

BULLETIN DE LA S. M. F.

ISABELLE LIOUSSE

Dynamique générique des feuilletages transversalement affines des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 123, n° 4 (1995), p. 493-516

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_4_493_0

© Bulletin de la S. M. F., 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DYNAMIQUE GÉNÉRIQUE DES FEUILLETAGES TRANSVERSALEMENT AFFINES DES SURFACES

PAR

ISABELLE LIOUSSE (*)

RÉSUMÉ. — Nous décrivons la dynamique générique des feuilletages transversalement affines orientables sur les surfaces compactes orientables. Nous établissons un résultat du type «Peixoto» : dans un feuilletage transversalement affine générique, la dynamique est triviale : un ensemble limite est soit une singularité, soit une feuille hyperbolique, soit une feuille homéomorphe à S^1 homotopiquement triviale.

ABSTRACT. — We give a description of the generic dynamical behavior of orientable transversally affine foliations on compact orientable surfaces. We prove a «Peixoto» type theorem : in a generic transversally affine foliation, the dynamics are trivial : a limit set is either a singular point, a hyperbolic leaf, or a leaf homeomorphic to S^1 and nullhomotopic.

Introduction

Les feuilletages de surfaces compactes ont été étudiés principalement dans deux cadres.

D'abord, les feuilletages orientables en général. Dans ce cas, on dispose d'un théorème permettant de décrire le comportement dynamique générique. Ce résultat obtenu par PEIXOTO [Pe] en 1962, en terme de champs de vecteurs, affirme qu'un champ de vecteurs générique est de type Morse-Smale. Pour un tel champ de vecteurs, les orbites sont propres.

Ensuite, les feuilletages mesurés. Ces feuilletages ont permis à THURSTON (voir [Th], [FLP]) de construire une compactification de l'espace de Teichmüller d'une surface. Dans ce cas, la situation est bien différente. On peut alors affirmer que, génériquement, il y a toujours des feuilles non propres.

(*) Texte reçu le 23 novembre 1993, révisé le 13 février 1995.

I. LIOUSSE, Laboratoire de Topologie et Géométrie, C.N.R.S. URA 1408, Université Toulouse III. Adresse actuelle : Laboratoire de Géométrie, Analyse et Topologie, C.N.R.S. URA D751, U.F.R. de Mathématiques, Université Lille I, 59655 Villeneuve d'Ascq CEDEX (France). Email : liousse@gat.univ-lille1.fr.

Classification AMS : 58F.

Dans cet article, nous nous proposons de décrire le comportement dynamique générique dans une classe intermédiaire, plus proche d'une certaine manière de la classe des feuilletages mesurés : la classe des feuilletages transversalement affines orientables. Cependant, le résultat que nous obtenons montre que, sauf sur le tore \mathbb{T}^2 , ces feuilletages se comportent génériquement comme les feuilletages généraux.

Soit M une surface compacte et orientable; les feuilletages de M étudiés ici sont orientables, transverses au bord éventuel de M et portent une structure transverse affine. Ces feuilletages peuvent avoir des points singuliers. On impose à ces points d'être de type centre ou selle à nombre pair quelconque de séparatrices, et à ces feuilletages d'être sans holonomie autour des singularités.

En fait, nous dirons qu'un feuilletage F sur M est *transversalement affine* si son relevé au revêtement universel \tilde{M} de M est constitué par les courbes de niveau d'une application \tilde{D} de \tilde{M} dans \mathbb{R} indéfiniment différentiable et avec les propriétés suivantes :

- les singularités de \tilde{D} sont des centres ou des selles à nombre pair de séparatrices,
- il existe une représentation H de $\pi_1(M)$ dans le groupe GA_+ des homothéties directes de \mathbb{R} telle que $\tilde{D}(\gamma(p)) = H(\gamma)\tilde{D}(p)$, pour tout p dans \tilde{M} et tout γ dans $\pi_1(M)$, c'est-à-dire que \tilde{D} est H -équivalente.

L'application \tilde{D} est appelée *application développante* de F , et H *représentation d'holonomie* de F . Le morphisme qui à $\gamma \in \pi_1(M)$ associe le rapport de $H(\gamma)$ est appelé *représentation d'holonomie linéaire* de F et est notée H_L .

La structure affine d'un segment I transverse à F est définie par le plongement dans \mathbb{R} donné par la restriction de \tilde{D} à l'un des relevés de I sur \tilde{M} .

Enfin, \tilde{D} n'est définie qu'à composition près par un élément de GA_+ .

Notons $D(M)$ l'ensemble des applications indéfiniment différentiables \tilde{D} de \tilde{M} dans \mathbb{R} , telles qu'il existe $H \in \text{Hom}(\pi_1(M), GA_+)$ pour lequel \tilde{D} soit équivalente. Notons que, si H existe, alors H est unique.

Ainsi, un feuilletage transversalement affine muni de sa structure transverse est la donnée d'une classe d'équivalence pour la relation $h \circ \tilde{D} \sim_{h \in GA_+} \tilde{D}$ sur $D(M)$.

Munissons $D(M)$ de la topologie induite par la topologie C^∞ sur l'espace des applications indéfiniment différentiables de \tilde{M} dans \mathbb{R} , et l'ensemble $AF(M)$ des feuilletages transversalement affines sur M de la topologie quotient.

Cette topologie est plus fine que la topologie des champs de directions ; on peut montrer qu'elle est séparée. De plus, pour cette topologie, les feuilletages de Morse forment un ouvert dense. Cependant, nous avons jugé intéressant de démontrer aussi la généricité de la dynamique triviale dans les sous-espaces de $AF(M)$ à type singulier fixé.

Soit $\Sigma = \{(s_1, i_1), \dots, (s_n, i_n)\}$ un sous-ensemble fini de $M \times (\mathbb{Z}_*^* \cup \{1\})$. Un feuilletage F sur M est dit de *type singulier* Σ si chaque s_j est une singularité d'indice i_j de F . Rappelons que l'indice d'une selle à $2p$ -branches est $(p-1)$, et que celui d'un centre est 1.

Soit $AF(M, \Sigma)$ l'ensemble des feuilletages transversalement affines sur M de type singulier Σ ; munissons-le de la topologie induite par celle de $AF(M)$.

D'après la formule d'Euler-Poincaré, pour que $AF(M, \Sigma)$ soit non vide il est nécessaire que la somme des indices i_j , où $(s_j, i_j) \in \Sigma$, soit égale à la caractéristique d'Euler de M .

Avant d'énoncer notre résultat, rappelons quelques définitions.

- Convenons que les feuilles (resp. demi-feuilles) du feuilletage F sur M de type singulier Σ sont les feuilles (resp. demi-feuilles) du feuilletage régulier induit par F sur $M \setminus \Sigma$.

- Une feuille (resp. demi-feuille) L de F est dite *propre* si tout intervalle ouvert transverse qui rencontre L coupe L un nombre fini de fois.

- Une *liaison* de F est une feuille de F reliant entre-elles deux singularités de F (pas forcément distinctes), appelées *extrémités* de la liaison. Dans la suite, une liaison sera toujours considérée avec ses extrémités.

La dernière notion dont nous avons besoin est celle de « feuilletage dynamiquement trivial ». Nous la définissons maintenant dans le cas particulier des feuilletages sans singularité de type centre. La définition générale sera donnée à la fin du paragraphe 3.

- Un feuilletage F , sans singularité de type centre, est *dynamiquement trivial* si toutes ses feuilles sont propres et s'il n'a pas de liaison.

THÉORÈME 1. — *Soient M une surface compacte, orientable et de caractéristique d'Euler strictement négative, et $AF(M)$ l'ensemble des feuilletages transversalement affines sur M muni de la topologie décrite ci-dessus.*

- *Le sous-ensemble de $AF(M)$ constitué par les feuilletages de Morse dynamiquement triviaux est ouvert et dense dans $AF(M)$.*

- *De plus, pour tout type singulier Σ , le sous-ensemble de $AF(M, \Sigma)$ constitué par les feuilletages dynamiquement triviaux est ouvert et dense dans $AF(M, \Sigma)$.*

La partie difficile de la démonstration de ce théorème est la preuve de la densité. L'idée est celle utilisée par PEIXOTO. On procède en deux étapes, la première consiste à rendre toutes les feuilles propres, et la deuxième à éliminer les liaisons. Cependant la preuve de PEIXOTO ne peut s'adapter trivialement, car les perturbations locales utilisées dans sa démonstration ne préservent pas le caractère affine des feuilletages.

Ainsi, nous construisons deux types de perturbations dans la famille des feuilletages transversalement affines : au voisinage d'une transversale fermée et au voisinage d'une singularité (§§ 4.1 et 4.2).

Mais ces perturbations ne peuvent suffire. En effet, si le feuilletage initial est mesuré, son perturbé l'est aussi. Pour contourner cette difficulté, nous avons construit d'autres perturbations. Pour cela, nous avons adapté au cas des feuilletages singuliers le lemme de déformation des Γ -structures (cf. [BoHa], [Me]) : toute déformation de la représentation d'holonomie est réalisée par une déformation du feuilletage (§ 4.3). Ainsi, nous serons amenés à perturber des représentations de groupes de surfaces dans le groupe GA_+ . C. BONATTI nous a fait remarquer que le THÉORÈME 1 est faux sur le tore \mathbb{T}^2 (§ 2.1) : c'est dans la rigidité de ces représentations que se situe l'obstruction à prouver ce résultat sur \mathbb{T}^2 (voir le LEMME 6.2.1).

Je tiens à remercier ici Gilbert LEVITT qui a dirigé la thèse dont est issu cet article. Ses questions, remarques et conseils m'ont permis de mener à bien ce travail.

2. Exemples

2.1. Le contre-exemple de C. Bonatti.

Dans cette section, nous remarquons que tout feuilletage régulier mesuré de \mathbb{T}^2 possède un voisinage ne contenant aucun feuilletage transversalement affine dynamiquement trivial.

En effet, soit F_0 un feuilletage régulier et mesuré sur \mathbb{T}^2 . Ce feuilletage est soit minimal (toutes les feuilles sont denses), soit périodique (toutes les feuilles sont compactes). Dans tous les cas, il possède une transversale fermée complète \mathcal{C} . Ainsi, pour tout feuilletage F suffisamment proche de F_0 , \mathcal{C} est une transversale complète. L'application de premier retour sur \mathcal{C} est un homéomorphisme h . Si on impose à F d'être dynamiquement trivial, F doit avoir au moins deux feuilles hyperboliques. Par conséquent, h a au moins deux points périodiques ; ceci interdit à F d'être transversalement affine.

2.2. Les feuilletages de Cherry.

Une manière de construire des feuilletages transversalement affines

est de recoller suivant leurs bords des surfaces munies de feuilletages mesurés transverses au bord. Les feuilletages que nous allons décrire ici sont construits de cette manière. Ils figurent en particulier dans [St] et [Le2]. G. LEVITT dans [Le2] a montré, à partir de ces feuilletages, que toute surface fermée orientable porte un feuilletage transversalement affine ne possédant ni liaison, ni feuille compacte, ni feuille localement dense.

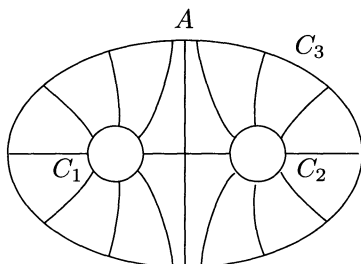


Figure E

Considérons un *pantalon* (disque à deux trous) muni du feuilletage F_0 représenté sur la figure E. Plaçons sur C_1 et C_2 des mesures de Lebesgue de masse totale 1. Le feuilletage permet de transporter ces mesures sur C_3 , qui est ainsi munie d'une mesure de masse totale 2. Si l'on identifie C_1 et C_3 par une homothétie de rapport 2 (relative aux mesures portées par C_1 et C_3), on obtient un tore troué de bord C_2 muni d'un feuilletage transversalement affine. L'identification entre C_1 et C_3 dépend d'un paramètre décrivant avec quel point de C_1 le point P est identifié.

Dans [Li], nous montrons que l'ensemble des valeurs de ce paramètre pour les quelles le feuilletage est dynamiquement trivial, est un ouvert dense, et que pour un bon choix de ce paramètre le feuilletage obtenu n'a ni feuille homéomorphe à S^1 ni liaison.

3. Préliminaires

Désormais, M désignera une surface compacte orientable, F un feuilletage transversalement affine sur M , transverse au bord de M et de lieu singulier Σ .

Pour étudier la dynamique d'un feuilletage on essaie d'isoler les zones de M qui en portent la récurrence, d'où les définitions suivantes.

- Un *ensemble invariant* de F est un compact non vide, réunion de feuilles et de singularités. Un ensemble invariant est *minimal* si tout ensemble invariant qu'il contient lui est égal.

On notera qu'un ensemble minimal non réduit à un point ne contient pas de singularité. Un ensemble minimal est soit égal à M , soit d'intérieur

vide. Mais, à l'exception du cas où M est le tore \mathbb{T}^2 , d'après le théorème de SCHWARTZ (cf. [Sc]), les seuls ensembles minimaux de F sont des points ou des feuilles compactes.

Pour traiter efficacement les feuilletages singuliers, on introduit une autre notion : celle d'*ensembles quasiminimaux*. (Ici, les quasiminimaux sont les « limit sets » de STREDDER [St]; le terme de quasiminimal est dû à VEECH [Ve]).

- Les feuilles de F qui aboutissent aux points de Σ sont dites *singulières*. Une feuille (resp. demi-feuille) non singulière est dite *régulière*. Notons que les feuilles singulières de F sont les séparatrices.

- Une demi-feuille régulière non propre est dite *récurrente*.

- Nous dirons qu'un ensemble invariant K est *quasiminimal* s'il contient une demi-feuille récurrente, et si toute demi-feuille régulière contenue dans K y est dense.

Rappelons quelques propriétés sur les ensembles quasiminimaux. Le lecteur pourra trouver ces propriétés ainsi que leurs démonstrations dans [Le2].

Un quasiminimal ne rencontre pas ∂M et ne contient pas de feuille compacte. Une feuille récurrente ne peut appartenir qu'à un seul quasiminimal.

Un quasiminimal contient une infinité non dénombrable de feuilles. Un feuilletage ne possède qu'un nombre fini de quasiminimaux. Toute feuille régulière contenue dans un quasiminimal est récurrente. Réciproquement, toute feuille récurrente est contenue dans un quasiminimal et un seul.

Nous aurons par la suite besoin d'une procédure permettant de modifier le type singulier d'un feuilletage : *les opérations de Whitehead*. Ici, contrairement à [FLP] et [Th] et comme cela apparaît dans [Le2], nous imposons à ces opérations de préserver l'orientabilité des feuilletages.

- Précisément, ici, une *opération de Whitehead* consiste à modifier un feuilletage soit en séparant en deux groupes de cardinaux impairs les séparatrices issues d'une selle et en remplaçant la selle par deux nouvelles selles à nombre pair de séparatrices reliées par une liaison (Fig. 1.a), soit inversement en écrasant une liaison entre deux selles distinctes (Fig. 1.b).



Figure 1

Les ensembles que nous allons maintenant définir, qui ont été nommés par G. LEVITT « feuilles compactes singulières » dans [Le1] et [Le2], sont

soit un ensemble limite sur lequel spiralent des feuilles régulières soit une limite de feuilles compactes régulières.

- Soit G un feuilletage non singulier de $S^1 \times I$ tel que $S^1 \times \{0\}$ soit une feuille et $S^1 \times \{1\}$ soit ou bien une feuille ou bien transverse.

Soient $p \in \mathbb{N}^*$, et t_1, \dots, t_p des points distincts de $S^1 \times \{0\}$. Un *cycle* de F est l'image $\phi(S^1 \times \{0\})$, où ϕ est une application continue de $S^1 \times I$ dans M telle que :

- ▷ la restriction de ϕ à $S^1 \times]0, 1]$ est une immersion injective dont l'image ne contient aucune singularité de F ;
- ▷ les points $\phi(t_i)$ sont des singularités de F ;
- ▷ sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ de $S^1 \times \{0\}$, ϕ est une immersion dont l'image est une liaison entre selles ;
- ▷ l'image de toute feuille de G autre que $S^1 \times \{0\}$ est contenue dans une feuille de F .

REMARQUES.

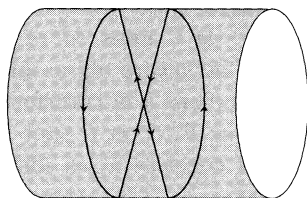
La restriction de ϕ à $S^1 \times \{0\} \setminus \{t_1, \dots, t_p\}$ est injective.

Un cycle passe toujours par une selle en empruntant deux séparatrices adjacentes.

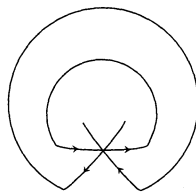
A un cycle est attaché une classe d'homotopie, celle de la courbe fermée simple $\phi(S^1 \times \{1\})$.

- Un cycle est dit *homotopiquement trivial* si cette classe d'homotopie est nulle.

- Un cycle h est dit *nul* s'il est homotopiquement trivial, ne contient qu'une singularité s , et si toute liaison contenue dans h borde un disque (cf. Fig 2).



Cycle homotopiquement trivial et non nul



Cycle nul

Figure 2

La présence de singularités de type centre entraîne celle de cycles nuls stables par perturbations.

• Un feuilletage transversalement affine sur M est dit *dynamiquement trivial* si F n'a ni quasiminimal, ni liaison autre que celles bordant un disque.

Il résulte directement de la définition et du théorème de SCHWARTZ (cf. [Sc]) qu'un feuilletage est dynamiquement trivial si et seulement si toute séparatrice :

- ▷ soit borde un disque,
- ▷ soit rencontre le bord de M ,
- ▷ soit possède comme ensemble limite une feuille hyperbolique.

4. Perturbations affines

4.1. Au voisinage d'une transversale fermée.

Soit \mathcal{C} une courbe fermée simple orientée transverse à F . Elle hérite d'une structure affine qui est de l'un des deux types suivants (voir [BS]) :

- $\frac{\mathbb{R}}{(x \mapsto x + 1)}$, si \mathcal{C} est d'holonomie linéaire triviale.

Dans ce cas, nous considérons le groupe à un paramètre (f_θ) de transformations de $\mathbb{R} : x \mapsto x + \theta$. Ces applications commutent à $x \mapsto x + 1$ et par conséquent définissent des transformations de \mathcal{C} dans elle-même.

- $\frac{\mathbb{R}_+^*}{(x \mapsto \lambda x)}$, si \mathcal{C} est d'holonomie linéaire non triviale λ .

Dans ce cas, nous considérons le groupe à un paramètre (f_θ) de transformations de $\mathbb{R}_+^* : x \mapsto e^\theta x$. Ces applications commutent à $x \mapsto \lambda x$ et par conséquent définissent des transformations de \mathcal{C} dans elle-même.

Voici comment ces transformations nous permettent de construire des perturbations dans la classe des feuilletages transversalement affines. Choisissons un demi-voisinage tubulaire V de \mathcal{C} dans M et notons \mathcal{C}' l'autre bord de V . La courbe \mathcal{C}' a la même structure affine que \mathcal{C} et est transverse à F pour V assez petit. Nous associons à la transformation f_θ une perturbation du feuilletage dans V . Pour F , \mathcal{C}' et \mathcal{C} sont identifiées par l'application identité. La perturbation consiste à les identifier par l'application f_θ (cf. Fig. 3).

Il est clair que pour θ assez petit le feuilletage obtenu est proche de F au sens de la topologie définie dans l'introduction et est de même type singulier.

Regardons l'effet de cette perturbation sur l'holonomie linéaire.

• Si \mathcal{C} est d'holonomie linéaire triviale, l'holonomie linéaire du feuilletage reste inchangée.

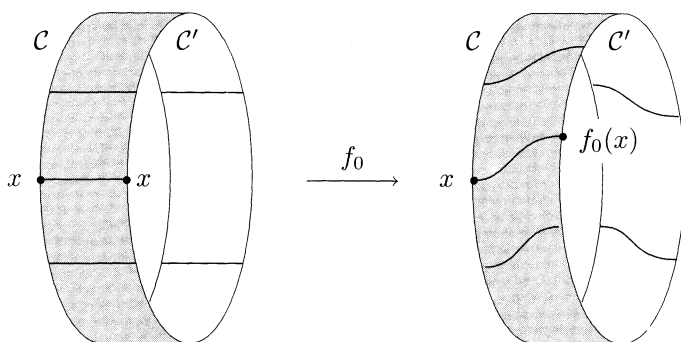


Figure 3

• Si C est d'holonomie linéaire non triviale, l'holonomie linéaire du feuilletage est modifiée sur les classes qui intersectent la classe de C .

4.2. Au voisinage d'une selle.

Ces perturbations sont celles définies par G. LEVITT pour les feuilletages mesurés.

Soient U, V, W trois disques fermés, voisinages d'un point $x \in \widetilde{M}$ et tels que $W \subset \overset{\circ}{V} \subset V \subset \overset{\circ}{U}$. Une *fonction bosse* est une application g_x de U dans \mathbb{R} , indéfiniment différentiable et telle que :

- g_x est nulle sur le complémentaire de V ,
- g_x est constante égale à 1 sur W ,
- g_x n'a pas de point critique dans l'intérieur de $V \setminus W$.

Soient s une selle de F à $2p$ séparatrices, \tilde{s} une de ses relevées à \widetilde{M} , \tilde{D} une application développante de F , H l'élément de $\text{Hom}(\pi_1(M), GA_+)$ pour lequel \tilde{D} est équivariante, et $g_{\tilde{s}}$ une fonction bosse définie sur un voisinage U de \tilde{s} suffisamment petit pour être disjoint de ses images par les automorphismes du revêtement.

Soit g l'application de \widetilde{M} dans \mathbb{R} nulle sur $\widetilde{M} \setminus \bigcup \{\gamma(U), \gamma \in \pi_1(M)\}$ et définie sur chaque $\gamma(U)$ par $g(y) = H_L(\gamma)g_{\tilde{s}}(\gamma^{-1}(y))$. On dit que g est une *fonction bosse* au-dessus de s .

Considérons maintenant l'application $\tilde{D} + \varepsilon g$, où ε est un réel arbitrairement petit. Cette application étant H -équivariante, elle définit un feuilletage transversalement affine proche de F et de même holonomie. Une telle perturbation sera appelée *perturbation singulière* de longueur ε (relative au choix de g).

Divisons un voisinage de s en $2p$ secteurs bordés par deux séparatrices et numérotions les successivement de 1 à $2p$. La perturbation a pour effet

de modifier tous les secteurs de même parité dans le même sens (soit de les écarter, soit de les refermer) (cf. Fig. 4).

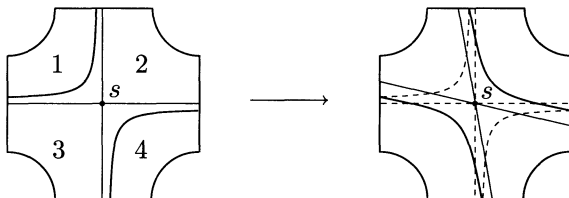


Figure 4

4.3. Lemme de déformation.

Dans ce paragraphe nous montrons une version singulière du lemme de déformation des Γ -structures (cf. [BoHa], [Me1]), en suivant la preuve donnée, dans le cadre des feuilletages réguliers, par G. MEIGNIEZ [Me1].

Plongeons $R(M) = \text{Hom}(\pi_1(M), GA_+)$ dans un $(GA_+)^p$ en considérant les images d'une partie génératrice finie de $\pi_1(M)$, et munissons-le de la topologie induite par la topologie produit sur $(GA_+)^p$. Cette topologie ne dépend pas du choix de la partie génératrice finie de $\pi_1(M)$. Notons que $R(M)$ est une variété algébrique réelle singulière, donc localement contractile.

LE LEMME DE DÉFORMATION. — Soient F_0 un feuilletage transversalement affine de M et H_0 une représentation d'holonomie de F_0 . Toute représentation H de $\pi_1(M)$ dans GA_+ assez proche de H_0 est représentation d'holonomie d'un feuilletage transversalement affine F proche de F_0 . De plus, on peut trouver F avec même type singulier que F_0 .

Démonstration. — On commence par suspendre simultanément tous les éléments de $R(M)$, comme suit : soit \widetilde{M} le revêtement universel de M , le produit $R(M) \times \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ est muni d'une action de $\pi_1(M)$ définie par :

$$\gamma(H, p, x) = (H, \gamma(p), H(\gamma)(x)).$$

L'espace quotient E est un fibré de fibre \mathbb{R} au-dessus de $R(M) \times M$. Pour tout $H \in R(M)$, la restriction E_H de E au-dessus de $\{H\} \times M$ est la suspension de H .

Le feuilletage trivial de $R(M) \times \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ par les $R(M) \times \widetilde{M} \times \{x\}$ n'est pas invariant par l'action de $\pi_1(M)$ et donc ne munit pas E d'un feuilletage transverse aux fibres.

Par contre, le feuilletage trivial de $\{H\} \times \widetilde{M} \times \mathbb{R}$ par les $\{H\} \times \widetilde{M} \times \{x\}$ est invariant par l'action et donc munit E_H d'un feuilletage F_H transverse aux fibres.

Se donner $\widetilde{D} \in D(M)$ de Morse et H -équivariante est équivalent à se donner une section de E_H au-dessus de $\{H\} \times M$ en position de Morse par rapport à F_H .

En effet, $\widetilde{D} \in D(M)$ étant donnée, l'application $p \mapsto (p, \widetilde{D}(p))$ de \widetilde{M} dans $\widetilde{M} \times \mathbb{R}$ passe au quotient. C'est une section qui est en position de Morse par rapport à F_H , car localement sa projection sur le facteur \mathbb{R} est \widetilde{D} qui de Morse.

Inversement, comme $\widetilde{M} \times \mathbb{R}$ revêt E_H , une telle section s_H se relève en une application de \widetilde{M} dans $\widetilde{M} \times \mathbb{R}$, et une et une seule des relevées est de la forme $p \mapsto (p, \widetilde{D}(p))$. Et puisque s_H est en position de Morse par rapport à F_H , \widetilde{D} est de Morse.

Reprenons la démonstration du lemme de déformation.

Remarquons que l'application $\mathcal{H} : D(M, \Sigma) \rightarrow R(M)$, qui à une application développante dont le feuilletage de M associé est de type singulier Σ associe l'unique élément de $R(M)$ pour lequel elle est équivariante, est continue. Le lemme de déformation revient à dire que cette application est ouverte.

Ainsi, soit U un ouvert de $D(M)$ et V sa trace sur $D(M, \Sigma)$. Nous devons montrer que tout $H_0 \in \mathcal{H}(V)$ possède un voisinage W dans lequel toute représentation de $\pi_1(M)$ dans GA_+ est l'image par \mathcal{H} d'un élément de V . Soient donc $H_0 \in \mathcal{H}(V)$ et $D_0 \in V$ telle que $\mathcal{H}(D_0) = H_0$.

Cas 1 : $D(M, \Sigma)$ est contenue dans l'ensemble des applications de \widetilde{M} dans \mathbb{R} de Morse.

Soit W un voisinage contractile de H_0 dans $R(M)$. La section correspondante s_{H_0} est en position de Morse par rapport à F_{H_0} . Par contractilité de W , cette section s'étend en une section globale s de E au-dessus de $W \times M$. Pour W suffisamment petit, sa restriction s_H à E_H est en position de Morse par rapport à F_H et correspond ainsi à une application D appartenant à U et H -équivariante. De plus, quitte à modifier D , on peut supposer que le feuilletage de M qui lui est associé a le type singulier de F , autrement dit $D \in V$: c'est l'application cherchée.

Cas 2 : cas général.

1) A l'aide d'opérations de Whitehead sur M puis relevées à \widetilde{M} , on construit une application $D'_0 \in U$ de Morse et H_0 -équivariante.

Fixons au-dessus de chaque selle s du feuilletage F'_0 (associé à D'_0) une fonction bosse g_s .

Pour tout $\Delta \in D(M)$ dont le feuilletage associé a le même type singulier que F'_0 , on définit $V_\alpha(\Delta)$ comme étant l'ensemble des éléments de $D(M)$ obtenus à partir de Δ à l'aide de perturbations singulières de longueurs au plus $\alpha \in \mathbb{R}$ (relatives au choix des g_s).

Soient $\varepsilon > 0$ et U' un voisinage de D'_0 strictement contenu dans U , tels que pour tout $\Delta \in U'$, l'ensemble $V_\varepsilon(\Delta)$ est contenu dans U .

2) Choisissons maintenant un voisinage contractile W de H_0 assez petit pour que, pour toute représentation H appartenant à W , les conditions suivantes soient vérifiées :

- la section s'_H (définie dans le cas 1) est en position de Morse par rapport à F_H ,
- l'élément D' de $D(M)$ correspondant à s'_H appartient à U' ,
- les séparatrices issues des selles de F' (feuilletage associé à D') qui constituaient les liaisons de F'_0 apparues avec les opérations de Whitehead sont suffisamment proches pour pouvoir être reconnectées à l'aide de perturbations singulières de longueur au plus ε .

3) Enfin, en reconstituant ces liaisons à l'aide de ces perturbations, et par des opérations de Whitehead dans l'autre sens, on obtient pour tout $H \in W$, une application $D \in U$, H -équivariante et dont le feuilletage de M associé est de type singulier Σ ; autrement dit D appartient à V . \square

Munis de ces perturbations, nous pouvons maintenant reprendre les idées de PEIXOTO [Pe] afin de montrer le THÉORÈME 1.

5. Stabilité des feuilletages de dynamique triviale

Montrons que les trois propriétés, sur le comportement des séparatrices, nécessaires et suffisantes pour qu'un feuilletage soit dynamiquement trivial, sont stables par petites perturbations.

Si une séparatrice T borde un disque, les feuilles de F contenues dans ce disque sont compactes et homotopes à un point, donc stables par perturbations dans $AF(M)$. Ceci force l'analogue de T , pour tout feuilletage proche de F , à border aussi un disque.

Si une séparatrice T a pour ensemble limite une feuille hyperbolique ou rencontre le bord de M , ceci reste vrai pour tous les feuilletages dont les feuilles sont assez proches de celles de F . Notre topologie étant plus fine que la topologie des feuilles, cette propriété est stable par perturbations dans $AF(M)$. \square

6. Densité des feuilletages de dynamique triviale

Étapes de la preuve de la densité.

Étape 1 : élimination des quasiminimaux. — Le procédé utilisé est celui de PEIXOTO. Il repose sur le lemme suivant. Soit $S(F)$ le nombre de liaisons du feuilletage F ; la fonction S est bornée sur tout sous-espace $AF(M, \Sigma)$.

LEMME 6.1. — *Soit F un feuilletage transversalement affine de M possédant un quasiminimal K . Tout voisinage de F dans $AF(M, \Sigma)$ contient un feuilletage G tel que $S(G) \geq S(F) + 1$.*

Pour prouver ce lemme, nous utiliserons des perturbations au voisinage d'une transversale fermée bien choisie.

Ensuite, nous éliminons les liaisons. La manière et les outils utilisés pour éliminer une liaison dépendent de la façon dont cette liaison intervient dans la dynamique. Les cycles interviennent fortement dans la dynamique. Nous commencerons par les éliminer.

Étape 2 : élimination des cycles soit d'holonomie non triviale, soit non homologues à zéro. — Soit $E(F)$ le nombre de séparatrices de F dont l'ensemble limite est une feuille hyperbolique. La fonction E est bornée sur tout sous-espace $AF(M, \Sigma)$ et semi-continue inférieurement.

LEMME 6.2. — *Soit F un feuilletage transversalement affine de M possédant un cycle h soit d'holonomie non triviale, soit d'holonomie triviale mais non homologue à zéro. Tout voisinage de F dans $AF(M, \Sigma)$ contient un feuilletage G tel que $E(G) \geq E(F) + 1$.*

Pour prouver ce lemme nous utiliserons des perturbations au voisinage de singularités ainsi que le lemme de déformation appliqué à une déformation particulière de la représentation d'holonomie. Nous montrons que si F possède un tel cycle h , on peut créer une feuille hyperbolique proche de h sur laquelle spirale l'une des séparatrices précédemment contenues dans h .

Étape 3 : Élimination des cycles homologues à zéro mais non homotopiquement triviaux. — Notons qu'un cycle homologue à zéro ne peut rencontrer de transversale fermée. Soit donc $C(F)$ le nombre de séparatrices de F rencontrant une transversale fermée. La fonction C est bornée sur tout sous-espace $AF(M, \Sigma)$ et semi-continue inférieurement.

LEMME 6.3. — *Soit F un feuilletage transversalement affine de M possédant un cycle homologue à zéro et non homotopiquement trivial. Tout voisinage de F dans $AF(M, \Sigma)$ contient un feuilletage G tel que $C(G) \geq C(F) + 1$.*

Pour cela, à l'aide du lemme de déformation, nous montrerons que si F possède un tel cycle h , on peut créer une transversale fermée proche de h qui rencontre au moins l'une des séparatrices précédemment contenues dans h .

Étape 4 : élimination des cycles homotopiquement triviaux mais non nuls. — Soit $D(F)$ le nombre de cycles nuls d'un feuilletage F . La fonction D est bornée sur tout sous-espace $AF(M, \Sigma)$ et semi-continue inférieurement.

LEMME 6.4. — *Soit F un feuilletage transversalement affine de M possédant un cycle h homotopiquement trivial mais non nul. Tout voisinage de F dans $AF(M, \Sigma)$ contient un feuilletage G tel que l'on ait $D(G) \geq D(F) + 1$.*

Pour cela, nous utiliserons des perturbations au voisinage des singularités de H et le lemme de déformation afin de transformer h en un cycle nul.

Étape 5 : élimination des liaisons non contenues dans les cycles. — Soit $B(F)$ le nombre de séparatrices de F s'accumulant sur une feuille hyperbolique, ou rencontrant le bord de M . La fonction B est bornée sur tout sous-espace $AF(M, \Sigma)$ et semi-continue inférieurement.

LEMME 6.5. — *Soit F un feuilletage transversalement affine de M sans quasiminimal, ni cycle non nul. Si F possède une liaison non contenue dans un cycle (nul), tout voisinage de F dans $AF(M, \Sigma)$ contient un feuilletage G tel que $B(G) \geq B(F) + 1$.*

Pour cela, nous utilisons des perturbations au voisinage de singularités, pour briser ces liaisons de sorte que les séparatrices qui les constituaient spiraient sur une feuille hyperbolique ou rencontrent le bord de M .

Conclusion de la preuve de la densité.

Soient $F \in AF(M, \Sigma)$ et V un voisinage de F dans $AF(M, \Sigma)$.

Quitte à diminuer V , on peut supposer, du fait de la semi-continuité inférieure des fonctions B, C, D, E , que pour tout $G \in V$, on a :

$$B(G) \geq B(F), \quad C(G) \geq C(F), \quad D(G) \geq D(F), \quad E(G) \geq E(F).$$

La fonction $T = B + C + D + E$ de $AF(M, \Sigma)$ dans \mathbb{N} est bornée et semi-continue inférieurement.

Par conséquent, il existe un ouvert $W \subset V$ non vide et sur lequel la fonction T est constante (prendre par exemple $W = \{G \in V : T(G) = \max_{G' \in V} T(G')\}$).

Nécessairement, tout feuilletage contenu dans W n'a que des cycles nuls. Sinon, soit $G \in W$ possédant un cycle non nul, d'après l'un des LEMMES 6.2, 6.3 ou 6.4, il existe $G' \in W$ tel que ou bien $C(G') > C(G)$, ou bien $D(G') > D(G)$, ou bien $E(G') > E(G)$.

Maintenant, d'après les hypothèses sur V , on conclut que $T(G') > T(G)$, ce qui contredit le fait que T est constante sur W .

La fonction S étant bornée, on peut trouver un feuilletage \mathcal{F} appartenant à W et tel que $S(\mathcal{F}) = \max_{G' \in W} S(G')$.

On conclut avec le LEMME 6.1 que \mathcal{F} n'a pas de quasiminimal. De plus, comme $\mathcal{F} \in W$, \mathcal{F} n'a que des cycles nuls.

Enfin, toute liaison de \mathcal{F} est contenue dans un cycle nul, d'après le LEMME 6.5.

Ainsi, \mathcal{F} est le feuilletage cherché : il est sans quasiminimal et toutes ses liaisons sont contenues dans les cycles nuls, autrement dit F n'a pas de liaison autre que celles bordant un disque.

Démonstration des lemmes 6.1 à 6.5

1. Élimination des quasiminimaux. Preuve du lemme 6.1.

Soient $F \in AF(M, \Sigma)$ possédant un quasiminimal K et \mathcal{C} une courbe fermée, simple, transverse à F , rencontrant K mais ne rencontrant aucune liaison de F . Nous allons perturber F au voisinage de \mathcal{C} .

Orientons F . Du théorème de SCHWARTZ (cf. [Sc]), on déduit (cf. [Le2]) que K contient une séparatrice positive \mathcal{T}^+ récurrente et une séparatrice négative \mathcal{T}^- récurrente.

Notons p [resp. q] le premier point d'intersection de \mathcal{T}^+ [resp. \mathcal{T}^-] avec \mathcal{C} . Soit \mathcal{C}' une courbe fermée, simple, transverse, bordant avec \mathcal{C} un cylindre V traversé par F positivement dans le sens $\mathcal{C}\mathcal{C}'$. Notons q' le point de \mathcal{C}' correspondant à q . Par densité de \mathcal{T}^+ dans K , il existe une suite (p_n) de points de $\mathcal{T}^+ \cap \mathcal{C}$ qui converge vers q .

Fixons $n \in \mathbb{N}$ et orientons \mathcal{C} de sorte que p_n soit au-dessous de q .

Considérons la famille $(f_\varepsilon)_{\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]}$ de perturbations de F dans V , où ε_0 est défini par $f_{\varepsilon_0}(p_n) = q'$. Notons F_ε le feuilletage obtenu à partir de F en effectuant la perturbation f_ε .

Étudions la F_ε -feuille positive du point p , pour $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

S'il existe $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon_0]$ tel que la F_{ε_1} -feuille positive de p aboutit à une selle, on a $S(F_{\varepsilon_1}) \geq S(F) + 1$ puisque les liaisons de F n'ont pas été modifiées.

Sinon, soit N l'entier tel que p_n soit le N -ième point d'intersection de \mathcal{T}^+ avec \mathcal{C} . La F_{ε_0} -feuille positive de p reste parallèle à L_p^+ et

rencontre \mathcal{C} pour la N -ième fois en un point situé au-dessus de p_n . Ensuite, cette feuille subit une nouvelle modification entre \mathcal{C} et \mathcal{C}' . Elle rencontre donc \mathcal{C} en un point situé au-dessus de q' (Fig. 5).

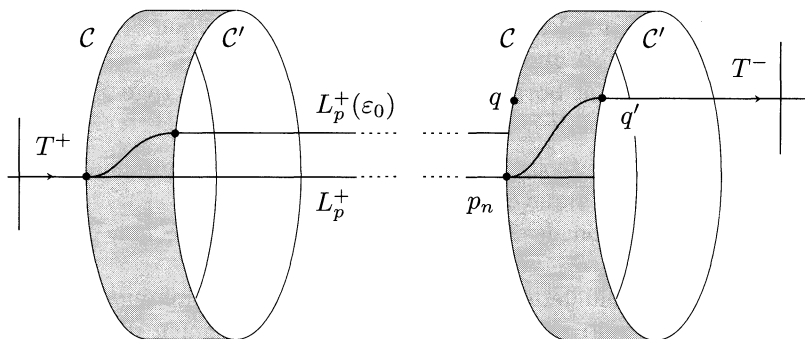


Figure 5

Ainsi, par continuité par rapport au paramètre de perturbation, il existe $\varepsilon_1 \in [0, \varepsilon_0]$ tel que la F_{ε_1} -feuille positive de p rencontre \mathcal{C}' pour la N -ième fois au point q' et donc aboutit à la selle dont T^- est issue. On a alors $S(F_{\varepsilon_1}) \geq S(F) + 1$, puisque les liaisons de F n'ont pas été modifiées. \square

2. Élimination des cycles soit d'holonomie non triviale, soit non homologues à zéro. Démonstration du lemme 6.2.

Soit $F \in AF(M, \Sigma)$ possédant un cycle h soit d'holonomie non triviale, soit non homologue à 0.

Si h est d'holonomie non triviale, nous le perturbons de manière à en faire une feuille hyperbolique. Pour cela, il suffit d'écarter arbitrairement peu toutes les séparatrices contenues dans h en modifiant F au voisinage des singularités de h (Fig. 6). Ceci est possible, car si plusieurs couples de

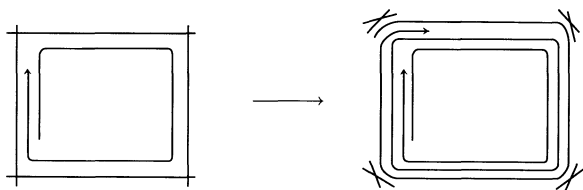


Figure 6

séparatrices adjacentes issues d'une même selle s sont dans h , les secteurs de s dans lesquels les feuilles s'accumulent sont de même parité et donc peuvent être modifiés dans le même sens (ceci provient du fait qu'un cycle est bord d'un anneau dans lequel le feuilletage induit par F est régulier).

Enfin, il est facile de voir qu'au moins l'une des séparatrices de h s'accumule sur la feuille hyperbolique créée. Donc, par semi-continuité inférieure de H , on a $E(G) \geq E(F) + 1$.

Si h est d'holonomie triviale, h borde un paquet de feuilles compactes Γ . On veut perturber F de manière à créer dans Γ une feuille hyperbolique. Considérons un intervalle I fermé, transverse à F et dont le saturé par F est exactement Γ . Les extrémités de I sont contenues dans les cycles qui bordent Γ , nous leur imposons d'être des selles. L'application de premier retour induite par F sur I est triviale.

Supposons trouvé un feuilletage $G \in AF(M, \Sigma)$ arbitrairement proche de F et tel que :

- 1) G est transverse à I ;
- 2) l'application de premier retour induite par G sur I est une homothétie stricte (*i.e.* de rapport différent de 1) dont le point fixe est dans l'intérieur de I .

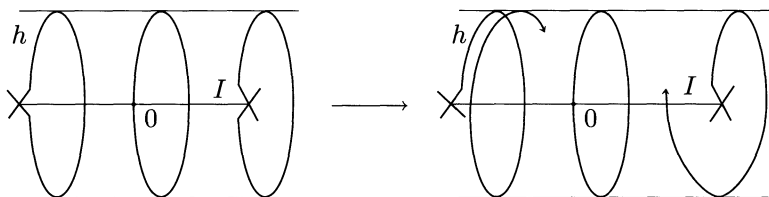


Figure 7

Ainsi, ce feuilletage G possède une feuille hyperbolique dans Γ et au moins une des séparatrices précédemment contenues dans h s'accumule sur cette feuille hyperbolique. Enfin, par semi-continuité inférieure de E , on a $E(G) \geq E(F) + 1$.

Il ne nous reste donc qu'à prouver l'existence du feuilletage G .

L'intervalle I est transverse à tout feuilletage assez proche de F . Nous sous-entendons dans la suite de cette preuve que les perturbations effectuées sont suffisamment petites pour que cette condition soit vérifiée.

Identifions I muni de sa structure affine avec l'intervalle $[-1, 1]$, choisissons le point base de M sur h et notons H la représentation d'holonomie de F induite par cette identification.

La classe d'homotopie de h peut être représentée par une courbe fermée simple et non séparante sur M . Par conséquent, on peut trouver une présentation standard de $\pi_1(M)$ dans laquelle cette classe est un générateur.

Fixons une telle présentation de $\pi_1(M)$. Le problème se ramène, via le lemme de déformation, à perturber une représentation de $\pi_1(M)$

dans GA_+ de sorte que l'image précédemment triviale d'un certain générateur devienne une homothétie stricte, proche de l'identité et dont le point fixe appartient à $] - 1, 1[$. Nous choisissons pour ce point le point 0.

Si le bord de M n'est pas vide, $\pi_1(M)$ est un groupe libre, et ce problème est trivial. Par contre, si M est sans bord, il faut préserver la relation des commutateurs. Ainsi, la preuve du LEMME 6.2 se ramène à celle du résultat suivant. Soit

$$\langle a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

une présentation standard de $\pi_1(M)$.

LEMME 6.2.1. — *Soient $H \in R(M)$ telle que $H(a_1)$ est triviale et V un voisinage de H dans $R(M)$. Il existe $H' \in V$ telle que $H'(a_1)$ est une homothétie stricte de centre 0.*

Le LEMME 6.2 s'obtient en prenant pour a_1 la classe d'homotopie de h . Pour la démonstration du LEMME 6.2.1 nous avons besoin du lemme suivant.

LEMME 6.2.2. — *Soit $H \in R(M)$; il existe $H' \in R(M)$ arbitrairement proche de H et telle que :*

- $H'(a_1)$ et $H'(b_1)$ ne sont pas des translations;
- $H'(a_j) = H(a_j)$ et $H'(b_j) = H(b_j)$ pour tout $j \neq 1$.

Démonstration. — Nous cherchons un élément

$$(H'(a_1), H'(b_1), \dots, H(a_g), H(b_g))$$

de GA_+^{2g} vérifiant

$$[H'(a_1), H'(b_1)] = [H(a_1), H(b_1)]$$

et tel que $H'(a_1)$ et $H'(b_1)$ ne sont pas des translations.

Si $H(a_1)$ et $H(b_1)$ ne sont pas des translations, ce lemme est trivial.

Considérons maintenant le cas où seulement l'une des deux est une translation, par exemple $H(a_1)$. Soit h une homothétie stricte, proche de l'identité et ayant même point fixe que $H(b_1)$; posons $H'(b_1) = H(b_1)$ et $H'(a_1) = H(a_1)h$: c'est une homothétie stricte.

Passons au calcul du commutateur; on obtient :

$$\begin{aligned} [H'(a_1), H'(b_1)] &= H(a_1)hH(b_1)h^{-1}H(a_1)^{-1}H(b_1)^{-1} \\ &= H(a_1)H(b_1)H(a_1)^{-1}H(b_1)^{-1}, \end{aligned}$$

car h et $H(b_1)$ commutent, et finalement :

$$[H'(a_1), H'(b_1)] = [H(a_1), H(b_1)].$$

Considérons maintenant le cas où $H(a_1)$ et $H(b_1)$ sont des translations.

Si l'une des deux est triviale, il est clair que l'on se ramène facilement au cas précédent, en transformant l'autre en une homothétie stricte. Par trivialité de la première, la trivialité du commutateur est préservée.

Supposons donc que $H(a_1)$ et $H(b_1)$ sont des translations non triviales de longueur respective α et β . Posons

$$H'(a_1) = H(a_1)h_\varepsilon, \quad H'(b_1) = H(b_1)h_\nu,$$

où h_η représente l'homothétie de centre 0 et de rapport $(1 + \eta)$, ε et ν étant des réels non nuls arbitrairement petits.

L'application $H'(a_1)$ (resp. $H'(b_1)$) est une homothétie stricte de centre $-\alpha/\varepsilon$ (resp. $-\beta/\nu$). Par conséquent, pour préserver la trivialité du commutateur, il suffit que $H'(a_1)$ et $H'(b_1)$ aient même centre, c'est-à-dire que $\nu = \beta/\alpha\varepsilon$. \square

Démonstration du lemme 6.2.1.

Ce problème se ramène à chercher un élément $(H'(a_1), \dots, H'(b_g))$ de GA_+^{2g} proche de $(H(a_1), \dots, H(b_g))$ et vérifiant :

(i) $H'(a_1)$ est une homothétie stricte de centre 0;

(ii) $[H'(a_1), H'(b_1)] \dots [H'(a_g), H'(b_g)] = 1$.

Commençons par essayer de trouver un tel élément en ne perturbant que les deux premières coordonnées $H'(a_1)$ et $H'(b_1)$.

La condition (ii) devient :

$$[H'(a_1), H'(b_1)] = [H(a_1), H(b_1)] = 1.$$

Ceci implique que les homothéties $H'(a_1)$ et $H'(b_1)$ ont un point fixe commun. Or, si $H(b_1)$ n'a pas de point fixe suffisamment proche de 0, il est impossible de trouver un élément de GA_+^{2g} proche de $(H(a_1), \dots, H(b_g))$ vérifiant les conditions (i) et (ii).

Si $H(b_1)$ fixe 0, alors $H'(a_1) = (1 + \theta)x$, avec $\theta \in \mathbb{R}^*$ arbitrairement petit, convient.

Supposons que $H(b_1)$ ne fixe pas 0. Nous sommes donc amenés à perturber aussi les deux coordonnées suivantes : $H'(a_2)$ et $H'(b_2)$; ceci n'est possible que si M est de genre au moins 2. Nous trouvons ici l'obstruction à prouver le théorème sur le tore \mathbb{T}^2 .

La condition (ii) s'écrit :

$$[H'(a_1), H'(b_1)][H'(a_2), H'(b_2)] = [H(a_2), H(b_2)].$$

Regardons la famille à deux paramètres (θ, ε) de perturbations définie par :

- $H'(a_1)(x) = (1 + \theta)x$, $\theta \in \mathbb{R}$,
- $H'(b_2) = T_\varepsilon H(b_2)$, où T_ε est la translation réelle de longueur ε ,

les autres coordonnées étant inchangées.

Nous supposons θ et ε suffisamment petits pour que l'éventuelle représentation de $\pi_1(M)$ dans GA_+ induite par le $2g$ -uplet

$$(H'(a_1), \dots, H'(b_g))$$

appartienne à V . On a :

$$[H'(a_2), H'(b_2)] = H(a_2) T_\varepsilon H(b_2) H^{-1}(a_2) H^{-1}(b_2) T_\varepsilon^{-1}.$$

Par commutativité des translations $H(a_2) T_\varepsilon H(b_2) H^{-1}(a_2) H^{-1}(b_2)$ et T_ε^{-1} , on obtient :

$$\begin{aligned} [H'(a_2), H'(b_2)] &= (T_\varepsilon^{-1} H(a_2) T_\varepsilon H^{-1}(a_2)) H(a_2) H(b_2) H^{-1}(a_2) H^{-1}(b_2) \\ &= [T_\varepsilon^{-1}, H(a_2)] [H(a_2), H(b_2)]. \end{aligned}$$

Par conséquent, la condition (ii) s'écrit :

$$[H'(a_1), H(b_1)] = [T_\varepsilon^{-1}, H(a_2)]^{-1}.$$

Comme $H(b_1)$ ne fixe pas 0 si $\theta \neq 0$, le commutateur $[H'(a_1), H(b_1)]$ est une translation non triviale dont la longueur $\ell(\theta)$ dépend linéairement de θ . De même, si $H(a_2)$ n'est pas une translation et $\varepsilon \neq 0$, le commutateur $[T_\varepsilon^{-1}, H(a_2)]$ est aussi une translation non triviale dont la longueur $L(\varepsilon)$ dépend linéairement de ε .

Par conséquent, on peut trouver un couple (θ, ε) arbitrairement proche et distinct de $(0, 0)$ de sorte que $\ell(\theta) = L(\varepsilon)$, c'est-à-dire tel que (ii) soit vérifiée.

Par contre, si $H(a_2)$ est une translation, le commutateur $[T_\varepsilon^{-1}, H(a_2)]$ est trivial. Il est donc impossible de trouver un couple $(\theta, \varepsilon) \neq (0, 0)$ permettant de vérifier la condition (ii).

Le cas où $H(a_2)$ est une translation se ramène au précédent à l'aide du LEMME 6.2.2 appliqué à a_2 et b_2 . Ceci achève les preuves des LEMMES 6.2.1 et 6.2. \square

3. Élimination des cycles homologues à zéro, non homotopiquement triviaux.

Démonstration du lemme 6.3. — Soit $F \in AF(M\Sigma)$ possédant un cycle h homologue à zéro et non homotopiquement trivial. Le lemme suivant, ainsi que le lemme de déformation, nous permettent d'affirmer que F peut être perturbé de sorte que l'holonomie de h devienne non triviale.

LEMME 6.3.1. — Soient $H \in R(M)$ et $[C] \in \pi_1(M)$ non nul et pouvant être représenté sur M par une courbe C fermée simple et qui sépare. On peut trouver une représentation de $\pi_1(M)$ dans GA_+ arbitrairement proche de H et pour laquelle l'image de $[C]$ est non triviale.

Démonstration. — Supposons $H([C]) = 1$, sinon le lemme est trivial. La courbe C sépare M en deux surfaces, de genre g_1 et g_2 respectivement.

- Si $\partial M = \emptyset$, on peut trouver une présentation de $\pi_1(M)$

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] = 1 \rangle$$

telle que :

$$[C] = [a_1, b_1] \cdots [a_{g_1}, b_{g_1}] = ([a_{g_1+1}, b_{g_1+1}] \cdots [a_g, b_g])^{-1}.$$

Le problème se ramène donc à trouver $(H'(a_1), \dots, H'(b_g)) \in GA_+^{2g}$ proche de $(H(a_1), \dots, H(b_g))$ et tel que :

- (i) $H'([C]) := [H'(a_1), H'(b_1)] \cdots [H'(a_{g_1}), H'(b_{g_1})] \neq 1$,
- (ii) $H'([C]) = ([H'(a_{g_1+1}), H'(b_{g_1+1})] \cdots [H'(a_g), H'(b_g)])^{-1}$.

Supposons que $H(a_1)$ et $H(a_g)$ ne sont pas des translations. Le LEMME 6.2.2 appliqué à a_1 et b_1 puis a_g et b_g permet de se ramener à ce cas, et on a toujours $H([C]) = 1$.

Considérons la famille à deux paramètres (θ, ε) de perturbations de GA_+^{2g} définie par

- $H'(b_1) = T_\varepsilon H(b_1)$;
- $H'(b_g) = T_\theta H(b_g)$, où T_α est la translation réelle de longueur α ,

les autres coordonnées étant inchangées.

On a :

$$[H'(a_1), H'(b_1)] = [T_\varepsilon^{-1}, H(a_1)] [H(a_1), H(b_1)].$$

De même on a (voir le LEMME 6.2.1) :

$$[H'(a_g), H'(b_g)] = [T_\varepsilon^{-1}, H(a_g)] [H(a_g), H(b_g)].$$

Ainsi, les conditions (i) et (ii) se traduisent par :

$$(i) \quad H'([C]) = [T_\varepsilon^{-1}, H(a_1)] \neq 1,$$

$$(ii) \quad [T_\varepsilon^{-1}, H(a_1)] = ([T_\theta^{-1}, H(a_g)])^{-1}.$$

Maintenant, grâce aux hypothèses faites et avec des arguments analogues à ceux utilisés pour le LEMME 6.2.1, il est facile de voir que l'on peut trouver ε et θ arbitrairement petits et tels que l'élément $(H'(a_1), \dots, H'(a_g))$ vérifie les deux conditions (i) et (ii).

- Si $\partial M \neq \emptyset$, on peut trouver une présentation de $\pi_1(M)$:

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, C_1, \dots, C_{k-1} \rangle$$

dans laquelle $[C]$ s'écrit :

$$[a_1, b_1] \cdots [a_{g_1}, b_{g_1}] C_1 \cdots C_\ell,$$

où les C_i sont des composantes de bord.

Si $\ell \neq 0$, il suffit de modifier l'holonomie d'un des générateurs C_i .

Si $\ell = 0$, il suffit de modifier l'holonomie de b_1 de sorte que l'holonomie du commutateur $[a_1, b_1]$ soit modifiée (voir le cas $\partial M = \emptyset$, condition (i)).

Ceci conclut la démonstration du LEMME 6.3.1. \square

Reprenons la démonstration du lemme 6.3. — On applique le LEMME 6.3.1 de sorte que l'holonomie du cycle h homologue à 0 devienne non triviale. Considérons un segment I transverse à F et qui rencontre le paquet de feuilles compactes bordé d'un côté par h . Pour tout feuilletage F' assez proche de F , l'image de I par l'application de premier retour induite par F' sur I est un segment distinct mais non disjoint de I .

Maintenant, on peut construire une transversale à F' fermée et proche de h . De plus, il existe au moins une séparatrice de F contenue dans h dont l'analogue pour ce nouveau feuilletage rencontre cette transversale.

On en conclut qu'il est possible de trouver un feuilletage transversalement affine G arbitrairement proche de F et tel $C(G) \geq C(F) + 1$. \square

4. Élimination des cycles homotopiquement triviaux, non nuls.

Démonstration du lemme 6.4. — Soit $F \in AF(M, \Sigma)$ possédant un cycle non nul h . Pour se ramener au cas où h ne contient qu'une singularité, il suffit de perturber le feuilletage dans le voisinage de la singularité s de h que l'on veut garder de manière à resserrer toutes les séparatrices de s contenues dans h . Ceci est faisable, car tous les secteurs à diminuer sont de même parité.

Puisque h ne contient qu'une singularité s , toute liaison contenue dans h est une courbe fermée simple. Maintenant, à l'aide des LEMMES 6.2.1 et 6.3.1, on élimine les liaisons de h ne bordant pas un disque. Ainsi, on a construit un nouveau cycle nul, car h bordait un disque dans lequel les feuilles régulières étaient compactes, homotopes à un point et donc stables. \square

5. Élimination des liaisons non contenues dans des cycles.

Démonstration du lemme 6.5. — Soit $F \in AF(M, \Sigma)$ sans quasiminimal, ni cycle non nul et possédant une liaison non contenue dans un cycle. Puisque F est sans quasiminimal ni cycle non nul et les ensembles limites (à l'exception des feuilles compactes homotopes à un point) sont exclusivement les points singuliers et les feuilles hyperboliques.

Considérons une séparatrice positive \mathcal{T}^+ de F liée et non contenue dans un cycle et I un intervalle transverse à F et dont l'une des extrémités est la selle dont est issue \mathcal{T}^+ .

Les feuilles de F étant propres et \mathcal{T}^+ n'étant pas contenue dans un ensemble limite, on peut supposer, quitte à restreindre I , que toute demi-feuille positive issue de I est régulière et ne rencontre pas I .

Ainsi, ou bien toutes les demi-feuilles positives issues de I ont pour ensemble limite une même feuille hyperbolique \mathcal{O} , ou bien elles rencontrent le bord de M en un intervalle I' .

Effectuons une perturbation au voisinage de la selle dont est issue \mathcal{T}^+ de sorte que la nouvelle séparatrice \mathcal{T}^+ entre dans I , et suffisamment petite pour que :

- I reste transverse ;
- ou bien \mathcal{O} reste l'ensemble limite des demi-feuilles issues de I , ou bien les demi-feuilles issues de I rencontrent toujours le bord de M ;

Par conséquent, la séparatrice \mathcal{T}^+ permet à B d'augmenter strictement. Ceci achève la preuve du LEMME 6.5. \square

BIBLIOGRAPHIE

- [Ar] ARNOUX (P.). — *Échanges d'intervalles et flots sur les surfaces*, Monographie de l'Enseignement Mathématique, t. **29**, 1981, p. 5–38.
- [BoHa] BONATTI (C.) et HAEFLIGER (A.). — *Déformation de feuilletages*, Topology, t. **29**, 1990, p. 205–229.

- [BS] SEKE (BOBO). — *Sur les structures transversalement affines des feuilletages de codimension 1*, Ann. Inst. Fourier, t. **30**, 1, 1980, p. 1–29.
- [FLP] FATHI (A.), LAUDENBACH (F.) et POENARU (V.). — *Travaux de Thurston sur les surfaces*, Astérisque Soc. Math. France, t. **66–67**, 1979.
- [Le1] LEVITT (G.). — *Foliations and laminations on hyperbolic surfaces*, Topology, t. **22**, 1983, p. 119–135.
- [Le2] LEVITT (G.). — *La décomposition dynamique et la différentiabilité des feuilletages des surfaces*, Ann. Inst. Fourier, t. **37**, 1987, p. 85–116.
- [Li] LIOUSSE (I.). — *Feuilletages transversalement affines des surfaces et actions affines sur les arbres réels*, Thèse, février 1994.
- [Me1] MEIGNIEZ (G.). — *Actions de groupes sur la droite réelle et feuilletages de codimension 1*, Thèse, 1988.
- [Me2] MEIGNIEZ (G.). — *Bouts d'un groupe opérant sur la droite I : théorie algébrique*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. **40**, 2, 1990, p. 271–322.
- [Me3] MEIGNIEZ (G.). — *Bouts d'un groupe opérant sur la droite II : application à la topologie des feuilletages*, Tokohu Math. Jour, t. **43**, 1991, p. 473–500.
- [Pe] PEIXOTO (M.). — *Structural stability on two dimensional manifolds*, Topology, t. **1**, 1962, p. 101–120.
- [Sc] SCHWARTZ (A.). — *A generalisation of Poincaré-Bendixon theorem to closed two-dimensional manifolds*, Amer. Jour. of Math., t. **85**, 1963, p. 453–458.
- [St] STREDDER (P.). — *Morse foliations*, Thesis, Warwick, 1976.
- [Th] THURSTON (W.). — *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **19**, 1988, p. 417–432.
- [Ve] VEECH (W.). — *Quasiminimal invariants for foliations of orientable closed surfaces*, preprint.