différentiels infinis de niveau zéro sur un schéma formel lisse relevant X. On démontre pour de tels opérateurs des théorèmes de division ainsi que des résultats analogues à ceux de Briançon-Maisonobe dans la théorie complexe.

ABSTRACT. — Let X be a smooth curve defined over a perfect field k of charasteristic $p > 0$ and $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}} \otimes \mathbb{Q}$ be the sheaf of infinite differential operators of level zero on a smooth formal scheme lifting X. Some theorems for such operators are proved as some related results which are similar to those of Briançon and Maisonobe in the complex case.

INTRODUCTION
1. Notations et compléments sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}$
  1.1. Notations
  1.2. Rappels sur les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$
  1.3. Compléments sur la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}$; le corps $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$
  1.4. Rappels d'analyse ultramétrique
  1.5. Comparaison des normes spectrales sur $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$ et sur les voisinages stricts
2. Norme spectrale sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$
  2.1. Norme spectrale et propriétés
  2.2. Caractérisation de l'inversibilité sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ et simplicité
3. Division sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$
  3.1. Division sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$
  3.2. Division de Briançon-Maisonobe
  3.3. Lemme de Hensel

(*) Texte reçu le 11 avril 1994.
L. GARNIER, Laboratoire de Mathématiques Pures, Université de Bordeaux I, 351 cours de la Libération, 33405 Talence (France). Email : garnier@ceremab.u-bordeaux.fr.

Classification AMS : 14G20, 14F30, 14F, 14, 14H, 12H25, 34G.

Mots clés : Géométrie algébrique, opérateur differentiel infini, module holonome.

4. Base de division d'un idéal
4.1. Définition
4.2. Division par la base
4.3. Suites exactes associées à une base de division
5. Quelques propriétés des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$-modules holonomes
5.1. Décomposition générique des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$-modules cohérents
5.2. Modules holonomes ; multiplicités
5.3. Les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$-modules holonomes sont monogènes
BIBLIOGRAPHIE

Introduction

Cet article s'inscrit dans le cadre de la théorie des $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$-modules développée actuellement par P. BERTHELOT, qui a pour objet de construire une bonne catégorie de coefficients pour les variétés lisses sur un corps k parfait de caractérisitique $p > 0$, et qui soit stable par les six opérations de Grothendieck (*cf.* [BE2], [BE3]). La théorie est construite sur le modèle de celle des $\mathcal{D}$-modules sur une variété analytique complexe et on se propose d'illustrer ici cette analogie.

Dans cet article, on se restreint au cas de la dimension un ; on désigne par X une courbe lisse sur k et par $\mathcal{X}$ un relèvement de X en un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse sur un anneau de valuation discrète $\mathcal{V}$ relevant k. Dans ce nouveau contexte, on va montrer comment obtenir sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ des résultats analogues à ceux bien connus sur l'anneau $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{t\}}$ des opérateurs différentiels d'ordre fini sur les germes de séries convergentes [BR-MAIS], [SAB], [ROB1]. On prouve notamment des théorèmes de division sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ qui étendent à $\mathcal{X}$ l'énoncé de Mebkhout et Narvaez [M-N, 4.4.2]. Les preuves proposées ici sont sensiblement plus techniques que celles de la théorie complexe et seront donc soigneusement détaillées. Pour l'essentiel, elles se ramènent au cas des opérateurs finis sur $\mathcal{O}_X$, pour lesquels la plupart des résultats et concepts de la théorie complexe utilisés ici sont encore valides [GARN, I], et à un argument de complétion.

Dans les paragraphes 1 et 2, après avoir fixé les notations et rappelé les définitions des faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$, on donne quelques compléments sur la norme spectrale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ et on définit la norme spectrale d'un opérateur de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$. A tout opérateur $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$, on associe les entiers $\overline{N}(P)$ et $N(P)$ substitut de l'ordre et de la valuation et dont les propriétés permettent de démontrer dans le paragraphe 3, un théorème de division analogue à celui de Briançon et Maisonobe et un lemme de Hensel analogue à celui de Robba. Le paragraphe 4 est consacré à l'étude des bases de division et la dernière partie concerne les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$-modules holonomes dont on montre qu'ils sont monogènes et vérifient l'inégalité de Bernstein.

Cet article est tiré d'une thèse de doctorat [GARN] réalisée sous la direction de P. BERTHELOT ; certaines des preuves présentées ici lui doivent d'avoir été sensiblement améliorées ; qu'il en soit ici vivement remercié. Je remercie également Z. MEBKHOUT pour m'avoir communiqué les preuves de ses résultats de division.

1. Notations et compléments sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}$

1.1. Notations.

Ce paragraphe décrit les notations utilisés dans cet article.

a) X désigne une courbe lisse connexe sur un corps k parfait de caractéristique $p > 0$, et x un point k-rationnel de X.

b) $\mathcal{V}$ est un anneau de valuation discrète complet d'inégales caractéristiques 0 et p, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel k ; on désigne par θ une uniformisante de $\mathfrak{m}$. La valuation v_p de $\mathcal{V}$ est supposée normalisée par $v_p(p) = 1$ et on note $|\cdot|$ la valeur absolue correspondante étendue à $K := \operatorname{Frac}\mathcal{V}$ (avec $|\alpha| = p^{-v_p(\alpha)}$ pour tout $\alpha \in K$).

c) $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel localement de type fini et lisse relevant X ; $\mathfrak{X}_{\mathfrak{K}}$ est l'espace analytique rigide associé à $\mathfrak{X}$ (*cf.* [BE1, 0.2.3]). Si U est un ouvert de $\mathfrak{X}$ et $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}} \otimes \mathbb{Q})$ une section non nulle, il existe un unique $r \in \mathbb{Z}$ tel que $f_1 := \theta^r f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \setminus \Gamma(U, \mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$; on note alors $U_{\{f\}}$ l'ouvert de $\mathfrak{X}$ sur lequel f_1 est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$.

d) t désigne le relèvement sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ d'une uniformisante en x ; dt est une base de $\Omega^1_{\mathfrak{X},x}$ et ∂ la dérivation associée. On notera $\partial^{[k]} := \partial^k/k\,!$.

e) X_n est le schéma $\mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \operatorname{Spec}(\mathcal{V}/\mathfrak{m}^{n+1})$.

f) Pour tout faisceau abélien E sur $\mathfrak{X}$, on note $E_{\mathbb{Q}} := E \otimes \mathbb{Q}$.

On renvoie à [BE1, 0.2.2.1, 1.1.1 et 1.2.1] pour les définitions du morphisme de spécialisation sp ainsi que des tubes et des voisinages stricts sur $\mathfrak{X}_K$. Pour $\lambda < 1$, V_λ désigne l'ouvert

$$\{x \in \mathfrak{X}_K \ ; \ |t(x)| \geq \lambda\}$$

de $\mathfrak{X}_K$ qui est affinoïde si $\mathfrak{X}$ est affine. Pour tout λ, on note

$$D(0, \lambda^+) := \{x \in \widehat{\mathbb{A}}^1_K \ ; \ |t(x)| \leq \lambda\}$$

le disque fermé de centre 0, de rayon λ où t est une coordonnée sur $\widehat{\mathbb{A}}^1_K$. De même $D(0, \lambda^-)$ désigne le disque ouvert de rayon λ.

On note $\widehat{\mathcal{O}}$ l'anneau $\Gamma(D(0,1^-),\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{A}}^1_K})$, dont on verra dans un article ultérieur qu'il est l'analogue p-adique de l'anneau des séries formelles $\mathbb{C}[[t]]$.

Comme X est lisse en x, il existe un ouvert U contenant x et un morphisme étale $U \to \mathbb{A}^1_K$ qui se relève en $\mathcal{U} \to \widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathcal{V}}$, étale, avec $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathcal{X}$ contenant x. D'après [BE1, 1.3.1], ce morphisme induit des isomorphismes

$$]x[_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\sim} D(0,1^-) \quad \text{et} \quad \Gamma\big(]x[_{\mathcal{X}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}\big) \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}},$$

où par définition :

$$]x[_{\mathcal{X}} := \mathrm{sp}^{-1}\big(\{x\}\big).$$

Enfin on note $\|\cdot\|_\lambda$ la norme spectrale sur la circonférence de rayon λ (notée C_λ) qui est également la norme spectrale sur $D(0,\lambda^+)$ pour les fonctions définies sur $D(0,\lambda^+)$.

LEMME 1.1.1. — *Si $\mathcal{X}$ est affine, alors pour $\lambda > |\theta|$, l'ouvert V_λ ne dépend pas du relèvement t d'une coordonnée en x. Plus précisément, si on note u_t : $]x[_{\mathcal{X}} \xrightarrow{\sim} D(0,1^-)$ l'isomorphisme mentionné plus haut, déterminé par le choix de t, et si t et t' sont deux sections de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ relevant des uniformisantes de $\mathcal{O}_{X,x}$, alors pour $\lambda > |\theta|$ on a :*

$$\begin{aligned} u_t^{-1}\big(\{y \in D(0,1^-)\,;\ \lambda \le |t(y)| < 1\}\big) \\ = u_{t'}^{-1}\big(\{y \in D(0,1^-)\,;\ \lambda \le |t'(y)| < 1\}\big), \end{aligned}$$

$$u_t^{-1}\big(D(0,\lambda^+)\big) = u_{t'}^{-1}\big(D(0,\lambda^+)\big).$$

Preuve. — Pour un voisinage affine U de x convenable, il existe u dans $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathcal{X}})^\times$ de norme spectrale 1 et ψ dans $\Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ tels que :

$$t' = ut + \theta\psi = u(t + \theta u^{-1}\psi).$$

On se ramène ainsi à examiner les deux cas : $t' = ut$ et $t' - t \in \mathfrak{m}\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

- Si $t' = ut$, il est clair que $|t'(x)| = |t(x)|$ pour tout x de $\mathcal{X}_K$ car $\|u\|_{\mathrm{sp}} = \|u^{-1}\|_{\mathrm{sp}} = 1$.

- Si $t' - t \in \mathfrak{m}\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ et si $|t(x)| \ge \lambda$ alors :

$$\big|t'(x)\big| = \big|(t' - t + t)(x)\big| = \big|t(x)\big| \quad \text{si} \quad \lambda > |\theta|. \quad \square$$

1.2. Rappels sur les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$.

On rappelle ici la caractérisation locale de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{D}^\dagger_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$. On renvoie à [BE3] pour les constructions détaillées. Pour m entier et k fixés, on écrit :

$$k = q_k^{(m)} p^m + r_k^{(m)} \quad \text{avec} \quad 0 \le r_k < p^m.$$

On pose alors, à la suite de BERTHELOT :

$$\left\{ \begin{matrix} k'+k'' \\ k' \end{matrix} \right\}_{(m)} := \frac{q^{(m)}_{k'+k''}!}{q^{(m)}_{k'}!\,q^{(m)}_{k''}!} \in \mathbb{N},$$

$$\left\langle \begin{matrix} k'+k'' \\ k' \end{matrix} \right\rangle_{(m)} := \binom{k'+k''}{k'} \left\{ \begin{matrix} k'+k'' \\ k' \end{matrix} \right\}^{-1}_{(m)} \in \mathbb{Z}_p.$$

On rappelle que

$$v_p(k\,!) = \frac{k-\sigma(k)}{p-1}$$

où

$$\sigma(k) := \sum r_i \quad \text{si} \quad k = \sum r_i p^i, \quad 0 \le r_i \le p-1.$$

DÉFINITION 1.2.1. — Pour n et m fixés, Berthelot [BE3] définit $\mathcal{D}^{(m)}_{X_n}$, le *faisceau des opérateurs différentiels d'ordre fini et de niveau* m sur X_n.

Ce faisceau admet la description locale suivante : c'est un $\mathcal{O}_{X_n}$-module localement libre ayant pour base une famille d'opérateurs $\partial^{\langle k\rangle_{(m)}}$ et possédant une structure de $\mathcal{V}/\mathfrak{m}^{n+1}$-algèbre déterminée par les relations

$$\partial^{\langle k'\rangle_{(m)}}\partial^{\langle k''\rangle_{(m)}} = \left\langle \begin{matrix} k'+k'' \\ k' \end{matrix} \right\rangle_{(m)} \partial^{\langle k'+k''\rangle_{(m)}}$$

et pour tout $f \in \mathcal{O}_{X_n}$:

$$\partial^{\langle k\rangle_{(m)}} f = \sum_{k'+k''=k} \left\{ \begin{matrix} k'+k'' \\ k' \end{matrix} \right\}_{(m)} \partial^{\langle k'\rangle_{(m)}}(f)\partial^{\langle k'\rangle_{(m)}}.$$

Les $\partial^{\langle k\rangle_{(m)}}$ jouent le rôle de $q^{(m)}_k!\,\partial^k/k\,!$ et en particulier $\partial^{\langle k\rangle_{(m)}}$ a pour image $q^{(m)}_k!\,\partial^k/k\,!$ dans $\mathcal{D}_{X_n}$; ils opèrent donc bien sur $\mathcal{O}_{X_n}$. Le faisceau $\mathcal{D}^{(m)}_{X_n}$ n'est intègre que pour $n = m = 0$. Quand m varie, on a des homomorphismes $\mathcal{D}^{(m)}_{X_n} \to \mathcal{D}^{(m+1)}_{X_n}$, d'où par passage à la limite, un isomorphisme :

$$\mathcal{D}_{X_n} \simeq \varinjlim_{m} \mathcal{D}^{(m)}_{X_n}.$$

Enfin, mentionnons que $\Gamma(U,\ \mathcal{D}^{(m)}_{X_n})$ est nœthérien pour tout ouvert affine U et que $\mathcal{D}^{(m)}_{X_n}$ est cohérent (*cf.* [BE 2, 1.2.3] et [BE 3]).

DÉFINITION 1.2.2. — *On pose :*

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} := \varprojlim_n \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}}/\mathfrak{m}^{n+1}\mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \simeq \varprojlim_n \mathcal{D}^{(m)}_{X_n},$$
$$\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}} := K \otimes_{\mathcal{V}} \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}.$$

Pour $m' \geq m$, il existe une injection $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(m')}_{\mathfrak{X}}$, ce qui permet de définir

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}} := \varinjlim_m \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}.$$

Pour tout ouvert affine U de $\mathfrak{X}$, l'anneau $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ est nœthérien grâce à l'analogue pour les anneaux non commutatifs du lemme d'Artin-Rees [BE3, 3.1]. L'anneau $\Gamma(U, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}})$ n'est ni nœthérien ni intègre mais $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ est par contre cohérent [BE3].

On dispose des descriptions locales suivantes de $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ et $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}$ sur un ouvert affine U de $\mathfrak{X}$:

$$\Gamma\big(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}\big) = \Big\{\sum_{k\geq 0} a_k \partial^{\langle k \rangle_{(m)}} \,;\ a_k \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U),\ \|a_k\|_{\mathrm{sp}} \to 0\Big\},$$
$$\Gamma(U, \mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}}) = \Big\{\sum_{k\geq 0} a_k \partial^k/k\,!\,;\ a_k \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U),\ \exists\, \eta < 1,\ c > 0,\ \forall k \geq 0,\ \|a_k\|_{\mathrm{sp}} \leq c\eta^k\Big\}.$$

1.3. Compléments sur la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}$; le corps $\mathcal{K}_{\mathfrak{X}}$.

LEMME 1.3.1. — *Soit $U = \mathrm{Spf}\, A$ un ouvert affine de $\mathfrak{X}$, défini par une $\mathcal{V}$-algèbre A quotient d'un $\mathcal{V}\{t_1, \ldots, t_n\}$. Alors :*

$$A = \big\{f \in A \otimes_{\mathcal{V}} K\,;\ \|f\|_{\mathrm{sp}} \leq 1\big\}.$$

Preuve. — C'est un lemme bien connu mais par manque d'une référence disponible, on en rappelle la preuve. Si f appartient à A, alors $\|f\|_{\mathrm{res}} \leq 1$ où $\|\cdot\|_{\mathrm{res}}$ désigne la norme quotient sur A provenant de la présentation de A. Donc $\|f\|_{\mathrm{sp}} \leq 1$ d'après [BGR, 6.2.3, Prop. 3]. Réciproquement, si $\|f\|_{\mathrm{sp}} \leq 1$, alors f est entier sur A (*cf.* [TAT, 5.2]). On peut écrire f sous la forme g/θ^s avec θ uniformisante de $\mathcal{V}$ et g dans $A\backslash \mathfrak{m}A$. On peut supposer que $s \geq 0$ et on va montrer alors que $s = 0$. En effet, f satisfait une équation :

$$f^n + \sum_{i>0} a_i f^{n-i} = 0, \quad a_i \in A\,;$$

on en déduit que

$$g^n + \sum_{i \geq 0} a_i \theta^{is} g^{n-i} = 0,$$

puis que $\bar{g}^n = 0$ par réduction modulo $\mathfrak{m}$ si s est non nul. Or par hypothèse $A \otimes_{\mathcal{V}} K$ est lisse, donc réduit. D'où $g \in \mathfrak{m}A$, contrairement à notre hypothèse. Donc $s = 0$ et $f \in A$. □

Il résulte de ce lemme que

$$(A \otimes_{\mathcal{V}} K)^0 / (A \otimes_{\mathcal{V}} K)^{\vee} \simeq \overset{\circ}{A} / \overset{\vee}{A} \simeq A \otimes_{\mathcal{V}} k$$

où l'on note

$$\overset{\circ}{A} := \{f \in A\,;\ \|f\|_{\mathrm{sp}} \leq 1\} \text{ et } \overset{\vee}{A} := \{f \in A\,;\ \|f\|_{\mathrm{sp}} < 1\}.$$

Par hypothèse, X est connexe et lisse, donc intègre. D'après [BGR, 6.2.3 Prop. 5], la norme spectrale sur $\mathrm{Spm}(A_K)$ est alors une valuation (c'est-à-dire $\|fg\|_{\mathrm{sp}} = \|f\|_{\mathrm{sp}}\|g\|_{\mathrm{sp}}$ pour f, g dans A) ; cela sera toujours sous-entendu dans la suite.

PROPOSITION 1.3.2. — *Soit* $\mathrm{Spm}(A_K)$ *un espace affinoïde de dimension* 1 *tel que* A_K *soit intègre. Alors toute fonction* f *non nulle dans* A_K *n'a qu'un nombre fini de zéros sur* $\mathrm{Spm}(A_K)$.

Preuve.—Comme A_K est intègre de dimension 1 et f non nulle, $A_K/(f)$ est de dimension zéro ; comme de plus, A_K est nœthérienne, $A_K/(f)$ est artinienne et ne possède donc qu'un nombre fini d'idéaux maximaux. Ce résultat s'applique en particulier sur toute couronne fermée de $]x[$. □

LEMME 1.3.3. — *Si* $\mathrm{Spf}\, A$ *est un ouvert affine de* $\mathfrak{X}$, *alors pour toute fonction* $f \neq 0$ *de* $A \otimes_{\mathcal{V}} K$, *il existe* $g \neq 0$ *dans* A, *telle que* f *soit inversible sur* U_K, *où* $U := \mathrm{Spf}(A_{\{g\}})$ *et telle que* $|f(x)| = \|f\|_{\mathrm{sp}}$ *pour tout* x *dans* U_K *(la norme spectrale est la norme spectrale de* $\mathrm{Spm}(A \otimes_{\mathcal{V}} K)$*).*

Preuve. — D'après 1.3.1, on a

$$A = \{f \in A \otimes_{\mathcal{V}} K\,;\ \|f\|_{\mathrm{sp}} \leq 1\}.$$

Il existe x_0 dans $\mathrm{Spm}(A \otimes_{\mathcal{V}} K)$ tel que $\|f\|_{\mathrm{sp}} = |f(x_0)|$ (principe du maximum). Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $v_p(f(x_0)^n)$ soit dans $v_p(K)$. On peut donc trouver α dans K avec $\|\alpha f^n\|_{\mathrm{sp}} = 1$. On choisit alors $g = \alpha f^n \in A$ tel que $|g(x_0)| = 1$ et $\mathrm{Spf}(A_{\{g\}}) \neq \phi$. Alors, $|g(x)| = 1$ si $x \in U_K$ où $U := \mathrm{Spf}(A_{\{g\}})$. En effet, on a $\|g\|_{\mathrm{sp}} = 1$ et

$$\mathrm{sp}^{-1}(D(\bar{g})) = U_K = \{x \in \mathrm{Spm}(A \otimes_{\mathcal{V}} K)\,;\ |g(x)| \geq 1\},$$

où sp désigne le morphisme de spécialisation [BE1, 0.2.3 et 1.1.1]. Enfin, f n'ayant pas de zéro sur U_K, y est donc inversible. □

Les résultats qui précèdent permettent de définir une norme sur l'anneau local de $\mathcal{X}$ au point générique, et plus précisément :

DÉFINITION 1.3.4. — On pose :

$$\mathcal{K}_{\mathcal{X}} := \varinjlim_{\substack{U \text{affine} \\ \text{dans } \mathcal{X}}} \Gamma(U_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}).$$

D'après 1.3.3, $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ est un corps, qui correspond au corps des éléments admissibles de Dwork et Robba [ROB 2, Introduction]. Chaque U_K est muni d'une norme spectrale. Si $f \in \Gamma(U_K, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$, $\|f\|_{\mathrm{sp}}$ est indépendante de l'ouvert affine U choisi d'après 1.3.3. Cela permet de munir $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ d'une norme, notée $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{X}}}$ et appelée *norme spectrale* sur $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$. Cette norme coïncide avec celle que Fresnel et Van der Put définissent sur leur localisé formel en x [FR-VdPUT, 1.1].

EXEMPLE 1.3.5. — Si $\mathcal{X} = \widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathcal{V}}$, le complété de $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ pour la norme qu'on vient de définir n'est autre que le corps des éléments de Gauss (noté traditionnellement E) qu'on définit en analyse ultramétrique comme le complété de $K(t)$ pour la norme de Gauss; en effet, pour tout élément de $K(t)$, la norme spectrale sur un ouvert générique de $\widehat{\mathbb{A}}^1_K$ coïncide avec la norme de Gauss.

Le fait de travailler avec le complété de $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ plutôt qu'avec $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ lui même semble nécessaire pour obtenir certains résultats d'analye ultramétrique (par exemple, voir les résultats de ROBBA et DWORK dans [ROBI]), quoique dans ce même article ROBBA énonce une conjecture selon laquelle le passage au complété serait superflu [ROBI, 4.26.2] ; mais dans la mesure du possible, afin de conserver un contexte géométrique, on gardera ici notre définition de $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ sans passer au complété.

1.4. Rappels d'analyse ultramétrique.

DÉFINITION 1.4.1. — Soit

$$\eta = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \alpha_i \, t^j$$

une série de Laurent à coefficients dans K, et convergeant sur la circonférence de rayon $\lambda > 0$ de $\widehat{\mathbb{A}}^{1\,\mathrm{an}}_K$. On définit :

$$N(\eta, \lambda) : = \mathrm{Max}\{j \, ; \, |\alpha_j|\lambda^j = \sup_{\mathbb{Z}}(|a_i|\lambda^i)\}, \quad \big(N(0, \lambda) = +\infty\big) \, ;$$
$$n(\eta, \lambda) : = \mathrm{Min}\{j \, ; \, |\alpha_j|\lambda^j = \sup_{\mathbb{Z}}(|a_i|\lambda^i)\}, \quad \big(n(0, \lambda) = -\infty\big).$$

Les valeurs de λ pour lesquelles $N(\eta,\lambda)-n(\eta,\lambda)>0$ sont appelées *valeurs exceptionnelles* de η.

LEMME 1.4.2. — *Les fonctions N et n satisfont aux propriétés suivantes :*

(i) *Si $\lambda_1<\lambda_2$, on a :*

$$N(\eta,\lambda_2)\geq n(\eta,\lambda_2)\geq N(\eta,\lambda_1)\geq n(\eta,\lambda_1).$$

Sur tout intervalle compact de $\mathbb{R}$, il n'y a qu'un nombre fini de valeurs exceptionnelles. La fonction N est continue à droite et n est continue à gauche.

(ii) *Si η converge sur une couronne*

$$C([\lambda,\rho]):=\{x\in\widehat{\mathbb{A}}^{1\,\mathrm{an}}_K\,;\ \lambda\leq|t(x)|\leq\rho\},$$

alors $N(\eta,\rho)-n(\eta,\lambda)$ est égal au nombre de zéros de η sur la couronne. En particulier η est inversible sur la couronne si et seulement si $N(\eta,\rho)=n(\eta,\lambda)$. On a une notion de polygone de Newton attaché à η.

(iii) *Si μ est une autre série de Laurent convergeant sur la circonférence de rayon λ, alors :*

$$N(\eta\mu,\lambda)=N(\eta,\lambda)+N(\mu,\lambda),\quad n(\eta\mu,\lambda)=n(\eta,\lambda)+n(\mu,\lambda).$$

Preuve. — Voir [AMI, 4.2.3 et 4.2.6]. □

LEMME 1.4.3. — *Soit $\eta\in\Gamma(C[\lambda,\rho],\mathcal{O}_{\widehat{\mathbb{A}}^{1\,\mathrm{an}}_K})$; alors :*

(i) *Il existe un polynôme unitaire unique $r(t)$ appartenant à $K[t]$, de degré $(N(\eta,\rho)-n(\eta,\lambda))$ dont tous les zéros sont situés sur la couronne $C([\lambda,\rho])$, et une série de Laurent $\mu(t)$ inversible sur la couronne, tels que $\eta=\mu\,r$ (lemme de Hensel).*

(ii) *Si η est inversible sur la couronne, alors (voir notations en 1.1) :*

$$\forall\lambda_1,\lambda_2\in[\lambda,\rho],\quad \|\eta\|_{\lambda_1}=\|\eta\|_{\lambda_2}\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{N(\eta,\rho)}.$$

(iii) *Si $\lambda\leq\lambda_1<\lambda_2\leq\rho$, alors on a l'inégalité de Schwarz :*

$$\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{n(\eta,\lambda_2)}\leq\frac{\|\eta\|_{\lambda_1}}{\|\eta\|_{\lambda_2}}\leq\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{N(\eta,\lambda_1)}.$$

Preuve. — On renvoie à [AMI, 4.4.9] pour (i) ; (ii) découle de (iii). Soient i et j des indices tels que $\|\eta\|_{\lambda_1}=|a_i|\lambda_1^i$ et $\|\eta\|_{\lambda_2}=|a_j|\lambda_2^j$; on a :

$$\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^i=\frac{|a_i|\lambda_1^i}{|a_i|\lambda_2^i}\geq\frac{|a_i|\lambda_1^i}{|a_j|\lambda_2^j}\geq\frac{|a_j|\lambda_1^j}{|a_j|\lambda_2^j}=\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^j.$$

Comme par hypothèse $\lambda_1<\lambda_2$, on choisit parmi les valeurs possibles de j, $j=n(\eta,\lambda_2)$ et pour i, $i=N(\eta,\lambda_1)$, ce qui fournit l'inégalité la plus précise. □

1.5. Comparaison des normes spectrales sur $\mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ et sur les V_λ.

On renvoie au paragraphe 1.1 pour les conventions et notations.

Les V_λ pour $\lambda < 1$, forment un système fondamental de voisinages stricts de $]X\backslash x[_{\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{X}_K$ [BE 1, 1.2.4 (iii)], indépendants du choix de t pour $\lambda \geq |\theta|$.

LEMME 1.5.1. — *Soit $f \in \Gamma(U_K \cap V_{\lambda_0}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$. L'isomorphisme*

$$u_t :]x[\xrightarrow{\sim} D(0, 1^-)$$

donne un sens à $N(f_{|\,]x[\cap V_\lambda}, \lambda)$ pour λ proche de 1^-. Alors

$$N(f) := \lim_{\lambda \to 1^-} N\big(f_{|\,]x[\cap V_\lambda}, \lambda\big)$$

est fini et ne dépend pas du choix de la coordonnée t.

Preuve. — Comme f n'a qu'un nombre fini de zéros sur $U_K \cap V_{\lambda_0}$ en vertu de 1.3.2, $f_{|\,]x[\cap V_\lambda}$ est inversible pour λ assez proche de $1-$. D'après 1.4.2 (ii), $N(f_{|\,]x[\cap V_\lambda}, \lambda)$ est constant pour λ proche de 1^-, et d'après 1.1.1, V_λ ne dépend pas de t pour $\lambda > |\theta|$. Par conséquent $\|f_{|\,]x[\cap V_\lambda}\|_\lambda$ est intrinsèque pour $\lambda > |\theta|$ et la formule 1.4.3 (ii) montre que $N(f)$ est également intrinsèque.

Si $f_{|\,]x[\cap V_{\lambda_0}}$ s'écrit $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i t^i$, alors on vérifie que $N(f)$ est le plus petit indice i tel que $|\alpha_i| = \operatorname{Sup}_{j\geq 0}(|\alpha_j|)$; autrement dit, si $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i t^i$ est défini sur un voisinage strict de $]\mathbb{G}_{m,k}[_{\widehat{\mathbb{A}}^1_V}$, alors

$$N\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i t^i\Big) = n\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \alpha_i t^i, 1\Big). \quad \square$$

On va maintenant définir un deuxième corps, relatif au point fixé x.

DÉFINITION 1.5.2. — On pose :

$$\mathcal{K}^\dagger_{\mathcal{X},x} := \varinjlim_{\substack{\lambda<1 \\ U \text{affine} \\ \text{contenant } x}} \Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}).$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera simplement $\mathcal{K}^\dagger_{\mathcal{X}}$.

Pour $\mathcal{X} = \widehat{\mathbb{A}}^1_V$, on obtient l'analogue du corps des éléments superadmissibles de Dwork et Robba [ROB2, 0.2]. Ici il s'agit effectivement d'un corps : toute section de $U_K \cap V_\lambda$ ne possède qu'un nombre fini de zéros sur l'affinoïde $U_K \cap V_\lambda$ (*cf.* 1.3.2). Quitte à augmenter λ et rétrécir U, on peut supposer que cette section est inversible.

Il y a plusieurs façons de définir des normes sur $\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X},x}$ et on va montrer que ces normes coïncident.

• Soit donc f dans $\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X},x}$. On pose :

$$\|f\|_{\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X},x}} := \lim_{\lambda \to 1^-} \|f\|_{U_K \cap V_\lambda} ;$$

ce nombre a bien un sens car à λ fixé, $\|f\|_{U_K \cap V_\lambda}$ ne dépend pas de U (*cf.* 1.3.3) et quand λ tend vers 1^-, $\|f\|_{U_K \cap V_\lambda}$ décroît. On définit bien ainsi une norme, comme on le voit par le principe du prolongement analytique [BE1, 0.1.13]. Le complété de $\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X}}$ pour cette norme semble inintéressant car on obtient alors des séries arbitraires en $1/t$ et on perd de ce fait les propriétés de surconvergence.

• On peut également regarder $\|f\|_{\mathcal{K}_\mathfrak{X}}$ qui définit bien une norme sur $\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X},x}$, toujours par le principe du prolongement analytique.

• On peut définir enfin un troisième nombre en considérant les restrictions de f aux couronnes

$$C\big([\lambda, 1[\big) := \big\{x \,;\ \lambda \leq |t(x)| < 1\big\}$$

munies de la norme du Sup. Le nombre $\lim_{\lambda \to 1^-} \|f\|_{[\lambda,1[}$ qui a bien un sens, munit $\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X},x}$ d'une semi-norme. On remarquera que si

$$f_{|\,]x[\,\cap V_\lambda} = \sum_{\mathbb{Z}} \alpha_i t^i,$$

alors

$$\lim_{\lambda \to 1^-} \|f\|_{[\lambda,1[} = \big|\alpha_{N(f)}\big| = \mathrm{Sup}_{i \in \mathbb{Z}} |\alpha_i|.$$

De même, en utilisant 1.4.2 (iii), on constate que

$$f \longmapsto \lim_{\lambda \to 1^-} \|f\|_{[\lambda,1[}$$

est une valuation.

Il existe une flèche naturelle

$$\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X},x} \longrightarrow \mathcal{K}_\mathfrak{X}$$

qui est contractante (pour les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X},x}}$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{K}_\mathfrak{X}}$) et injective par le principe du prolongement analytique. Si $\mathfrak{X} = \widehat{\mathbb{A}}^1_{\mathcal{V}}$, cette flèche conserve la norme car cela est vrai du composé $\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X},x} \to \mathcal{K}_\mathfrak{X} \to \mathcal{K}_{\widehat{\mathfrak{X}}}$ puisque, comme on l'a rappelé en 1.3.5, $\mathcal{K}_{\widehat{\mathfrak{X}}}$ est le complété de $K(t)$ pour la norme spectrale et $K(t)$ est inclus dans $\mathcal{K}^\dagger_{\mathfrak{X},x}$. Cette dernière propriété est vraie en général :

PROPOSITION 1.5.3. — *La famille $(V_\lambda)_{\lambda\to 1^-}$ étant un système fondamental de voisinages stricts de $]X\backslash x[_{\mathcal{X}}$ dans $\mathcal{X}_K$, on a l'égalité (U étant un ouvert de $\mathcal{X}$ contenant x) :*

$$\forall f \in \Gamma(U_K \cap V_{\lambda_0}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_k}), \quad \lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{U_K\cap V_\lambda} = \|f\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{X}}} = \lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{[\lambda,1[}.$$

En particulier, l'inclusion $\mathcal{K}^\dagger_{\mathcal{X},x} \hookrightarrow \mathcal{K}_{\mathcal{X}}$ conserve la norme; et la semi-norme $\lim_{\lambda\to 1^-} \|\cdot\|_{[\lambda,1[}$ est en fait une norme. De plus $\|\cdot\|_{\mathcal{K}^\dagger_{\mathcal{X},x}}$ est une valuation et se lit sur $\widehat{\mathcal{O}}$.

Preuve.

(i) On montre d'abord que $\lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{U_K\cap V_\lambda} = \|f\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{X}}}$. Pour tout $\lambda < 1$, on a $\|f\|_{U_K\cap V_\lambda} \geq \|f\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{X}}}$. Supposons :

$$\lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{U_K\cap V_\lambda} > \|f\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{X}}}.$$

Considérons alors l'affinoïde :

$$W = \big\{y \in U_K \; ; \; |f(y)| \geq \lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{U_K\cap V_\lambda}\big\}.$$

Comme $W \cap]U \setminus x, [= \emptyset$, on a $W \subset]x[$. Par le principe du maximum, il existe $\rho < 1$ tel que $W \subset [x]_\rho$. Pour $\rho < \lambda < 1$, si $y \in U_K \cap V_\lambda$, alors $|f(y)| < \lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{U_K\cap V_\lambda}$; d'où une contradiction car la limite est décroissante. On a donc $\lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{U_K\cap V_\lambda} = \|f\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{X}}}$, et en particulier, $\|\cdot\|_{\mathcal{K}^\dagger_{\mathcal{X},x}}$ est une valuation.

(ii) Pour montrer que $\lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{[\lambda,1[} = \|f\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{X}}}$, on peut supposer que f est inversible sur $U_K \cap V_\lambda$. On a $\|f\|_{[\lambda,1[} \leq \|f\|_{U_K\cap V_\lambda}$ pour tout $\lambda < 1$, donc :

$$\lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{[\lambda,1[} \leq \lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|_{U_K\cap V_\lambda} = \|f\|_{\mathcal{K}_{\mathcal{X}}}.$$

La même inégalité est vraie pour f^{-1}. Comme les deux termes de l'inégalité sont des valuations, on obtient $\lim_{\lambda\to 1^-} \|f\|^{-1}_{[\lambda,1[} \leq \|f\|^{-1}_{\mathcal{K}_{\mathcal{X}}}$, d'où l'égalité. $\square$

COROLLAIRE 1.5.4. — *Si f appartient à $\Gamma(U_K \cap V_{\lambda_0}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K})$, alors $\|f\|_{\mathrm{sp}}$ est dans $|K|$ (rappelons que x est supposé k-rationnel).*

Preuve. — Si $f_{|\,]x[\cap V_\lambda}$ s'écrit $\sum_{\mathbb{Z}} \alpha_i t^i$ alors

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = \|f\|_{[\lambda,1[} = |\alpha_{N(f)}|$$

est un élément de $|K|$. $\square$

COROLLAIRE 1.5.5. — *Si f est dans $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$ et $\|f\|_{\mathrm{sp}} = 1$, alors $N(f)$ est la valuation de f modulo* $\mathfrak{m}$ *dans* $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,x})$.

Preuve. — On peut écrire $f_{|\,]x[\cap V_\lambda}$ sous la forme $\sum_{\mathbb{Z}} \alpha_i t^i$. Comme $\|f\|_{\mathrm{sp}} = 1$, d'après 1.5.3, on a $\mathrm{Sup}_i(|\alpha_i|) = 1 = |\alpha_{N(f)}|$ et $|\alpha_i| < 1$ pour tout $i < N(f)$. On a :

$$\sum_{\mathbb{Z}} \alpha_i t^i = t^{N(f)}\Big(\alpha_{N(f)} + t \sum_{i \geq N(f)} \alpha_i t^{i-N(f)-1}\Big) + \sum_{i<N(f)} \alpha_i t^i.$$

Comme $\sum_{i<N(f)} \alpha_i t^i$ converge sur V_λ,

$$\alpha_{N(f)} + t \sum_{i>N(f)} \alpha_i t^{i-N(f)-1}$$

se prolonge en une fonction de $\Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$ de norme spectrale 1 d'après 1.5.3. On peut donc écrire f sous la forme

$$f = t^{N(f)}\big(\alpha_{N(f)} + tg\big) + h$$

avec $\|h\|_{\mathrm{sp}} < 1$ et $g \in \Gamma(U_{\{t\}}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ (*cf.* 1.3.1). La réduction modulo $\mathfrak{m}$ sur $U_{\{t\}}$ donne $\bar{f} = \bar{t}^{N(f)}(\overline{\alpha}_{N(f)} + \overline{tg})$ avec $\overline{\alpha}_{N(f)} \in K^\times$. Donc $N(f)$ est la valuation de $\bar{f}$ dans $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_{X,x})$. □

2. Norme spectrale sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$

Afin d'établir des théorèmes de division ou de factorisation (lemme de Hensel) sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$, il faut disposer de l'analogue des fonctions $N(\cdot\,, \lambda)$ pour les opérateurs différentiels (voir [ROB1]). Comme l'ont remarqué NARVAEZ et MEBKHOUT [M-N, p. 304], ceci n'est raisonnable que pour $m = 0$.

2.1. Norme spectrale sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ et propriétés.

LEMME 2.1.1. — *Soient U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ et*

$$H := \sum_{k\geq 0} a_k \partial_t^{\langle k\rangle (m)}$$

un opérateur non nul dans $\Gamma(U, \mathcal{D}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$. Pour tout α dans K tel que $\mathrm{Sup}_{k\geq 0} \|\alpha a_k\|_{\mathrm{sp}} = 1$, αH définit un opérateur de $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})$ dont la réduction modulo $\mathfrak{m}$ *est un opérateur de $\Gamma(U, \mathcal{D}^{(m)}_X)$ dont l'ordre ne dépend pas du choix de α. Si de plus U contient x, alors la valuation de αH modulo* $\mathfrak{m}$ *ne dépend pas non plus de α.*

Preuve. — Notons d'abord que l'ordre et la valuation de la réduction de αH modulo $\mathfrak{m}$ sont bien définis [BE4, 2.2]. D'autre part, d'après 1.5.4, on a bien $|\alpha| = (\operatorname{Sup} \|a_k\|)^{-1} \in |K|$.

L'ordre de αH modulo m est le plus grand indice k pour lequel $\|\alpha_k\|_{\text{sp}} = |\alpha|^{-1}$. Il ne dépend donc pas de α. Si on suppose en plus que U contient x, alors si k est cet indice, la valuation de αH modulo $\mathfrak{m}$ est la valuation t-adique de αa_k qui coïncide avec $N(a_k)$ d'après 1.5.4 et qui ne dépend donc pas de α. □

DÉFINITION 2.1.2. — Soit

$$H = \sum_{k \geq 0} a_k \partial_t^{\langle k \rangle (m)}$$

un opérateur dans $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$. On pose :

(i) $\overline{N}(H) :=$ le plus grand indice i vérifiant $\|a_i\|_{\text{sp}} = \operatorname{Sup}_{k \geq 0} \|a_k\|_{\text{sp}}$.

(ii) $\|H\|^{(m)}_{\text{sp}} := \operatorname{Sup}_{k > 0} \|a_k\|_{\text{sp}}$.

(iii) Si U contient x, on pose également $N(H) := N(a_{\overline{N}(H)})$.

Ces trois quantités ne dépendent pas du choix de la coordonnée t d'après 2.2.1, ni du choix de U. La définition est également valable pour $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathcal{X},\mathbb{Q}}$, on notera alors $\|\cdot\|^{\dagger}_{\text{sp}}$. On pourra ôter l'indice m s'il n'y a pas d'ambiguïté.

PROPOSITION 2.1.3. — *La norme spectrale satisfait aux propriétés suivantes* :

(i) $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}}$ *et* $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ *sont des espaces de Banach pour la norme* $\|\cdot\|^{(m)}_{\text{sp}}$.

(ii) *Pour tous* $H, Q \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$, *on a* $\|HQ\|^{(m)}_{\text{sp}} \leq \|H\|^{(m)}_{\text{sp}} \|Q\|^{(m)}_{\text{sp}}$.

(iii) *La norme spectrale sur* $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$ *induit sur tout* $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$*-module cohérent une norme de Banach. La topologie associée ne dépend pas de la présentation du* $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$*-module.*

(iv) *Pour* $m = 0$, *on a* :

$$\|HQ\|_{\text{sp}} = \|H\|_{\text{sp}} \|Q\|_{\text{sp}}\,,$$
$$\overline{N}(HQ) = \overline{N}(H) + \overline{N}(Q),$$
$$N(HQ) = N(H) + N(Q).$$

Preuve.

(i) L'assertion vient de ce que $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$ est complet.

(ii) Écrivons $Q = \sum_{i\geq 0} b_i \partial^{\langle i\rangle_{(m)}}$ et $H = \sum_{j\geq 0} a_j \partial^{\langle j\rangle_{(m)}}$. On obtient :

$$HQ = \sum_{i,j\geq 0} a_j \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \partial(b_i) \frac{q_j^{(m)}!\, q_i^{(m)}!}{i!\, j!} \partial^{i+j-k}$$
$$= \sum_{u\geq 0} \Big\{ \sum_{k\geq 0;\, i\leq u} a_{u+k-i} \partial^k(b_i) \frac{q_{u+k-i}^{(m)}!\, q_i^{(m)}!\, u!}{q_u^{(m)}!\, (u+k-i)!\, i!} \binom{u+k-i}{k} \Big\} \partial^{\langle u\rangle_{(m)}}$$
$$= \sum_{u\geq 0} \Big\{ \sum_{k\geq 0;\, i\leq u} a_{u+k-i} \frac{\partial^k(b_i)}{k!} \Big\langle {u \atop i} \Big\rangle_{(m)} \frac{q_{u+k-i}^{(m)}!}{q_{u-i}^{(m)}!} \Big\} \partial^{\langle u\rangle_{(m)}}.$$

On sait que

$$\Big\| a_{u+k-i} \frac{\partial^k(b_i)}{k!} \Big\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|^{(m)}_{\mathrm{sp}} \|b_i\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|^{(m)}_{\mathrm{sp}} \|Q\|^{(m)}_{\mathrm{sp}}$$

et que $\big\langle {u \atop i} \big\rangle_{(m)}$ appartient à $\mathbb{Z}_p$. Enfin $q_{u+k-i}^{(m)} \geq q_{u-i}^{(m)}$; donc :

$$\|HQ\|^{(m)}_{\mathrm{sp}} \leq H\|^{(m)}_{\mathrm{sp}} \|Q\|^{(m)}_{\mathrm{sp}}.$$

(iii) Si $\mathcal{E}^{(m)}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}$-module cohérent, il admet une présentation :

$$\big(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}\big)^r \xrightarrow{\ u\ } \big(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}}\big)^s \longrightarrow \mathcal{E}^{(m)} \to 0,$$

et on peut munir $\mathcal{E}^{(m)}$ d'une norme de Banach en prenant la norme quotient sur $(\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})^s / u((\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}})^r)$. La topologie ainsi définie ne dépend pas de la présentation, car l'inégalité $\|PQ\|^{(m)} \leq \|P\|^{(m)} \|Q\|^{(m)}$ qu'on vient de démontrer garantit que deux présentations distinctes donnent des normes équivalentes. D'où (iii).

(iv) Si $m = 0$, on trouve :

$$HQ = \sum_{u\geq 0} \Big\{ \sum_{k\geq 0;\, i\leq u} a_{u+k-i} \partial^k(b_i) \binom{u+k-i}{k} \Big\} \partial^u.$$

Pour $u = \overline{N}(H) + \overline{N}(Q)$, $k = 0$ et $i = \overline{N}(Q)$, on trouve le terme

$$a_{u-\overline{N}(Q)} b_{\overline{N}(Q)} = a_{\overline{N}(H)} b_{\overline{N}(Q)}$$

et

$$\big\| a_{\overline{N}(H)} b_{\overline{N}(Q)} \big\|_{\mathrm{sp}} = \big\| a_{\overline{N}(H)} \big\|_{\mathrm{sp}} \big\| b_{\overline{N}(Q)} \big\|_{\mathrm{sp}} = \|H\|_{\mathrm{sp}} \|Q\|_{\mathrm{sp}}.$$

Pour les autres valeurs de k et i, ou bien $i > \overline{N}(Q)$ et alors

$$\left\|a_{u+k-i}\partial^k(b_i)\right\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|_{\mathrm{sp}}\left\|\partial^k(b_i)\right\|_{\mathrm{sp}} < \|H\|_{\mathrm{sp}}\|Q\|_{\mathrm{sp}},$$

ou bien $i \leq \overline{N}(Q)$ et

$$\left\|a_{u+k-i}\partial^k(b_i)\right\|_{\mathrm{sp}} < \|H\|_{\mathrm{sp}}\|Q\|_{\mathrm{sp}}$$

dès que $k > 0$ (car alors $u + k - i > \overline{N}(H)$). On trouve donc :

$$\Big\| \sum_{k\geq 0,\, i\leq u} a_{u+k-i}\partial^k(b_i)\binom{u+k-i}{k}\Big\|_{\mathrm{sp}} = \|H\|_{\mathrm{sp}}\|Q\|_{\mathrm{sp}}$$

pour $u = \overline{N}(H) + \overline{N}(Q)$.

Par le même genre d'arguments, on voit que :

$$\begin{aligned}\Big\| \sum_{k\geq 0, i\leq u} a_{u+k-i}\partial^k(b_i)\binom{u+k-i}{k}\Big\|_{\mathrm{sp}} & \\ &< \|H\|_{\mathrm{sp}}\|Q\|_{\mathrm{sp}} \quad \text{si } u > \overline{N}(H) + \overline{N}(Q), \\ &\leq \|H\|_{\mathrm{sp}}\|Q\|_{\mathrm{sp}} \quad \text{si } u \leq \overline{N}(H) + \overline{N}(Q).\end{aligned}$$

On peut toujours supposer H et Q normalisés par $\|H\|_{\mathrm{sp}} = \|Q\|_{\mathrm{sp}} = 1$; $\overline{N}(H)$ et $\overline{N}(Q)$ sont alors (en notant d et v pour l'ordre et la valuation d'un opérateur dans $\mathcal{D}_X^{(0)}$, le faisceau des opérateurs de niveau zéro sur X, voir [BE3]) égaux à $d(H \bmod \mathfrak{m})$ et $d(Q \bmod \mathfrak{m})$ respectivement tandis que $N(H)$ et $N(Q)$ sont égaux à $v(H \bmod \mathfrak{m})$ et $v(Q \bmod \mathfrak{m})$ respectivement, d'après 1.5.5. Les formules

$$\overline{N}(HQ) = \overline{N}(H) + \overline{N}(Q) \quad \text{et} \quad N(HQ) = N(H) + N(Q)$$

découlent des formules correspondantes pour d et v sur $\mathcal{D}_X^{(0)}$.

Remarques 2.1.4.

(i) L'assertion 2.1.3 (ii) est encore vraie sur $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$, mais par contre $\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ n'est pas complet pour la norme $\|H\|_{\mathrm{sp}}^{\dagger}$. Il n'y a pas égalité en général ; par exemple, si $m = 1$ et $v_p(\alpha) < 1/p$, l'opérateur $\partial + \alpha$ est inversible sur $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}^{(1)}$ et on a :

$$\left\|(\partial + \alpha)^{(-1)}\right\|_{\mathrm{sp}}^{(1)} = p^{pv_p(\alpha)}, \quad \left\|\partial + \alpha\right\|_{\mathrm{sp}}^{(1)} = 1.$$

(ii) On peut définir une autre norme sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$, déjà utilisée dans [M-N ; 4.4.2] sur $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$. Notons $\lambda_m := p^{-1/((p-1)p^m)}$ et π une solution de $X^{p-1} = -p$. Il n'est pas difficile de vérifier que les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$\frac{1}{p^m} < \frac{|q_k^{(m)}\,!| \cdot |\pi|^{\sigma(k)}}{\lambda_m^k} \leq 1 \quad \text{pour} \ \ m \geq 1 \ (\text{notations en 1.2}).$$

On pose alors :

$$\Big\|\sum_{k\geq 0} a_k \partial^{\langle k \rangle_{(m)}}\Big\|'^{(m)} = \operatorname{Sup}\Big(\|a_k\|_{\mathrm{sp}} \Big|\frac{q_k^{(m)}\,!}{k\,!}\Big| \frac{|\pi|^k}{\lambda_m^k}\Big).$$

On définit également :

$$\|\cdot\|^{\dagger} \quad \text{par} \quad \operatorname{Sup}\big(\|a_k\|_{\mathrm{sp}} |\pi|^{\sigma(k)}\big).$$

L'inégalité précédente donne immédiatement :

$$\frac{1}{p^m}\|\cdot\|^{(m)} < \|\cdot\|'^{(m)} \leq \|\cdot\|^{(m)} \quad \text{pour } m \geq 1 \quad \text{et} \quad \|\cdot\|^{(0)} = \|\cdot\|'^{(0)}.$$

Les deux normes $\|\cdot\|^{(m)}$ et $\|\cdot\|'^{(m)}$ sont donc équivalentes. L'intérêt d'introduire $\|\cdot\|'$ vient de ce qu'on a pour tout m (y compris sur $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$) :

$$\|HQ\|'^{(m)} = \|H\|'^{(m)} \|Q\|'^{(m)}$$

pourvu que Q soit à coefficients constants. Pour le voir, il suffit de reprendre les calculs effectués au cours de 2.1.3 (ii). Ce calcul montre en outre, que si on note par $\overline{N}'(H)$, le plus grand indice pour lequel $\|H\|'^{(m)}$ est atteint, alors, avec la même hypothèse sur Q, on a :

$$\overline{N}'(HQ) = \overline{N}'(H) + \overline{N}'(H).$$

Ce sont ces propriétés qui permettent dans [M-N] d'obtenir une division pour les opérateurs de $\mathcal{D}^{\dagger}_{\widehat{\mathbb{A}}^1_K}$ à coefficients constants (relativement au choix d'une coordonnée).

2.2. Caractérisation de l'inversibilité sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ et simplicité.

PROPOSITION 2.2.1. — *Soient U un ouvert affine contenant x et H un opérateur de* $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$.

(i) *Si $m = 0$, alors il existe un ouvert V de $\mathfrak{X}$ tel que $\{x\} \subset V \subset U$ sur lequel H est inversible si et seulement si $\overline{N}(H) = N(H) = 0$. Si $\|H\|_{\mathrm{sp}} = 1$ et $\overline{N}(H) = N(H) = 0$, alors H est inversible dans* $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$.

(ii) *Si $H = \sum_{k\geq 0} a_k \partial^{\langle k \rangle_{(m)}}$ est tel que $\|a_0\| > \|a_k\|$ pour tout $k \geq 1$, alors H est inversible dans $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$ si et seulement si $N(H) = 0$.*

Preuve.

(i) Si H est inversible sur V, alors $HH^{-1} = 1$ entraîne

$$\overline{N}(H) + \overline{N}(H^{-1}) = \overline{N}(1) = 0 \quad \text{et} \quad N(H) + N(H^{-1}) = N(1) = 0,$$

donc $N(H) = \overline{N}(H) = 0$. Réciproquement, si $\overline{N}(H) = N(H) = 0$, alors par définition de $N(H)$, si on écrit $H = \sum_{k\geq 0} a_k \partial^k$, a_0 n'a aucun zéro sur $]x[$. L'ouvert $V := U_{\{a_0\}}$ contient x, et a_0 est inversible sur V. Comme la norme spectrale est une valuation, on a $\|a_k/a_0\|_{\mathrm{sp}} < 1$ pour $k \geq 1$. Alors

$$H^{-1} = \sum_{i\geq 0} \Big\{ - \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{a_0} \partial^k \Big\}^i a_0^{-1} \in \Gamma\big(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}\big)$$

est bien défini car d'une part $\| \sum_{k\geq 0} a_k/a_0 \partial^k \|_{\mathrm{sp}} < 1$ et d'autre part $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$ est complet. Si de plus $\|H\|_{\mathrm{sp}} = 1$, alors :

$$\|a_0\|_{\mathrm{sp}} = 1 \quad \text{et} \quad Q_0^{-1} \in \Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}).$$

Du coup, H appartient à $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$.

(ii) Sous l'hypothèse de l'énoncé, il est facile de voir sur les formules explicites du produit 2.1.3 (ii) que pour tout $Q \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$, $\overline{N}(HQ) = \overline{N}(QH) = \overline{N}(H) + \overline{N}(Q)$ et la même chose pour N. La preuve est ensuite la même qu'en (i). On remarquera par contre que la condition de l'énoncé n'est pas nécessaire pour garantir l'inversibilité comme le montre l'exemple 2.1.4 (i). $\square$

PROPOSITION 2.2.2. — *Pour tout ouvert affine U de $\mathfrak{X}$, $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$ est simple.*

Preuve. — Soient I un idéal bilatère de $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$, x un point fermé de U, t un relèvement d'une coordonnée locale en x. Quitte à faire une extension finie de K, on peut supposer que x est k-rationnel. Soit $H \in \Gamma(U,I)$ non nul, $H = \sum_k a_k\partial^k$. On considère :

$$[H,t] := Ht - tH = \sum_{i\geq 0} ka_k\partial^{k-1}.$$

Si on définit

$$[H,t]^{n+1} := \big[[H,t]^n, t\big],$$

on obtient :

$$\begin{aligned}[H,t]^{\overline{N}(H)} &= \sum_{k\geq \overline{N}(H)} k(k-1)\cdots\big(k-\overline{N}(H)+1\big)a_k\partial^{k-\overline{N}(H)}\\ &= \big(\overline{N}(H)\,!\big)\sum_{k\geq \overline{N}(H)}\binom{k}{\overline{N}(H)}a_k\partial^{k-\overline{N}(H)} \in \Gamma(U,I).\end{aligned}$$

On déduit que $\overline{N}([H,t]^{\overline{N}(H)}) = 0$. On suppose donc maintenant que $\overline{N} = 0$. On considère alors :

$$[H,\partial] := H\partial_t - \partial_t H = \sum_{k\geq 0}(ak\partial^{k+1} - \partial a_k\partial^k) = -\sum_{k\geq 0}\partial(a_k)\partial^k,$$

$$[H,\partial]^{N(H)} = (-1)^{N(H)}\sum_{k\geq 0}\partial^{N(H)}(a_k)\partial^k.$$

On peut écrire $a_{0|\,]x[}$ comme une série en t :

$$a_0 = \sum_{i\geq 0}\alpha_i t_j \qquad (\alpha_i\in K),$$

d'où :

$$\partial^{N(H)}(a_0) = \sum_{i\geq N(H)}\big(N(H)\,!\big)\binom{i}{N(H)}\alpha_i\, t^{i-N(H)}.$$

On a, d'après 1.5.3

$$\big|\alpha_{N(a_0)}\big| = \operatorname{Sup}_i|\alpha_i| = \|a_0\|_{\mathrm{sp}} = \|H\|_{\mathrm{sp}}$$

et, pour tout $i\geq N(H)$

$$\Big|N(H)!\binom{i}{N(H)}\alpha_i\Big| \leq \big|N(H)\,!\,\alpha_{N(H)}\big|.$$

Donc, pour tout $\lambda < 1$, $N(\partial^{N(H)}(a_0), \lambda) = 0$, et $\partial^{N(H)}(a_0)$ est inversible sur $D(0, 1^-)$, de sorte que :

$$\left\|\partial^{N(H)}(a_0)\right\|_{\mathrm{sp}} = \left|N(H)\,!\,\alpha_{N(H)}\right| = \left|N(H)\,!\right| \cdot \|H\|_{\mathrm{sp}}.$$

D'autre part pour $k \geq 1$, on a :

$$\left\|\partial^{N(H)}(a_k)\right\|_{\mathrm{sp}} \leq \left|N(H)\,!\right| \cdot \|a_k\|_{\mathrm{sp}} < \left|N(H)\,!\right| \cdot \|H\|_{\mathrm{sp}}.$$

Finalement, $[H, \partial]^{N(H)}$ appartient à $\Gamma(U, I)$ et

$$\overline{N}\big([H, \partial]^{N(H)}\big) = N\big([H, \partial]^{N(H)}\big) = 0.$$

D'après 2.2.1, la restriction de I à l'ouvert $V := U \cap D(\partial^{N(H)}(a_0))$ est $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$ tout entier, et V contient x. En faisant varier x, on voit que $I = \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$. Donc $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$ est simple. $\square$

3. Division sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$

Le point rationnel x étant fixé, on établit un théorème de division du type « Briançon-Maisonobe » [BR-MAIS] et un lemme de Hensel [ROB1, th. 2.4] sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$. On commence par donner une division euclidienne sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$.

3.1. Division sur $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}}$.

LEMME 3.1.1. — *Soient U un ouvert affine de $\mathcal{X}$ contenant x et b non nul dans $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$. On note V l'ouvert $U_{\{b\}} \cup \{x\}$. Alors, pour tout $a \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$, il existe une décomposition unique $a = \gamma b + r$ telle que :*

(i) $\gamma \in \Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$;

(ii) *r est un polynôme de degré $< N(b)$ (cf. 1.5.1) à coefficients dans K ;*

(iii) $\|a\|_{\mathrm{sp}} = \mathrm{Sup}(\|r\|_{\mathrm{sp}}, \|\gamma b\|_{\mathrm{sp}})$.

Preuve. — D'après [BGR, 5.2.1, th. 2], il existe une division euclidienne sur $K\{t\}$. Posons $\lambda_n := p^{-1/p^n}$. Quitte à passer à une extension galoisienne K_n de K, on peut supposer qu'il existe α_n dans K avec $|\alpha_n| = \lambda_n$. Si a_1 et b_1 sont deux séries dans $\mathcal{O}(D(0, \lambda_n^+))$ alors $a_1(\alpha_n t)$ et $b_1(\alpha_n t)$ sont dans $K\{t\}$. Il existe donc une décomposition

$$a_1(\alpha_n t) = \gamma_n(t) b_1(\alpha_n t) + r_n(t)$$

avec $r_n(t) \in K_n[t]$ de degré $< N(b_1(\lambda_n t), 1)$ et $\gamma_n(t) \in K_n\{t\}$. Comme $\mathrm{Gal}(K_n|K)$ agit sur la décomposition et que celle-ci est unique, on voit qu'en fait $r_n(t)$ est dans $K[t]$ et $\gamma_n(t)$ dans $K\{t\}$. De plus :

$$\big\|a_1(\alpha_n t)\big\|_{\mathrm{sp}} = \|a_1\|_{\lambda_n} = \mathrm{Sup}\big\{\|\gamma_n(t/\alpha_n)\|_{\lambda_n}\|b_1\|_{\lambda_n}, \|r_n(t/\alpha_n\|_{\lambda_n}\big\},$$

$$N(b_1(\alpha_n t), 1) = N(b_1(t), \lambda_n).$$

(On rappelle que $\|\cdot\|_\lambda$ désigne la norme spectrale sur la circonférence de rayon λ). On choisit maintenant :

$$a_1 := a_{|D(0,\lambda_n^+)}, \quad b_1 := b_{|D(0,\lambda_n^+)}.$$

On obtient donc pour tout n, une décomposition

$$a = \gamma_n(t/\alpha_n)b + r_n(t/\alpha_n)$$

avec $r_n(t/\alpha_n) \in K[t]$ et $\gamma_n(t/\alpha_n) \in \mathcal{O}(D(0,\lambda_n^+))$. Par unicité d'une telle division, on en déduit que

$$a = \gamma b + r$$

avec $\gamma \in \widehat{\mathcal{O}}$ et $r \in K[t]$ de degré $< \lim_{n\to+\infty} N(b,\lambda_n) = N(b)$. Maintenant, r étant un polynôme, est défini sur U_K. De plus, on a :

$$\|r\|_{\mathrm{sp}} = \lim_{n\to+\infty} \|r\|_{\lambda_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \|a\|_{\lambda_n} = \|a\|_{\mathrm{sp}} \quad \text{(d'après 1.5.3)},$$

$$\lim_{n\to+\infty} \|\gamma\|_{\lambda_n} \leq \lim_{n\to+\infty} \|a\|_{\lambda_n}/\|b\|_{\lambda_n} = \|a\|_{\mathrm{sp}}/\|b\|_{\mathrm{sp}}.$$

Pour λ assez proche de 1^-, b est inversible sur $V_\lambda \cap V_K$. Donc $(a-r)b^{-1}$ appartient à $\Gamma(V_\lambda \cap V_K, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$. En utilisant alors le recouvrement admissible $(D(0,1^-) \simeq]x[, V_K \cap V_\lambda)$ de V_K, on voit qu'on peut prolonger γ sur V_K et on a :

$$\|\gamma\|_{\mathrm{sp}} \leq \|a-r\|_{\mathrm{sp}}\|b^{-1}\|_{\mathrm{sp}} \leq \|a\|_{\mathrm{sp}}/\|b\|_{\mathrm{sp}}.$$

D'où l'existence de la division telle qu'elle était annoncée. Reste à voir l'unicité. Si $a = \gamma_1 b + r_1 = \gamma_2 b + r_2$ alors on a :

$$(\gamma_1 - \gamma_2)b = r_2 - r_1 \quad \text{et} \quad N\big((\gamma_1-\gamma_2)b\big) = N(r_2 - r_1) < N(b).$$

Si $r_2 - r_1 \neq 0$, alors $\gamma_1 - \gamma_2 \neq 0$ et on a

$$N\big((\gamma_1-\gamma_2)b\big) = N(\gamma_1-\gamma_2) + N(b) \geq N(b)\,;$$

d'où une contradiction. On doit donc avoir $\gamma_1 = \gamma_2$ et $r_1 = r_2$.

3.2. Division de Briançon-Maisonobe.

PROPOSITION 3.2.1. — *Soient U un ouvert affine de $\mathcal{X}$ contenant x et $P \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$ non nul. On note $b \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$ le coefficient d'indice $\overline{N}(P)$ de P (cf. 2.2.1). Soit $V := U_{\{b\}} \cup \{x\}$. Alors, pour tout H dans $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$, il existe une décomposition unique :*

$$H = QP + R + S \quad (\text{resp. } H = PQ' + R' + S')$$

telle que :

(i) *Q, R, S sont dans $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$;*

(ii) *R est d'ordre fini $< \overline{N}(P)$;*

(iii) *S est de la forme*

$$\sum_{i \geq \overline{N}(P)} \mu_i \partial^i, \quad \mu_i \in K[t] \text{ de degré } < N(P).$$

On a de plus :

$$\|H\|_{\mathrm{sp}} = \mathrm{Max}\big(\|Q\|_{\mathrm{sp}} \|P\|_{\mathrm{sp}}, \|R\|_{\mathrm{sp}}, \|S\|_{\mathrm{sp}}\big).$$

En particulier, si H appartient à $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$ alors R et S sont dans $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}})$. Si en outre $\|P\|_{\mathrm{sp}} = 1$, alors on a également $Q \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}})$.

Preuve. — On procède en trois temps. Commençons par une définition.

DÉFINITION 3.2.2. — L'opérateur P de $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{X}})$ est dit *$\overline{N}$-dominant* si P est d'ordre fini $\overline{N}(P)$.

(i) On suppose d'abord H d'ordre fini et P $\overline{N}$-dominant. On utilise l'algorithme suivant :

• $Q_0 = S_0 = 0$, $R_0 = H$.

• A l'étape k, on a une décomposition $H = Q_k P + R_k + S_k$. Pour passer de k à $k+1$ on procède comme suit. Si $\mathrm{ordre}(R_k) \geq \mathrm{ordre}\, P = \overline{N}(P)$ et si $a\partial^n$ est le terme d'ordre maximal de R_k, on effectue la division de a par b (*cf.* 3.1.1) : $a = \gamma b + r$, avec $r \in K[t]$ de degré $< N(b) = N(P)$ et $\gamma \in \Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathcal{X}\mathbb{Q}})$. On pose alors :

$$\begin{aligned} Q_{k+1} &= Q_k + \gamma \partial^{n-\overline{N}(P)}, \\ R_{k+1} &= R_k - \gamma \partial^{n-\overline{N}(P)} P - r\partial^n, \\ S_{k+1} &= S_k + r\partial^n. \end{aligned}$$

• L'algorithme se termine lorsque R_k est d'ordre $< \overline{N}(P)$. En effet :

$$\begin{aligned}&a\partial^n - \gamma\partial^{n-\overline{N}(P)}P - r\partial^n\\&\quad = a\partial^n - \gamma\partial^{n-\overline{N}(P)}\big(b\partial^{\overline{N}(P)} + \text{opérateur d'ordre } < \overline{N}(P)\big) - r\partial^n.\end{aligned}$$

On en déduit que $\operatorname{ordre}(R_{k+1}) < \operatorname{ordre}(R_k)$; l'algorithme s'achève donc en un nombre fini d'étapes. On a d'autre part :

$$\begin{aligned}\|r\partial^n\|_{\mathrm{sp}} &= \|r\|_{\mathrm{sp}} \le \|a\|_{\mathrm{sp}} \le \|R_k\|_{\mathrm{sp}},\\ \|\gamma\partial^{n-\overline{N}(P)}P\|_{\mathrm{sp}} &= \|\gamma\|_{\mathrm{sp}}\|P\|_{\mathrm{sp}}\\ &\le \big(\|a\|_{\mathrm{sp}}/\|b\|_{\mathrm{sp}}\big)\|P\|_{\mathrm{sp}} = \|a\|_{\mathrm{sp}} \le \|R_k\|_{\mathrm{sp}}\end{aligned}$$

et donc :

$$\|R_{k+1}\|_{\mathrm{sp}} \le \|R_k\|_{\mathrm{sp}} \le \cdots \le \|R_0\|_{\mathrm{sp}} = \|H\|_{\mathrm{sp}},$$

la deuxième inégalité venant de ce que $\|b\|_{\mathrm{sp}} = \|P\|_{\mathrm{sp}}$. On en tire :

$$\begin{aligned}&\|\gamma\partial^{n-\overline{N}(P)}\|_{\mathrm{sp}} = \|\gamma\|_{\mathrm{sp}} \le \|R_k\|_{\mathrm{sp}}/\|P\|_{\mathrm{sp}} \le \|H\|_{\mathrm{sp}}/\|P\|_{\mathrm{sp}},\\&\|Q_k\|_{\mathrm{sp}} \le \|H\|_{\mathrm{sp}}/\|P\|_{\mathrm{sp}},\\&\|S_k\|_{\mathrm{sp}} \le \operatorname{Max}\big(\|S_{k-1}\|_{\mathrm{sp}}, \|R_k\|_{\mathrm{sp}}\big) \le \|H\|_{\mathrm{sp}} \quad \text{pour tout } k.\end{aligned}$$

En outre, les relations

$$S_{k+1} = S_k + r\partial^n \quad \text{et} \quad S_0 = 0$$

montrent que tous les coefficients non nuls de S_k correspondent à des indices $\ge \overline{N}(P)$ et que ces coefficients sont des polynômes de degré $< N(P)$. De plus S_k est d'ordre fini $\le \operatorname{ordre}(H)$. Posant enfin

$$R = \lim_k R_k, \quad S = \lim_k S_k, \quad Q = \lim_k Q_k,$$

on obtient une décomposition

$$H = QP + R + S$$

dont il reste à voir l'unicité.

Si $H = Q_1P + R_1 + S_1 = Q_2P + R_2 + S_2$ alors $(Q_1 - Q_2)P = R_2 - R_1 + S_2 - S_1$. Si $Q_1 - Q_2 \ne 0$, on a $\overline{N}\big((Q_1 - Q_2)P\big) \ge \overline{N}(P)$. Comme on a $\operatorname{ordre}(R_2 - R_1) < \overline{N}(P)$, on doit donc avoir :

$$\overline{N}\big((Q_1 - Q_2)P\big) = \overline{N}(S_2 - S_1) \quad \text{et} \quad N\big((Q_1 - Q_2)P\big) = N(S_2 - S_1).$$

Mais on a $N(S_2 - S_1) < N(P)$ si $S_2 - S_1 \neq 0$ tandis que

$$N\big((Q_1 - Q_2)P\big) \geq N(P).$$

Il faut donc que $S_1 = S_2$, ce qui entraîne $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$. On a donc démontré la proposition dans le cas H d'ordre fini, P $\overline{N}$-dominant.

(ii) On suppose $H \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)})$ quelconque et P toujours $\overline{N}$-dominant. Les opérateurs d'ordre fini sont denses dans $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)})$ pour la norme spectrale. D'autre part l'application qui à H d'ordre fini associe le triplet (Q, R, S) construit en (ii) est bien définie (unicité de la division) et continue pour la norme spectrale. On peut donc la prolonger à $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)})$ tout entier. Par passage à la limite, les inégalités sur les normes sont toujours vérifiées, ainsi que la forme de S.

(iii) Maintenant, H et $P \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)})$ sont quelconques. On note P_0 le tronqué de P à l'ordre $\overline{N}$, P_0 étant donc constitué des termes d'ordre $\leq \overline{N}(P)$. D'après (ii), il existe (Q_1, R_1, S_1) appartenant à

$$\Gamma\big(V, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}^{(0)}\big) \times \Gamma\big(V, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}\big)^2$$

tels que $H = Q_1 P_0 + R_1 + S_1$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
&H = Q_1 P + R_1 + S_1 + Q_1(P_0 - P),\\
&\|R_1\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|_{\mathrm{sp}},\\
&\|S_1\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|_{\mathrm{sp}},\\
&\|Q_1\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|_{\mathrm{sp}}/\|P_0\|_{\mathrm{sp}} = \|H\|_{\mathrm{sp}}/\|P\|_{\mathrm{sp}}.
\end{aligned}$$

On a donc

$$\big\|Q_1(P_0 - P)\big\|_{\mathrm{sp}} \leq \lambda \|H\|_{\mathrm{sp}}$$

avec $\lambda = \|P_0 - P\|_{\mathrm{sp}}/\|P\|_{\mathrm{sp}} < 1$ qui ne dépend que de P. On poursuit avec $H_1 = Q_1(P_0 - P)$ à la place de H. A l'étape k, on obtient

$$H_k = Q_k P + R_k + S_k + H_{k+1}$$

avec $\|H_{k+1}\|_{\mathrm{sp}} < \lambda \|H_k\|_{\mathrm{sp}} < \lambda^{k+1}\|H\|_{\mathrm{sp}}$, de sorte que $\|H_k\|_{\mathrm{sp}}$ tend vers 0 et, comme

$$\|H_k\|_{\mathrm{sp}} = \mathrm{Sup}\big(\|Q_k\|_{\mathrm{sp}}\|P\|_{\mathrm{sp}}, \|R_k\|_{\mathrm{sp}}, \|S_k\|_{\mathrm{sp}}\big),$$

S_k, R_k et Q_k convergent également vers 0. Alors

$$H = \Big(\sum_k Q_k\Big)P + \sum_k (R_k + S_k)$$

est la division souhaitée, l'unicité se démontrant comme pour les opérateurs finis.

(iv) Si on suppose en outre que H appartient à $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$, alors l'inégalité $\|H\|_{\mathrm{sp}} \geq \max\big(\|R\|_{\mathrm{sp}}, \|S\|_{\mathrm{sp}}\big)$ entraîne que $\|R\|_{\mathrm{sp}} \leq 1$ et $\|S\|_{\mathrm{sp}} \leq 1$, ce qui, en vertu de 1.3.1, équivaut au fait que R et S sont dans $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$. Enfin, si on a $\|P\|_{\mathrm{sp}} = 1$, l'inégalité

$$\|Q\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|_{\mathrm{sp}}$$

montre que Q appartient à $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$ si H est dans $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$.

REMARQUES 3.2.3.

(i) On aurait pu également démontrer la proposition en normalisant H et P puis en les réduisant modulo $\mathfrak{m}$ et en utilisant de façon répétée la division de Briançon-Maisonobe [BR-MAIS, Lemme 1] encore valable sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathcal{O}_{X,x}}$. On a besoin dans ce cas de 1.5.5. La division 3.1.1 peut également se démontrer en se ramenant à $\mathcal{O}_{X,x}$.

(ii) Si $N(P) = 0$ alors $S = 0$ et $H = QP + R$.

(iii) Dans la preuve, il est essentiel que $\|\cdot\|_{\mathrm{sp}}$ soit une valuation et que $\overline{N}(PQ) = \overline{N}(P) + \overline{N}(Q)$. Si les coefficients de H sont seulement définis sur un $U_K \cap V_\lambda$, on a besoin d'hypothèses supplémentaires pour obtenir une division (voir [GARN, I.5]).

(iv) On a montré au cours de la preuve que si H est d'ordre fini et P $\overline{N}$-dominant, alors S est d'ordre $\leq$ ordre(H).

Dans l'énoncé suivant, la norme spectrale utilisée est la norme $\|\cdot\|'^{(m)}$ sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ définie en 2.1.4 (ii) ; la fonction $\overline{N}'$ est relative à cette norme. Ce résultat généralise celui de MEBKHOUT et NARVAEZ [M-N].

PROPOSITION 3.2.4. — *Soient U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x, t une coordonnée locale en x et $P = \sum_i \alpha_i \partial^{[i]}$ (avec $\alpha_i \in K$) un opérateur de $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$ à coefficients dans K. Alors, pour tout H dans $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$, il existe une décomposition unique $H = QP + R$ possédant les mêmes propriétés que la division* 3.2.1 *en remplaçant $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ par $\widehat{\mathcal{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ et $\overline{N}$ par $\overline{N}'$. Un énoncé analogue existe pour $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$.*

Preuve. — Elle est quasiment la même que pour 3.2.1, en utilisant 2.1.4 (ii) à la place de 2.1.3. On reprend les trois étapes de la preuve de 3.2.1.

(i) Dans ce cas P est $\|\cdot\|'^{(m)}$-dominant de monôme initial $b\partial^{\overline{N}'(P)}$. On reprend l'algorithme de 3.2.1 (i). Ici, on a $r = 0$ et $\gamma = b^{-1}a$ et les inégalités de 3.2.1 (i) deviennent alors

$$\left\|\gamma\partial^{n-\overline{N}'(P)}P\right\|'^{(m)} = \left\|\gamma\partial^{n-\overline{N}'(P)}\right\|'^{(m)} \|P\|'^{(m)}$$
$$\leq \cdots \leq \frac{\|a\|_{\mathrm{sp}}}{\|b\|_{\mathrm{sp}}}\frac{|\pi|^{n-\overline{N}'(P)}}{\lambda_m^{n-\overline{N}'(P)}}\|P\|'^{(m)} = \frac{\|a\|_{\mathrm{sp}}|\pi|^n}{\lambda_m^n} \leq \|R_k\|'^{(m)}$$

et donc :

$$\|R_{k+1}\|'^{(m)} \leq \|R_k\|'^{(m)} \leq \cdots \leq \|R_0\|'^{(m)} = \|H\|'^{(m)}.$$

La première inégalité venant de ce que P est à coefficients constants et de ce qu'on a par hypothèse :

$$\|P\|'^{(m)} = \|b\|_{\mathrm{sp}}|\pi|^{\overline{N}'(P)}/\lambda_m^{\overline{N}'(P)}.$$

On en tire pour tout k :

$$\left\|\gamma\partial^{n-\overline{N}(P)}\right\|'^{(m)} \leq \|H\|'^{(m)}/\|P\|'^{(m)}, \quad \|Q_k\|'^{(m)} \leq \|H\|'^{(m)}/\|P\|'^{(m)}.$$

La fin de (i) est alors identique à celle de 3.2.1 (i) en utilisant 2.1.4 (ii). (Noter que l'unicité se démontre plus aisément ici puisque S est nul.)

(ii) Ce cas se traite à l'identique de 2.1.3 (ii), grâce à la complétude de $\widehat{\mathfrak{D}}^{(m)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$.

(iii) Le raisonnement de 3.2.1 (iii) est encore valable en remarquant que l'opérateur $(P_0 - P)$ est encore à coefficients constants, de sorte que

$$\|Q_1(P_0 - P)\|'^{(m)} = \|Q_1\|'^{(m)}\|P_0 - P\|'^{(m)} \leq \lambda\|H\|'^{(m)} \quad \text{avec } \lambda < 1.$$

La preuve est ainsi complète. □

3.3. Lemme de Hensel.

On va démontrer maintenant l'analogue du lemme de Hensel de l'analyse ultramétrique. La méthode utilisée est une généralisation à $\widehat{\mathfrak{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ du lemme de Hensel exposé dans [ROB1, th. 2.4].

PROPOSITION 3.3.1. — *Soient U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x et $H \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$ non nul. On note $b \in \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$ le coefficient d'indice $\overline{N}(H)$ de H et $V := U_{\{b\}} \cup \{x\}$. Alors, il existe une décomposition unique :*

$$H = QP + S \quad (\text{resp. } H = P'Q' + S')$$

telle que :

(i) *Q, P, S appartiennent à $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$;*

(ii) *P est d'ordre fini $\overline{N}(H)$, $\overline{N}$-dominant, de coefficient initial $b\partial^{\overline{N}(H)}$;*

(iii) *S est de la forme $\sum_{i \geq \overline{N}(H)} \mu_i \partial^i$ avec $\mu_i \in K[t]$ de degré $< N(P)$.*

On a de plus :

(iv) *$\|Q\|_{\mathrm{sp}} = 1$ et il existe un ouvert W tel que $\{x\} \subset W \subset U$, et tel que Q soit inversible dans $\Gamma(W, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$;*

(v) *$\|S\|_{\mathrm{sp}} < \|H\|_{\mathrm{sp}}$.*

Preuve. — On note P_0 le tronqué de H à l'ordre $\overline{N}(H)$, constitué des termes d'ordre $\leq \overline{N}(H)$. On utilise l'algorithme suivant :

- A l'étape $n, H = Q_n P_n + R_n + S_n$ est la division de H par P_n (*cf.* 3.2.1).
- On pose $P_{n+1} := P_n + R_n$ et on note $\lambda := \|H - P_0\|_{\mathrm{sp}} / \|H\|_{\mathrm{sp}} < 1$.

Considérons alors les propriétés :

(a_n) P_n est d'ordre fini $\overline{N}(H)$, dominant, de coefficient dominant b;
(b_n) $\|1 - Q_n\|_{\mathrm{sp}} \leq \lambda$;
(c_n) $\|R_n\|_{\mathrm{sp}} \leq \lambda^{n+1} \|H\|_{\mathrm{sp}}$ et $\|S_n - S_{n-1}\|_{\mathrm{sp}} \leq \lambda^{n+1} \|H\|_{\mathrm{sp}}$;
(d_n) $\|Q_n - Q_{n-1}\|_{\mathrm{sp}} \leq \lambda^{n+1}$.

On va montrer que $(a_0), (b_0), (c_0)$ sont vraies et que $(a_n), (b_n), (c_n)$ entraînent $(a_{n+1}), (b_{n+1}), (c_{n+1}), (d_{n+1})$.

(i) Par définition de P_0, (a_0) est vraie. D'autre part, on a :

$$H - P_0 = (Q_0 - 1)P_0 + R_0 + S_0.$$

Par unicité de la division 3.2.1, il s'agit de la division de $(H - P_0)$ par P_0 (R_0 et S_0 ont la forme requise et l'unicité ne requiert pas les inégalités sur les normes). On obtient donc

$$\|(Q_0 - 1)P_0\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H - P_0\|_{\mathrm{sp}},$$

d'où $\|Q_0 - 1\|_{\mathrm{sp}} \leq \lambda$ et (b_0).

De même, on a :

$$\|R_0\|_{\mathrm{sp}} \le \|H - P_0\|_{\mathrm{sp}} \le \lambda\|H\|_{\mathrm{sp}} \quad \text{et} \quad \|S_0\|_{\mathrm{sp}} \le \lambda\|H\|_{\mathrm{sp}}.$$

(ii) Supposons $(a_n), (b_n), (c_n)$ vérifiées. Par hypothèse, on a

$$\mathrm{ordre}(R_n) < \mathrm{ordre}(P_n).$$

Comme $P_{n+1} = P_n + R_n$, P_{n+1} et P_n ont même coefficient d'indice $\overline{N}(H)$, en l'occurence b. De plus $\|R_n\|_{\mathrm{sp}} \le \|H\|_{\mathrm{sp}}$, donc P_{n+1} est $\overline{N}$-dominant, d'où (a_{n+1}). De l'égalité

$$H = Q_nP_n + R_n + S_n = Q_{n+1}(P_n + R_n) + S_{n+1} + R_{n+1},$$

on déduit la relation

$$(1 - Q_{n+1})R_n = (Q_{n+1} - Q_n)P_n + R_{n+1} + S_{n+1} - S_n.$$

Or, $\mathrm{ordre}(R_{n+1}) < \overline{N}(P_{n+1}) = \overline{N}(P_n)$ et les coefficients de $(S_{n+1} - S_n)$ sont des polynômes de degré $< N(P_{n+1}) = N(P_n)$, de sorte que l'égalité ci-dessus est la division de $(1 - Q_{n+1})R_n$ par P_n. On a donc :

$$\begin{aligned}\|Q_{n+1} - Q_n\|_{\mathrm{sp}} &\le \|1 - Q_{n+1}\|_{\mathrm{sp}}\|R_n\|_{\mathrm{sp}}/\|P_n\|_{\mathrm{sp}}\\ &\le \|1 - Q_{n+1}\|_{\mathrm{sp}}\lambda^{n+1}\|H\|_{\mathrm{sp}}/\|P_n\|_{\mathrm{sp}}\\ &= \lambda^{n+1}\|1 - Q_{n+1}\|_{\mathrm{sp}}.\end{aligned}$$

Comme $\|1 - Q_{n+1}\|_{\mathrm{sp}} \le \mathrm{Max}(\|1 - Q_n\|_{\mathrm{sp}}, \|Q_{n+1} - Q_n\|_{\mathrm{sp}})$ et $\lambda < 1$, on doit avoir

$$\|1 - Q_{n+1}\|_{\mathrm{sp}} \le \|1 - Q_n\|_{\mathrm{sp}} \le \lambda \quad \text{puis} \quad \|Q_{n+1} - Q_n\|_{\mathrm{sp}} \le \lambda^{n+2},$$

d'où (b_{n+1}) et (d_{n+1}). On tire encore de la division

$$\begin{gathered}\|R_{n+1}\|_{\mathrm{sp}} \le \|1 - Q_{n+1}\|_{\mathrm{sp}}\|R_n\|_{\mathrm{sp}} \le \lambda\|R_n\|_{\mathrm{sp}} \le \lambda^{n+2}\|H\|_{\mathrm{sp}},\\ \|S_{n+1} - S_n\|_{\mathrm{sp}} \le \lambda^{n+2}\|H\|_{\mathrm{sp}},\end{gathered}$$

d'où (c_{n+1}).

(iii) Comme $\lambda < 1$, la propriété (c_n) montre que R_n tend vers 0 et que (S_n) et une suite de Cauchy ; de même (d_n) et l'égalité $P_{n+1} - P_n = R_n$ montrent que (Q_n) et (P_n) sont également de Cauchy. Donc S_n, P_n, Q_n convergent dans $\Gamma(V, \widehat{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)})$ vers S, P, Q respectivement, ce qui donne la décomposition $H = QP + S$. La relation (a_n) montre que P a la forme requise. Les coefficients de S_n sont des polynômes de degré $< N(P_n) = N(H)$ et d'autre part :

$$\|S_n\|_{\mathrm{sp}} \leq \operatorname*{Max}_{k\in[0,n-1]}\big(\|S_0\|_{\mathrm{sp}}, \|S_{k+1} - S_k\|_{\mathrm{sp}}\big) \leq \lambda\|H\|_{\mathrm{sp}}.$$

Donc $\|S\|_{\mathrm{sp}} < \|H\|_{\mathrm{sp}}$ et S a la forme requise.

(iv) Examinons maintenant l'unicité. S'il existe deux décompositions $H = Q_1P_1 + S_1 = Q_2P_2 + S_2$, alors, comme

$$\operatorname{ordre}(P_1) = \operatorname{ordre}(P_2) = \overline{N}(H)$$

et que P_1 et P_2 ont même coefficient initial, on a $\operatorname{ordre}(P_1 - P_2) < \overline{N}(H)$. De l'égalité $(Q_1 - Q_2)P_1 = Q_2(P_2 - P_1) + S_2 - S_1$, on tire :

$$\overline{N}\big((Q_1 - Q_2)\big)P_1 \geq \overline{N}(P_1) = \overline{N}(H) \quad \text{si } Q_1 - Q_2 \neq 0,$$
$$\overline{N}\big(Q_2(P_2 - P_1)\big) = \overline{N}(P_2 - P_1) < \overline{N}(H).$$

Distinguons deux cas :

$$(*) \qquad \|Q_2(P_2 - P_1)\|_{\mathrm{sp}} \leq \|S_2 - S_1\|_{\mathrm{sp}}.$$

Alors si $(S_2 - S_1)$ est non nul, le coefficient d'indice $\overline{N}(S_2 - S_1)$ dans $Q_2(P_2-P_1)$ est de norme $< \|Q_2(P_2-P_1)\|_{\mathrm{sp}}$, donc de norme $< \|S_2-S_1\|_{\mathrm{sp}}$ car

$$\overline{N}\big(Q_2(P_2 - P_1)\big) < \overline{N}(H) \leq \overline{N}(S_2 - S_1).$$

D'où

$$N\big(Q_2(P_2 - P_1) + S_2 - S_1\big) = N(S_2 - S_1) < N(H)$$

alors que

$$N\big((Q_1 - Q_2)P_1\big) \geq N(P_1) = N(H).$$

Il faut donc $S_1 = S_2$, d'où avec notre hypothèse, $Q_2(P_2 - P_1) = 0$, puis $P_2 = P_1$ car $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ est intègre. Il vient alors $(Q_1 - Q_2)P_1 = 0$ et $Q_1 = Q_2$.

$$(**) \qquad \|Q_2(P_2 - P_1)\|_{\mathrm{sp}} > \|S_2 - S_1\|_{\mathrm{sp}}.$$

On a alors

$$\overline{N}\big(Q_2(P_2 - P_1) + S_2 - S_1\big) = \overline{N}\big(Q_2(P_2 - P_1)\big) < \overline{N}(H) \quad \text{si} \quad P_1 \neq P_2,$$

tandis que

$$\overline{N}\big((Q_1 - Q_2)P_1\big) \geq \overline{N}(P_1) = \overline{N}(H).$$

Il faut donc que $P_1 = P_2$, ce qui entraîne $Q_1 = Q_2$, et $S_1 = S_2$.

(v) Il reste à voir l'inversibilité de Q. Comme $\|S\|_{\rm sp} < \|H\|_{\rm sp}$, on a $\overline{N}(H) = \overline{N}(QP)$ et comme $\overline{N}(H) = \overline{N}(P)$, on obtient $\overline{N}(Q) = 0$. On a également $\|QP\|_{\rm sp} = \|H\|_{\rm sp}$ et $N(QP) = N(H)$. Donc $\|Q\|_{\rm sp} = 1$ et $N(Q) = 0$. Il existe donc un ouvert $W \subset U$, tel que $x \in W$ et tel que Q soit inversible dans $\Gamma(W, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$ (*cf.* 2.2.1). □

COROLLAIRE 3.3.2. — *Si $H \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$ et $N(H) = 0$ alors il existe un voisinage ouvert V de x dans U tel que sur V, H s'écrive $H = QP$ avec $\|Q\|_{\rm sp} = 1$, Q inversible, P $\overline{N}$-dominant de coefficient initial le coefficient d'indice $\overline{N}(H)$ de H.*

4. Base de division d'un idéal

On va maintenant définir une notion de base de division pour un idéal à gauche (cohérent) $\mathcal{J}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$, analogue à la notion classique de [BR-MAIS, I]. Si $\sum_{i\geq 0} a_i\partial^i$ désigne un opérateur d'ordre d à coefficients dans $\mathcal{O}_{X,x}$, on peut lui associer le couple $(v(a_d), d)$ dont la nullité équivaut à l'inversibilité de l'opérateur. Ici c'est le couple $(N, \overline{N})$ qui caractérise le défaut d'inversibilité sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$; $\overline{N}$ joue le rôle de l'ordre et N celui de la valuation ; d'ailleurs après normalisation $\overline{N}$ et N sont l'ordre et la valuation de l'opérateur modulo $\mathfrak{m}$ (*cf.* 1.5.5) (par contre N et $\overline{N}$ ne vérifient pas l'inégalité triangulaire). Dans la suite $\mathcal{J}$ (respectivement $\mathcal{J}_{\mathbb{Q}}$) désigne un idéal à gauche cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ (respectivement $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$). Un tel idéal est caractérisé par ses sections globales sur les affines [BE3]. La notion de base de division est définie sur $\mathcal{J}_x$.

4.1. Définitions.

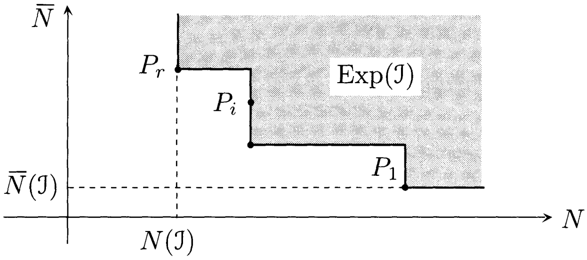
DÉFINITION 4.1.1. — Si $Q \in \mathcal{J}_x$ est un opérateur défini sur un ouvert affine contenant x, on lui associe le couple $(N(Q), \overline{N}(Q))$, dont on a vu qu'il ne dépendait pas de l'ouvert U (voir 2.1.1 et 2.1.2). L'*exposant* de $\mathcal{J}$ en x est alors :

$$\operatorname{Exp}(\mathcal{J}) := \big\{(N(Q), \overline{N}(Q))\,;\ Q \in \mathcal{J}_x\big\}.$$

On a

$$\operatorname{Exp}(\mathcal{J}) = \operatorname{Exp}(\mathcal{J}) + \mathbb{N}^2$$

car $\overline{N}(\partial^k Q) = k + \overline{N}(Q)$ et $N(t^k Q) = k + N(Q)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$. Il en résulte que $\mathrm{Exp}(\mathcal{I})$ est délimité inférieurement par un « escalier » ayant un nombre fini de coins (voir figure ci-dessous).



DÉFINITION 4.1.2. — On appelle *base de division* de l'idéal $\mathcal{I}$ en x, une famille d'opérateurs $(P_1, ..., P_r)$ de $\mathcal{I}_x$ échelonnée par la fonction $\overline{N}$, c'est-à-dire

$$\overline{N}(P_{i+1}) = \overline{N}(P_i) + 1$$

et telle que $\|P_i\|_{\mathrm{sp}} = 1$ pour tout i; P_1 est de fonction $\overline{N}$ minimale dans $\mathcal{I}_x$ et de fonction N minimale parmi les opérateurs de $\mathcal{I}_x$ ayant même fonction $\overline{N}$ que lui ; P_r est de fonction N minimale dans $\mathcal{I}_x$ et de fonction $\overline{N}$ minimale parmi les opérateurs de $\mathcal{I}_x$ ayant même fonction N que lui. Plus généralement P_i est de fonction N minimale parmi les opérateurs de $\mathcal{I}_x$ ayant même fonction $\overline{N}$. On note :

$$\overline{N}(\mathcal{I}) := \overline{N}(P_1), \quad N(\mathcal{I}) := N(P_r).$$

Il n'existe pas forcément de telle base. On a une définition analogue pour un idéal de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$; dans ce cas il existe toujours des bases de division, car on peut normaliser les opérateurs de l'escalier pour qu'ils soient de norme 1.

4.2. Division par la base.

PROPOSITION 4.2.1 (Division par la base de division). — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal à gauche cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ (ou $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$). On suppose que $\mathcal{I}$ possède une base de division $(P_1, ..., P_r)$ relativement au point x. Soit V un ouvert de $\mathfrak{X}$ contenant x sur lequel les P_i sont définis et tel que sur $V\backslash\{x\}$, pour chaque P_i, le coefficient d'indice $\overline{N}(P_i)$ soit inversible. Soient U un ouvert de $\mathfrak{X}$ contenant x et $H \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$. Il existe une décomposition unique*

$$H = \sum_{i=1}^{r} Q_i P_i + R + S$$

vérifiant :

(i) *Q_r, R, S appartiennent à* $\Gamma(U \cap V, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)})$;

(ii) *Q_i appartient à* $\Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ *pour* $i \neq r$;

(iii) *R est d'ordre fini* $< \overline{N}(\mathcal{I})$;

(iv) *S est de la forme :*

$$S_r + \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \partial^{\overline{N}(P_i)} \quad \textit{où} \quad \mu_i \in \mathcal{V}[t] \text{ est de degré} < N(P_i),$$

avec

$$S_r = \sum_{i \geq \overline{N}(P_r)} \mu_i \partial^i \quad \textit{où} \quad \mu_i \in \mathcal{V}[t] \text{ est de degré } < N(\mathcal{I}),$$

On a de plus :

$$\|H\|_{\mathrm{sp}} = \mathrm{Sup}\big(\mathrm{Sup}_i \|Q_i\|_{\mathrm{sp}}, \|R\|_{\mathrm{sp}}, \|S\|_{\mathrm{sp}}\big).$$

REMARQUE. — Tous les monômes de $R + S$ sont situés sous l'escalier de $\mathcal{I}$. La nullité de $R + S$ est donc équivalente à $H \in \mathcal{I}_x$.

Preuve. — On commence par diviser H par P_r :

$$H = Q_r P_r + S_r + R_r.$$

On a

$$\|H\|_{\mathrm{sp}} = \mathrm{Max}(\|Q_r\|_{\mathrm{sp}}, \|S_r\|_{\mathrm{sp}}, \|R_r\|_{\mathrm{sp}})$$

car $\|P_r\|_{\mathrm{sp}} = 1$, et R_r est d'ordre fini $< \overline{N}(P_r)$. Supposons démontrée une décomposition :

$$H = \sum_{i \geq k+1} Q_i P_i + \sum_{i \geq \overline{N}(P_{k+1})} \mu_i \partial^i + R_{k+1} + H_{k+1}$$

vérifiant :

- R_{k+1} est d'ordre fini $< \overline{N}(P_{k+1})$;
- $\|R_{k+1}\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|_{\mathrm{sp}}$, les μ_i étant comme dans l'énoncé ;
- $Q_i \in \Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ pour $i \neq r$ et
- $\|H_{k+1}\|_{\mathrm{sp}} \leq \lambda_{k+1} \|H\|_{\mathrm{sp}}$ avec $\lambda_{k+1} < 1$.

Comme $\overline{N}(P_k) = \overline{N}(P_{k+1}) - 1$ et $\overline{N}(R_{k+1}) < \overline{N}(P_{k+1})$, on a $\overline{N}(R_{k+1}) \leq \overline{N}(P_k)$. Si $\overline{N}(R_{k+1}) < \overline{N}(P_k)$ alors on pose $Q_k = 0$, $\mu_k = 0$

et $R_k = R_{k+1}$. Sinon, on a $\overline{N}(R_{k+1}) = \overline{N}(P_k) = \mathrm{ordre}(R_{k+1})$. On divise alors R_{k+1} par $\overline{P}_k$ le tronqué de P_k à l'ordre $\overline{N}(P_k)$:

$$R_{k+1} = \eta_k \overline{P}_k + \mu_k \partial^{\overline{N}(P_k)} + R_k$$

avec R_k d'ordre fini $< \overline{N}(P_k)$, η_k appartenant à $\Gamma(U \cap V, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$, $\|\eta_k\|_{\mathrm{sp}} \leq \|R_{k+1}\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|_{\mathrm{sp}}$ et μ_k polynôme de degré $< N(P_k)$. Il vient :

$$R_{k+1} = \big(\eta_k P_k + \mu_k \partial^{\overline{N}(P_k)} + R_k\big) + \eta_k(\overline{P}_k - P_k),$$
$$\big\|\eta_k(\overline{P}_k - P_k)\big\|_{\mathrm{sp}} = \|\eta_k\|_{\mathrm{sp}}\lambda'_k \leq \lambda'_k\|H\|_{\mathrm{sp}} \quad \text{avec } \lambda'_k = \|(P_k - \overline{P}_k)\| < 1,$$

ce qui fournit la décomposition au rang k avec :

- $Q_k = \eta_k$,
- $H_k = H_{k+1} + \eta_k(\overline{P}_k - Pk)$,
- $\|H_k\|_{\mathrm{sp}} \leq \lambda_k \|H\|_{\mathrm{sp}}$ avec $\lambda_k = \mathrm{Max}(\lambda'_k, \lambda_{k+1}) < 1$.

Finalement on trouve :

$$H = \sum Q_i P_i + \sum_{i \geq \overline{N}(\mathcal{I})} \mu_i \partial^i + R_1 + H_1,$$
$$\|H_1\|_{\mathrm{sp}} < \lambda \|H\|_{\mathrm{sp}} \quad \text{avec } \lambda = \lambda_1 = \mathrm{Max}_k\big(\|(P_k - \overline{P}_k)\|_{\mathrm{sp}}\big) < 1.$$

On peut donc faire converger le procédé en recommençant avec H_1 à la place de H, pour obtenir une décomposition de la forme voulue. On a également :

$$\|Q_i\|_{\mathrm{sp}} \leq \|H\|_{\mathrm{sp}}/\|P_i\|_{\mathrm{sp}} = \|H\|_{\mathrm{sp}}, \quad \mathrm{Max}\big(\|R\|_{\mathrm{sp}}, \|S\|_{\mathrm{sp}}\big) \leq \|H\|_{\mathrm{sp}}.$$

L'une de ces inégalités doit donc être une égalité.

Examinons maintenant l'unicité : si

$$H = \sum Q_i P_i + R + S = \sum Q'_i P_i + R' + S',$$

alors $\sum (Q_i - Q'_i)P_i = R' - R + S - S'$. Soit i le plus grand indice pour lequel $\mathrm{Sup}\, \|Q_i - Q'_i\|_{\mathrm{sp}}$ est atteint. On a alors :

$$\overline{N}\big((Q_i - Q'_i)P_i\big) \geq \overline{N}(P_i) \geq \overline{N}(\mathcal{I}) > \overline{N}(R' - R),$$
$$\forall j > i, \quad \big\|(Q_j - Q'_j)P_j\big\|_{\mathrm{sp}} < \|(Q_i - Q'_i)P_i\|_{\mathrm{sp}}.$$

Pour $j < i$, si $\|(Q_j - Q'_j)P_j\|_{\mathrm{sp}} = \|(Q_i - Q'_i)P_i\|_{\mathrm{sp}}$ et si $Q_i - Q'_i \neq 0$, alors :

$$\overline{N}\big((Q_j - Q'_j)P_j\big) = \overline{N}(P_j) < \overline{N}(P_i) \leq \overline{N}\big((Q_i - Q'_i)P_i\big),$$

ceci parce que $Q_j - Q'_j$ est dans $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$. Par conséquent, si $Q_j - Q'_j \neq 0$, le coefficient d'indice $\overline{N}((Q_j - Q'_j)P_i)$ de $(S' - S)$ doit être de norme $\|(Q_j - Q'_j)\|_{\mathrm{sp}}$ et de fonction N égale à

$$N\big((Q_j - Q'_j)P_i\big) \geq N(P_i),$$

ce qui n'est pas, puisque c'est un polynôme de degré $< N(P_i)$. On doit donc avoir $Q_i = Q'_i$ et $Q_j = Q'_j$ pour tout j d'après la définition de i. D'où $R' - R + S' - S = 0$. Mais, ordre$(R' - R) < \overline{N}(\mathcal{I})$ alors que $(S' - S)$ n'a pas de terme d'indice $< \overline{N}(\mathcal{I})$. Donc $R = R'$ et $S = S'$, d'où l'unicité. □

COROLLAIRE 4.2.2. — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal à gauche cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$. Alors $\mathcal{I}$ admet une base de division relativement à x, si et seulement si $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}/\mathcal{I}$ est sans $\mathfrak{m}$-torsion sur un voisinage de x.*

Preuve. — Si $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}/\mathcal{I}$ est sans $\mathfrak{m}$-torsion alors les opérateurs sur l'escalier de $\mathcal{I}$ peuvent être choisis de norme 1 sinon il y aurait de la $\mathfrak{m}$-torsion. Réciproquement, supposons que $\mathcal{I}$ possède une base de division (P_i) relativement à x. Si θH appartient à $\Gamma(U, \mathcal{I})$ avec $\theta \in \mathfrak{m}$ et si H est dans $\Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$, alors la décomposition $\theta H = \sum_i P_i Q_i + R + S$ de la proposition précédente fournit $R + S \in \Gamma(U \cap V, \mathcal{I})$. Mais le couple $(N(R+S), \overline{N}(R+S))$ est situé sous l'escalier de $\mathcal{I}$. Donc $R + S = 0$. L'inégalité $\|Q_i\|_{\mathrm{sp}} \leq \|\theta H\|_{\mathrm{sp}} = |\theta| \|H\|_{\mathrm{sp}}$ montre que Q_i est multiple de θ pour tout i (*cf.* 1.5.4) et donc H appartient à $\Gamma(U \cap V, \mathcal{I})$. □

4.3. Suites exactes associées à une base de division.

On démontre dans ce paragraphe des résultats analogues à ceux connus pour $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{t\}}$.

PROPOSITION 4.3.1 (Résultat analogue à celui de [BR-MAIS, Prop. 3]). *Soit $\mathcal{I}$ un idéal de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}$ possédant une base de division $(P_1, \dots, P_r)$ relativement à x. Alors, il existe une matrice de relations $\mathcal{R} \in \mathcal{M}_{r-1,r}(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)})$ (explicitée au cours de la preuve) qui fournit une présentation de $\mathcal{I}$:*

$$0 \to \big(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}\big)^{r-1} \xrightarrow{\cdot \mathcal{R}} \big(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}^{(0)}\big)^{r} \longrightarrow \mathcal{I} \to 0.$$

Preuve. — Notons b_i le coefficient d'indice $\overline{N}(P_i)$ de P_i. Fixons $\lambda < 1$. D'après le lemme de Hensel, $b_{i\,|\,D(0,\lambda^+)}$ s'écrit comme produit d'un polynôme d'ordre $N(b_i, \lambda)$ dont toutes les racines sont dans $D(0, \lambda^+)$ par une série inversible sur $D(0,\lambda^+)$ (*cf.* 1.4.3). On choisit λ assez proche de 1^- pour que $D(0,\lambda^+)$ contienne tous les zéros de $b_{i\,|\,]x[}$. Comme de plus $\|b_i\|_{\mathrm{sp}} = 1 = \lim_{\lambda\to 1^-} \|b_i\|_\lambda$ (*cf.* 1.5.3), on peut écrire :

$$b_i = \Big(t^{N(P_i)} + \sum_{j=0}^{N(P_i)-1} \alpha_j t^j\Big)\mu_i \quad \text{avec } \mu_i \text{ inversible sur }]x[.$$

De plus μ_i se prolonge sur un ouvert affine $U_K (x \in U)$ et $\|\mu_i\|_{\mathrm{sp}} = 1$, de sorte qu'on peut supposer que μ_i est dans $\Gamma(U, \mathcal{O}^*_{\mathfrak{X}})$, puis, quitte à modifier la base de division, que $\mu_i = 1$. D'autre part, comme les racines de b_i sont dans $]x[$, il est classique que α_j appartient à $\mathfrak{m}$ [BGR, 3.1.2, Prop. 1]. Comme $\overline{N}(P_{i+1}) = \overline{N}(P_i) + 1$, l'opérateur $t^{N(P_i)-N(P_{i+1})}P_{i+1} - \partial P_i$ est d'ordre $< \overline{N}(P_{i+1})$ modulo $\mathfrak{m}$. Dans la division de

$$t^{N(P_j)-N(P_{j+1})}P_{j+1} - \partial P_j$$

par la base de division $(P_j)_j$, modulo $\mathfrak{m}$, seuls les opérateurs $P_1, \dots, P_j$ interviennent [BR-MAIS, Lemme 1]. On trouve alors, pour $j = 1, \dots, r-1$, les relations suivantes

$$(\mathcal{R}_j) \qquad t^{N(P_j)-N(P_{j+1})}P_{j+1} - \partial P_j = \sum_{k=1}^{j} \mu_{j,k} P_k + \sum_{k=1}^{r} Q_{j,k} P_k$$

avec $\mu_{j,k} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ et $Q_{j,k} \in \Gamma(U, \mathfrak{m}\,\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})$. On obtient la matrice $\mathcal{R}$ des relations

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \partial + \mu_{1,1} + Q_{1,1} & \cdots\ Q_{1,j}\ \cdots & \cdots\ Q_{1,r} \\ \mu_{2,1} + Q_{2,1} & \vdots & \vdots \\ \vdots & -t^{N(P_{j-1})-N(P_j)} + Q_{j-1,j} & \vdots \\ \mu_{j,1} + Q_{j,1} & (\partial + \mu_{jj}) + Q_{j,j} & \cdots\ Q_{j,r} \\ \vdots & \mu_{j+1,j} + Q_{j+1,j} & \vdots \\ \mu_{r-1,1} + Q_{r-1,1} & \mu_{r-1,j} + Q_{r-1,j} \vdots & -t^{N(P_{r-1})-N(P_r)} + Q_{r-1,r} \end{pmatrix}$$

puis le complexe :

$$\begin{array}{c} 0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})^{r-1} \xrightarrow{\cdot\mathcal{R}} (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}})^{r} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0 \\ (H_1, \dots, H_{r-1}) \longmapsto (H_1, \dots, H_{r-1})\cdot\mathcal{R} \\ (Q_1, \dots, Q_r) \longmapsto \sum_j Q_j P_j \in \mathcal{I}. \end{array}$$

Il s'agit de montrer que cette suite est exacte. Comme chacun des termes est complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, et $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$- nœthérien, il suffit de démontrer l'exactitude modulo $\mathfrak{m}^{n+1}$ pour tout n. C'est vrai pour $n = 0$ par un argument analogue à celui de [BR-MAIS] en travaillant dans $\mathcal{D}_X^{(0)}$. Il suffit donc de montrer que la suite des gradués est exacte :

$$0 \to \Big(\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}/\mathfrak{m}^{n+1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}\Big)^{r-1} \longrightarrow \Big(\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}/\mathfrak{m}^{n+1}\mathcal{D}_{\mathfrak{X}}^{(0)}\Big)^{r} \longrightarrow \Big(\bigoplus_{n\geq 0} \mathfrak{m}^n\mathcal{I}/\mathfrak{m}^{n+1}\mathcal{I}\Big) \to 0.$$

Comme chacun des termes de la suite

$$0 \to \big(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}\big)^{r-1} \longrightarrow \big(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}\big)^{r} \longrightarrow \mathcal{I} \to 0$$

est sans $\mathfrak{m}$-torsion, la suite des gradués est isomorphe à

$$0 \to (\operatorname{Gr}\mathcal{V}) \otimes \big(\mathcal{D}_X^{(0)}\big)^{r-1} \longrightarrow (\operatorname{Gr}\mathcal{V}) \otimes \big(\mathcal{D}_X^{(0)}\big)^{r} \longrightarrow (\operatorname{Gr}\mathcal{V}) \otimes (\mathcal{I}/m\mathcal{I}) \to 0$$

qui est exacte. D'où le résultat. $\square$

Proposition 4.3.2. — *Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$ tel que $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}/\mathcal{I}$ soit sans $\mathfrak{m}$-torsion et fixons une base de division $(P_1, ..., P_r)$ de $\mathcal{I}$ relativement à x. Alors $\mathcal{I}/(P_1)$ est à support en x et $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{V}} K$ est engendré par P_1 et P_r au voisinage de x.*

Preuve. — Remarquons tout d'abord que $\mathcal{I} \cap \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)} = \mathfrak{m}\mathcal{I}$ car $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}/\mathcal{I}$ est sans $\mathfrak{m}$-torsion. On a également $\mathcal{I}/(P_1)$ sans $\mathfrak{m}$-torsion : si θ est une uniformisante de $\mathcal{V}$ et si on a une relation $\theta Q = HP_1$ avec $Q, H \in \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$, alors $HP_1 = 0$ modulo $\mathfrak{m}$. Mais $\|P_1\|_{\mathrm{sp}} = 1$; donc $P_1 \neq 0$ mod $\mathfrak{m}$ et, $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},x}^{(0)}$ étant intègre, H appartient à $\mathfrak{m}\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X},x}^{(0)}$. On en déduit que :

$$\big(\mathcal{I}/(P_1)\big) \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}/\mathfrak{m} \simeq (\mathcal{I} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m})/\big((P_1) \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}/\mathfrak{m}\big).$$

On sait par l'analogue sur $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x}}^{(0)}$ de [BR-MAIS, Prop. 5] que

$$(\mathcal{I} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m})/\big((P_1) \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}/\mathfrak{m}\big)$$

est à support en x. Soit alors $H \in \Gamma(U, \mathcal{I})$ défini sur un ouvert affine U où les P_i sont définis. Il existe $Q \in \Gamma(U_{\{t\}}, \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)})$ tel que $H - QP_1$ soit dans $\Gamma(U_{\{t\}}, \mathcal{I} \cap m\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}) = \Gamma(U_{\{t\}}, m\mathcal{I})$. Un argument de complétion permet alors de faire converger le procédé et H appartient à (P_1) sur $U_{\{t\}}$. Donc $\mathcal{I}/(P_1)$ est à support en x. Maintenant $\mathcal{I}/(P_1, P_r)$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$-module de type fini à support en x d'après ce qui précède et aussi un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$-module de type fini (*cf.* 4.2.1). Donc $\mathcal{I}/(P_1, P_r) \otimes \mathbb{Q}$ est de type fini sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ et son image inverse par spécialisation est un isocristal, donc un $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K}$-module localement libre de rang fini. Par suite, $\mathcal{I}/(P_1, P_r) \otimes \mathbb{Q}$ est localement projectif, donc facteur direct d'un module libre, et à support en x ; $\mathcal{I}/(P_1, P_r) \otimes \mathbb{Q}$ est donc nul. $\square$

5. Quelques propriétés des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-modules holonomes

5.1. Décomposition générique des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

Nous commençons par rappeler un résultat mentionné dans [ROB2, Annexe]. On rappelle qu'un anneau A est *euclidien* s'il est intègre et muni d'une fonction $\overline{N} : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\begin{aligned} &\forall\, a, b \in A,\ \ \exists\,!\ (q, r) \in A,\ \ \exists\,!\ (q', r') \in A,\ \text{ tels que :}\\ &\qquad a = bq + r = q'b + r',\\ &\qquad \overline{N}(r) < \overline{N}(b), \quad \overline{N}(r') < \overline{N}(b),\\ &\qquad \overline{N}(b) \leq \overline{N}(a) \quad \text{si } r = 0 \text{ ou } r' = 0. \end{aligned}$$

PROPOSITION 5.1.1. — *Soit A un anneau euclidien. Alors, pour tout M dans $M_{r,s}(A)$, il existe $U \in \mathrm{Gl}_r(A)$, $V \in \mathrm{Gl}_s(A)$ tels que :*

$$UMV = \begin{cases} \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & 0 & 0\\ & \ddots & & \vdots\\ 0 & & \alpha_r & 0 \end{array}\right) & \text{si } r \leq s,\\[2ex] \left(\begin{array}{ccc} \alpha_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_s\\ \hline 0 & \dots & 0 \end{array}\right) & \text{si } r \geq s, \end{cases}$$

et tels que α_i divise α_j à droite et à gauche pour $j > i$. Si de plus A est simple, la suite des α_i peut être choisie de la forme $(1, \dots, 1, \alpha, 0, \dots, 0)$. Enfin, il existe un algorithme qui, à partir de M, fournit U et V en un nombre fini de divisions.

Preuve. — Voir [ROB2, Annexe]. $\square$

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 5.1.2. — *Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module cohérent. Alors il existe un opérateur $P \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$, $\overline{N}$-dominant, défini sur un ouvert affine V de $\mathfrak{X}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $\mathcal{E}_{|V} \simeq (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}/P) \oplus (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}})^n$.*

Preuve. — Soit

$$\big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U\mathbb{Q}}\big)^n \xrightarrow{\cdot M} \big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U\mathbb{Q}}\big)^s \longrightarrow \mathcal{E}_{|U} \to 0$$

une présentation de $\mathcal{E}$ sur un ouvert affine U de $\mathfrak{X}$, donnée par M appartenant à $M_{r,s}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U\mathbb{Q}})$. On peut supposer, quitte à réduire suffisamment U, que les divisions (en nombre fini) requises par la proposition précédente appliquée à M, sont euclidiennes sur un ouvert V convenable (*cf.* 3.2.3 (ii)). Comme, de plus, $\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U\mathbb{Q}})$ est simple, on déduit de la proposition précédente qu'il existe $K \in \mathrm{Gl}_r(\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}))$, $L \in \mathrm{Gl}_s(\Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}))$ et $P \in \Gamma(V, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})$ tels que :

$$KML = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & P & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Quitte à diminuer V, on peut, par le lemme de Hensel, supposer P $\overline{N}$-dominant. On obtient le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}\big)^n \arrow[r, "\cdot M"] \arrow[d, "\cdot K^{-1}"', "\wr"] & \big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}\big) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"', "\cdot L"] & \mathcal{E}_{|V} \arrow[r] & 0 \\
\big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}\big) \arrow[r, "\cdot KML"] & \big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}\big) \arrow[r] & \mathrm{Coker}(\cdot KML) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

qui induit un isomorphisme de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}$-modules entre $\mathcal{E}_{|V}$ et le conoyau de la flèche du bas. Mais on a :

$$\mathrm{Coker}\Big\{\big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}\big)^r \xrightarrow{\cdot KML} \big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}\big)^s\Big\} \simeq \big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}/P\big) \oplus \big(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}\big)^n,$$

avec n égal au nombre de zéros sur la diagonale de KML.

5.2. Modules holonomes, multiplicités.

Comme on l'a mentionné dans l'introduction, on peut définir sur $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathcal{O}_{X,x}}$ la plupart des notions usuelles sur $\mathcal{D}_{\mathbb{C}\{t\}}$, en particulier les notions d'holonomie, de multiplicités, de variété caractéristique et de base de division pour les idéaux de type fini (voir [SAB], [GARN]). Ces mêmes notions existent sur $\mathcal{D}^{(0)}_X$ (voir [BE5]) ; rappelons brièvement comment BERTHELOT en déduit les notions analogues pour les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

On notera :

- $\mathrm{Car}(E)$ la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}^{(0)}_X$-module cohérent E,
- ξ l'image de ∂ dans $\mathrm{Gr}(\mathcal{D}^{(0)}_X)$ et
- $\mathrm{mult}_\wp(E)$ la multiplicité de E en la composante irréductible $\wp$ de $\mathrm{Car}(E)$.

Grâce à une présentation de $\mathcal{E}$, on peut trouver un modèle entier $\mathring{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$ (où $\mathring{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} \mathbb{Q} \simeq \mathcal{E}$). On note $\mathring{\mathcal{E}}_{\mathrm{tors}}$ la $\mathfrak{m}$-torsion de $\mathring{\mathcal{E}}$; $(\mathring{\mathcal{E}}/\mathring{\mathcal{E}}_{\mathrm{tors}}) \otimes_{\mathcal{V}} \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ est un $\mathcal{D}^{(0)}_X$-module cohérent.

On dira que $\mathcal{E}$ est *holonome* si

$$\mathrm{Car}\,\mathcal{E} := \mathrm{Car}\big((\mathring{\mathcal{E}}/\mathring{\mathcal{E}}_{\mathrm{tors}}) \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}\big)$$

est de dimension $\leq \dim X$; les multiplicités de $\mathcal{E}$ sont celles de

$$(\mathring{\mathcal{E}}/\mathring{\mathcal{E}}_{\mathrm{tors}}) \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}$$

en les points génériques des composantes irréductibles de $\mathrm{Car}\,\mathcal{E}$. BERTHELOT [BE5] montre que ces notions ne dépendent pas du choix du modèle sans $\mathfrak{m}$-torsion de $\mathcal{E}$. Les différentes notions sur $\mathcal{D}^{(0)}_X$ et $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathcal{O}_{X,x}}$ sont bien sûr compatibles :

LEMME 5.2.1. — *Soient $s : T^*X \to X$ la projection canonique et $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_X, x \to X$ le morphisme canonique. Le diagramme cartésien*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \times_X T^*X & \longrightarrow & T^*X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) & \longrightarrow & X \end{array}$$

induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Car}\big(\mathring{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}\big) \times_X \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq \mathrm{Car}\big(\mathring{\mathcal{E}}_x \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}\big).$$

De la même façon, si on note $s : T \to T^*X$ la section nulle du fibré cotangent, alors les multiplicités

$$\mathrm{mult}_{(\xi=0)}\big(\mathring{\mathcal{E}}_x \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}\big) \;\; et \;\; \mathrm{mult}_{(t=0)}\big(\mathring{\mathcal{E}}_x \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}\big)$$

de $\mathring{\mathcal{E}}_x \otimes \mathcal{V}/m$ sont en fait les multiplicités des composantes irréductibles de $\mathrm{Car}(\mathring{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{V}/m)$ contenant $s(x)$.

Soit maintenant $\mathcal{I}$ un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}$ tel que $\overset{\circ}{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}/\mathcal{I}$ soit sans $\mathfrak{m}$-torsion. On a vu qu'alors $\mathcal{I}$ possédait une base de division (*cf.* 4.2.2). On a la suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Tor}^1_{\mathcal{V}}(\overset{\circ}{\mathcal{E}}_x, \mathcal{V}/\mathfrak{m}) \to (\mathcal{I} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m})_x \to \big(\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}\big)_x \to \big(\overset{\circ}{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}\big)_x \to 0.$$

Or $\operatorname{Tor}^1_{\mathcal{V}}(\overset{\circ}{\mathcal{E}}_x, \mathcal{V}/\mathfrak{m}) = 0$ car $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}/\mathcal{I}$ est supposé sans $\mathfrak{m}$-torsion. Donc

$$\overset{\circ}{\mathcal{E}}_x \otimes \mathcal{V}/m \simeq \mathcal{D}_{X,x}^{(0)}/(\mathcal{I} \otimes \mathcal{V}/m)_x$$

comme $\mathcal{D}_{X,x}^{(0)}$-module. On a alors :

LEMME 5.2.2. — *Avec les notations qui précèdent, $\mathcal{I}_x$ et $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{V}/m)_x$ ont même escalier. En particulier $\overline{N}(\mathcal{I})$ et $N(\mathcal{I})$ (cf.* 4.1.2) *sont respectivement les multiplicités en x des composantes ($\xi = 0$) et ($t = 0$) pour $\overset{\circ}{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}/\mathcal{I}$.*

Preuve. — Soit $(P_i)_i$ une base de division de $\mathcal{I}$. Par définition $\|P_i\|_{\mathrm{sp}} = 1$. D'après 1.5.5, $N(P_i)$ et $\overline{N}(P_i)$ sont la valuation et le degré de la réduction $\overline{P}_i$ de P_i modulo $\mathfrak{m}$. Donc, l'escalier de $\mathcal{I} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ en x est situé en dessous de celui de $\mathcal{I}$ en x. Réciproquement, on peut relever dans $\mathcal{I}$ une base de division de $(\mathcal{I} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m})x$: si $(\overline{P}_i)$ est une telle base et $(P_i)_i$ un relèvement, alors $\overline{N}(P_i) = d(\overline{P}_i)$ et $N(P_i) = v(\overline{P}_i)$. D'où l'égalité des escaliers. Comme les multiplicités de $\widehat{\mathcal{D}}_{\mathfrak{X}}^{(0)}/\mathcal{I}$ en x se calculent par $d((\mathcal{I} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m})_x)$ et $v((\mathcal{I} \otimes v/\mathfrak{m})_x)$ (la preuve se fait comme dans [MAIS, III, 2.1]), elles sont donc égales respectivement à $\overline{N}(\mathcal{I}_x)$ et $N(\mathcal{I}_x)$. □

LEMME 5.2.3. — *Soit E un $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x}}^{(0)}$-module de type fini dont la variété caractéristique* $\operatorname{Car} E$ *est contenue dans un point. Alors si car $k = p > 0$, E est un k-espace vectoriel de dimension finie multiple de p.*

Preuve. — Si $\operatorname{Car} E$ est un point, c'est forcément le point correspondant à l'idéal (t, ξ) car l'idéal définissant $\operatorname{Car} E$ est homogène en ξ. Il existe donc $v, d \in \mathbb{N}$ tels que t^v et ξ^d annulent $\operatorname{Gr}^F E$. On en déduit que t^{vk} annule $F_k E$ pour tout k. Quitte à décaler $(F_k E)_k$, on peut supposer que $F_k \mathcal{D} F_\ell E = F_{k+\ell} E$ pour tous k, ℓ, de sorte que les générateurs du $\mathcal{O}_{X,x}$-module $F_0 E$ soient des générateurs de E sur $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x}}^{(0)}$. On a donc pour tout k :

$$\xi^d F_k E \subset F_{k+d-1} E = F_{d-1} \mathcal{D} F_k E.$$

Pour $k = 0$, on trouve

$$\xi^d F_0 E \subset F_{d-1} \mathcal{D} F_0 E,$$

si bien que E est engendré par les $\{\partial^i e_j\}_{i,j}$ pour $i \in [0, d-1]$ et $(e_j)_j$ une famille génératrice du $\mathcal{O}_{X,x}$-module F_0E. Comme d'autre part F_0E est de t-torsion, E est un k-espace vectoriel de dimension finie. Mais on a

$$0 = \mathrm{Tr}\big([t, \partial]\big) = \mathrm{Tr}(-\mathrm{Id}_E),$$

ce qui entraîne que $\dim_k E$ est un multiple de p. ∎

A titre d'exemple, $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathcal{O}_{X,x}}/(t^p, \partial)$ est un k-espace vectoriel de dimension p engendré par $1, t, \ldots, t_{p-1}$ et de variété caractéristique réduite à un point.

Proposition 5.2.4 (inégalité de Bernstein pour les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-modules).
Un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est nul en x si et seulement si ses multiplicités en x sont nulles. De plus, $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si $\dim(\mathrm{Car}\,\mathcal{E}) = 1$ *ou bien $\mathcal{E}$ est nul.*

Preuve. — Soit $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ un modèle entier sans $\mathfrak{m}$-torsion de $\mathcal{E}$. Par hypothèse $\overset{\circ}{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ a ses multiplicités nulles en x. Il s'agit donc, d'après le lemme précédent, d'un k-espace vectoriel de dimension finie (multiple de p) sur un voisinage de x. Donc $\mathcal{E}$, qui est séparé complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique (*cf.* [BE 3]), est localement en x, un K-espace vectoriel de dimension finie sur lequel l'opérateur $[t, \partial] = -\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ est de trace nulle. Donc $\mathcal{E}_x = 0$. De plus, un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si $\dim \mathrm{Car}(\overset{\circ}{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}) \leq 1$ (l'inégalité de Bernstein est fausse en général, modulo $\mathfrak{m}$). Mais si $\dim(\mathrm{Car}(\overset{\circ}{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m})) = 0$ en x, alors les multiplicités de $\overset{\circ}{\mathcal{E}} \otimes \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ en x sont nulles. Donc $\mathcal{E}_x \otimes \mathcal{V}/m$ est nul et il en est de même de $\mathcal{E}_x$. ∎

5.3. Les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-modules holonomes sont monogènes.

Proposition 5.3.1. — *Tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module holonome est monogène.*

Preuve. — On a vu que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$ est simple (*cf.* 2.2.2), de longueur à gauche et à droite infinie. Soit $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module holonome. Il est extension de modules simples de multiplicités non nulles (*cf.* 5.2.4). Comme les multiplicités s'additionnent par suite exacte, il en résulte que $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ est de longueur finie sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$. D'après le théorème de Stafford [BJ0, Chap. I, § 7], $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$ est monogène. ∎

Remarques 5.3.2.

(i) D'après un théorème de descente par Frobenius dû à Berthelot [BE4], tout $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ muni d'une structure de Frobenius est de la forme

$$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}$$

où $\mathcal{E}^{(0)}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module cohérent tel que

$$F^{!}_{\mathfrak{X}}(\mathcal{E}^{(0)}) \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(1)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}} \mathcal{E}^{(0)}$$

($F^{!}_{\mathfrak{X}}$ désignant l'image inverse par un relèvement du Frobenius de X) ; on dit alors que $\mathcal{E}$ est *holonome* s'il en est de même de $\mathcal{E}^{(0)}$. Par conséquent, un tel $\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module $\mathcal{E}$ est monogène.

(ii) Dans la PROPOSITION 5.1.2, $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si $n = 0$. Par conséquent, un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}$-module holonome $\mathcal{E}$ est génériquement de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{V\mathbb{Q}}/P$ avec P $\overline{N}$-dominant ; sur V, le module $\mathcal{E}$ est donc l'image par spécialisation d'un isocristal convergent de rang $\overline{N}(P)$ (*cf.* [BE1, 2.2]). L'isomorphisme est donné par :

$$\begin{aligned} \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}/P) &\xrightarrow{\ \sim\ } \Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}})^{\overline{N}(P)} \\ H &\longmapsto \big(a_0, a_1, \ldots, a_{\overline{N}(P)-1}\big) \end{aligned}$$

où $\sum_i a_i \partial^i$ est le reste de la division de H par P.

Si on écrit $\mathcal{E}$ sous la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ grâce à 5.3.1, et si $(P_1, \ldots, P_r)$ est une base de division de $\mathcal{I}$, alors on peut prendre $P = P_1$ (*cf.* 4.3.2) de sorte que le rang de l'isocristal est en fait égal à $\mathrm{mult}_{(\xi=0)}(\mathcal{E})$.

BIBLIOGRAPHIE

[AMI] AMICE (Y.). — *Les nombres p–adiques*, Presses Universitaires de France, 1975.

[BE1] BERTHELOT (P.). — *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre*, en préparation.

[BE2] BERTHELOT (P.). — *Cohomologie rigide et théorie des $\mathcal{D}$-modules*, Proc. Conf. on p-adic Analysis (Trento 1989), Lecture Notes in Math. **1454**, Springer-Verlag, 1990.

[BE3] Berthelot (P.). — *$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$–modules cohérents I*, Université de Rennes I, 1993.

[BE4] Berthelot (P.). — *$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$–modules cohérents II*, en préparation.

[BE5] Berthelot (P.). — *$\mathcal{D}^{\dagger}_{\mathbb{Q}}$–modules cohérents III*, en préparation.

[BGR] Bosch (S.), Güntzer (U.) and Remmert (R.). — *Non–archimedean analysis*, Grundlehren der Math. Wissenschaften **261**, Springer-Verlag, 1984.

[BJO] Björk (J.E.). — *Rings of differential operators*, North-Holland Math. Lib., vol. **21**, North-Holland, 1979.

[BR-MAIS] Briançon (J.) et Maisonobe (P.). — *Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable*, L'enseignement mathématique, t. **30**, 1984, p. 7–38.

[FR-VdPUT] Fresnel (J.) et Van der Put (M.). — *Localisation formelle et groupe de Picard*, Ann. Inst. Fourier, t. **33**, 4, 1983, p. 19–82.

[GARN] Garnier (L.). — *Thèse*, Université de Rennes I, 1993.

[MAIS] Maisonobe (P.). — *Germes de D-modules à une variable et leurs solutions*, in Introduction à la théorie algébrique des systèmes différentiels, Travaux en cours **34**, Hermann, p. 97–146, 1988.

[M-N] Mebkhout (Z.) et Narvaez (L.). — *Sur les coefficients de De Rham-Grothendieck des variétés algébriques*, Proc. Conf. in p-adic analysis (Trento 1989), Lecture Notes in Math. **1454**, Springer-Verlag, 1990, p. 267–308.

[ROB1] Robba (P.). — *Lemme de Hensel pour les opérateurs différentiels*, L'enseignement Mathématique, t. **26**, 1980, p. 279–311.

[ROB2] Robba (P.). — Factorisation d'un opérateur différentiel, Groupe d'Études d'Analyse Ultramétrique, exp. 2, 1974.

[ROBI] Robba (P.). — *On the index of p-adic differential operators I*, Annals of Math. Serie, t. **2**, 101, 1975, p. 280–316.

[SAB] Sabbah (C.). — *Introduction to algebraic theory of linear systems of differential equations*, in P. Maisonobe, C. Sabbah, $\mathcal{D}$-modules cohérents et holonomes, Travaux en cours **45**, p. 1–80, Hermann 1993.

[TAT] Tate (J.). — *Rigid analytic spaces*, Invent. Math., t. **12**, 1971, p. 275–289.