BULLETIN DE LA S. M. F.

MOHAMMED BEKKA
PIERRE DE LA HARPE

Représentations d'un groupe faiblement équivalentes à la représentation régulière

Bulletin de la S. M. F., tome 122, n^o 3 (1994), p. 333-342
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1994__122_3_333_0>

Bull. Soc. math. France,
122, 1994, p. 333–342.

REPRÉSENTATIONS D'UN GROUPE FAIBLEMENT ÉQUIVALENTES À LA REPRÉSENTATION RÉGULIÈRE

PAR

MOHAMMED BEKKA et PIERRE DE LA HARPE (*)

RÉSUMÉ. — Soit Γ un réseau dans un groupe de Lie réel connexe G qui est simple, de centre réduit à $\{1\}$, et non compact. Soient π une représentation unitaire de G et $\pi|_\Gamma$ sa restriction à Γ. Si π n'est pas triviale, on montre que $\pi|_\Gamma$ contient faiblement la représentation régulière λ_Γ de Γ. Lorsque π est dans la série principale ou dans la série discrète de G, ceci implique que la représentation $\pi|_\Gamma$ est faiblement équivalente à λ_Γ. Dans le cas où $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et lorsque π est dans la série complémentaire, on obtient aussi des résultats sur $\pi|_\Gamma$.

ABSTRACT. — Let Γ be a lattice in a connected real Lie group G which is simple, non compact and with centre reduced to $\{1\}$. Let π be a unitary representation of G and let $\pi|_\Gamma$ be its restricition to Γ. If π is not trivial, we show that $\pi|_\Gamma$ weakly contains the regular representation λ_Γ of Γ. When π is in the principal series or the discrete series of G, this implies that $\pi|_\Gamma$ and λ_Γ are weakly equivalent. In the case $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ and when π is in the complementary series, we obtain also results on $\pi|_\Gamma$.

1. Introduction

Soit G un groupe localement compact. Les *représentations* de G considérées ici sont les représentations unitaires continues de G dans des espaces de Hilbert complexes non nuls. Étant donné une telle représentation π dans $\mathcal{H}_\pi$, les *fonctions de type positif associées* à π

(*) Texte reçu le 28 septembre 1992, révisé le 26 novembre 1992.

M. BEKKA, Département de Mathématiques, Université de Lausanne, 1015 Lausanne, Suisse et Mathematisches Institut, Technische Universität Munchen, Arcisstr. 21, D-8000, München 2, Allemagne.

P. DE LA HARPE, Section de Mathématiques, Université de Genève, C.P. 240, CH-1211, Genève 24, Suisse.

Mots clés : représentations unitaires, contenance faible, réseaux, groupes de Lie semi-simples.

Classification AMS : 22D10, 22E40.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1994/333/$ 5.00

sont les fonctions $G \to \mathbb{C}$ de la forme $g \mapsto \langle \xi \mid \pi(g)\xi \rangle$ où ξ est un vecteur de $\mathcal{H}_\pi$. Soient π, π' deux représentations de G ; on dit que π est *faiblement contenue* dans π' et on écrit $\pi \prec \pi'$ si les fonctions de type positif associées à π sont approchables par des sommes de fonctions de type positif associées à π'. (« Approchables » veut dire ici « limites uniformes sur tout compact de G ».) On dit que π et π' sont *faiblement équivalentes* et on écrit $\pi \sim \pi'$ si $\pi \prec \pi'$ et $\pi' \prec \pi$. Pour une introduction à ces notions, voir par exemple le livre de Dixmier [DC*].

On note $L^2(G)$ l'espace des fonctions complexes de carré sommable sur G pour une mesure de Haar invariante à gauche ; on note λ_G la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G)$. Les questions qui nous intéressent ici concernent un *sous-groupe discret* Γ d'un *groupe de Lie* G. Toute représentation π de G fournit par restriction une représentation $\pi_{|\Gamma}$ de Γ (agissant dans le même espace que π). Nous cherchons à comprendre quand $\pi_{|\Gamma}$ contient faiblement la représentation régulière λ_Γ de Γ, et plus généralement quelles sont les propriétés de l'application $\pi \mapsto \pi_{|\Gamma}$ du point de vue de la contenance faible.

Soit $C^*(G)$ la C^*-algèbre de G. Soit π une représentation de G dans un espace $\mathcal{H}_\pi$ et soit $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ la C^*-algèbre des opérateurs bornés sur $\mathcal{H}_\pi$. Alors π induit un morphisme de C^*-algèbres $C^*(G) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ encore noté π, avec noyau et image respectivement notés $C^* \operatorname{Ker}(\pi)$ et $C^*_\pi(G)$. Si $\pi = \lambda_G$, la C^*-algèbre $C^*_{\lambda_G}(G)$ est la C^*-algèbre réduite $C^*_{\text{red}}(G)$ de G. Si π et π' sont deux représentations de G, rappelons qu'on a $\pi \prec \pi'$ si et seulement si $C^* \operatorname{Ker}(\pi) \supset C^* \operatorname{Ker}(\pi')$. (Voir dans [DC*] les numéros 3.4.4 et 18.1.4.)

Les notations et considérations précédentes valent aussi pour un sous-groupe discret Γ de G. Supposons de plus Γ tel que $C^*_{\text{red}}(\Gamma)$ soit une C*-algèbre simple (pour des exemples, voir entre autres [BGH], [Har], [HoR]) ; pour toute représentation ρ de Γ, on a dans ce cas :

$$\rho \prec \lambda_\Gamma \iff \rho \sim \lambda_\Gamma.$$

Toutefois, pour beaucoup des groupes Γ qui apparaissent ci-dessous, on ignore si les C*-algèbres réduites correspondantes sont simples.

2. Résultats

Soit G un groupe de Lie réel connexe qui est simple, non compact, et de centre réduit à $\{1\}$. Soit $B = MAN$ un sous-groupe parabolique minimal de G ; rappelons que la *série principale* de G est la famille des représentations de la forme $\operatorname{Ind}_B^G(\rho)$, où ρ est une représentation de B dont la restriction à M (resp. A, N) est irréductible (resp. un caractère unitaire de A, la représentation triviale de N) ; pour tout ceci, voir par exemple [Wal]. Rappelons aussi que la plupart de ces représentations (mais pas toutes) sont irréductibles [Wal, th. 8.3.12]. Convenons qu'une représentation π est *triviale* si $\pi(g)\xi = \xi$ pour tous $g \in G$ et $\xi \in \mathcal{H}_\pi$; on désigne par 1_G la représentation triviale de G de dimension 1. Notons que toute représentation non triviale de G est fidèle, car G est simple. Rappelons que G est un groupe linéaire (via sa représentation adjointe) et que la topologie de Zariski est donc bien définie sur G [Zim, prop. 3.1.6].

THÉORÈME 1. — *On se donne un groupe simple G comme ci-dessus et un sous-groupe discret Γ de G dense pour la topologie de Zariski, par exemple un réseau de G. Soit π une représentation de G.*

(i) *Si π n'est pas triviale, alors $\lambda_\Gamma \prec \pi_{|\Gamma}$.*

(ii) *Si $\pi \prec \lambda_G$, par exemple si π est dans la série principale, alors $\lambda_\Gamma \sim \pi_{|\Gamma}$.*

Dans la situation du THÉORÈME 1 et lorsque Γ est un réseau de G, rappelons le résultat suivant de COWLING et STEGER [CoS] :

(iii) Si π est irréductible et n'est pas de carré intégrable, alors $\pi_{|\Gamma}$ est irréductible; de plus, si π et π' sont deux représentations irréductibles inéquivalentes de G qui ne sont pas de carré intégrable, alors $\pi_{|\Gamma}$ et $\pi'_{|\Gamma}$ ne sont pas équivalentes.

On sait par ailleurs qu'on a [GHJ, § 3.3.c] :

(iv) si π est irréductible dans la série discrète de G, alors $\pi_{|\Gamma}$ est quasi-équivalente à λ_Γ (au sens de [DC*, n° 5.3.1]).

Considérons le cas particulier de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et d'une représentation irréductible π de G. Si π est dans la série principale ou dans la série discrète, voir (ii) et (iv) ci-dessus. Les autres représentations irréductibles de G constituent la *série complémentaire* $(\pi_t)_{0<t<1}$, paramétrée ici comme dans [Lan]. Nous notons $\pi_{t,\Gamma}$ la restriction de π_t à un sous-groupe discret Γ de G.

THÉORÈME 2. — *Soient Γ un réseau de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et π_s, π_t deux représentations de la série complémentaire de G telles que $s < t$. Alors :*

(v) $\lambda_\Gamma \prec \pi_{t,\Gamma}$ *et* $\lambda_\Gamma \not\succ \pi_{t,\Gamma}$,

(vi) $\pi_{t,\Gamma} \not\prec \pi_{s,\Gamma}$.

Dans la situation du THÉORÈME 2, on sait que $C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma)$ est simple [Har], et il résulte de (v) qu'on a des morphismes surjectifs :

$$\phi_t : C^*_{\pi_{t,\Gamma}}(\Gamma) \longrightarrow C^*_{\mathrm{red}}(\Gamma).$$

Il serait intéressant d'étudier les noyaux de ces morphismes. (Au niveau du groupe de Lie, rappelons que G est liminaire [DC*, th. 15.5.6]; par suite $C^*_\pi(G)$ est l'idéal des opérateurs compacts dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\pi)$ pour toute représentation irréductible π de G, de sorte que $C^*_\pi(G)$ est simple pour tout $\pi \in \widehat{G}$).

Dans le cas où $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$, nous pouvons préciser l'assertion (vi) ci-dessus. Auparavant, rappelons que le dual unitaire $\widehat{G}$ d'un groupe localement compact G est muni de la *topologie de Fell*, pour laquelle l'adhérence d'une partie $A \subset \widehat{G}$ est définie par

$$\bar{A} = \Big\{\pi \in \widehat{G} \ : \ \pi \prec \bigoplus_{\rho \in A} \rho\Big\}$$

(voir [DC*, chap. 18]). Pour $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, il est bien connu que l'application

$$]0,1[\longrightarrow \widehat{G}, \quad t \mapsto \pi_t,$$

paramétrisant la série complémentaire, est un homéomorphisme sur son image (voir [Del, p. 306] et [EhM, th. 1 et 3]). Si Γ est un réseau de G, on a en vertu de l'assertion (iii) ci-dessus une application

$$]0,1[\longrightarrow \widehat{\Gamma}, \quad t \mapsto \pi_{t,\Gamma}$$

qui est injective.

THÉORÈME 3. — *On considère le groupe modulaire* $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$ *comme un réseau dans* $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. *Pour tous* $s, t \in \,]0,1[$ *tels que* $s \neq t$, *on a :*

(vii) $\pi_{s,\Gamma} \not\prec \pi_{t,\Gamma}$.

Plus précisément, l'application

$$]0,1[\longrightarrow \widehat{\Gamma}, \quad t \mapsto \pi_{t,\Gamma}$$

est un homéomorphisme sur son image.

La preuve de ce théorème utilise des résultats de Selberg sur la représentation quasi-régulière de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Des résultats analogues sont conjecturés pour tous les sous-groupes de congruence de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$. Si cette «conjecture de Selberg» est vraie, le THÉORÈME 3 et sa preuve valent aussi pour ces sous-groupes.

3. Preuves

Convenons qu'un groupe Γ est *fortement cci* si, pour toute partie finie F de Γ disjointe de $\{1\}$, il existe une suite infinie $(\gamma_j)_{j\geq 1}$ d'éléments de Γ telle que, pour tout $x \in F$, les éléments $\gamma_j^{-1}x\gamma_j$ sont distincts deux à deux. Cette propriété renforce manifestement celle d'être à « classes de conjugaison infinies », qui est classique [MvN, lemme 5.3.4].

Soit G un groupe localement compact. Une représentation π de G est dite de *classe* $(\mathcal{C}_0)$ s'il existe un vecteur unité $\xi \in \mathcal{H}_\pi$ tel que la fonction de type positif $g \mapsto \langle \xi \mid \pi(g)\xi \rangle$ tende vers 0 à l'infini de G.

PROPOSITION 1. — *Soit Γ un groupe fortement cci et soit π une représentation de Γ de classe $(\mathcal{C}_0)$. On a $\lambda_\Gamma \prec \pi$.*

Preuve. — Soit $\delta : \Gamma \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\delta(\gamma) = \langle \xi_1 \mid \lambda_\Gamma(\gamma)\xi_1 \rangle$ où $\xi_1 \in \ell^2(\Gamma)$ est la fonction caractéristique de $\{1\}$; on a donc $\delta(1) = 1$ et $\delta(\gamma) = 0$ si $\gamma \neq 1$. Vu [DC*, prop. 18.1.4], il suffit de vérifier que δ est approchable par des fonctions de type positif associées à π.

Soit F une partie finie de Γ disjointe de $\{1\}$. Soit $(\gamma_j)_{j\geq 1}$ une suite comme dans la définition de « fortement cci ». Par hypothèse sur π, on peut choisir un vecteur unité $\xi_0 \in \mathcal{H}_\pi$ tel que

$$\lim_{j\to\infty} \langle \xi_0 \mid \pi(\gamma_j^{-1}x\gamma_j)\xi_0 \rangle = 0 \quad \text{pour tout } x \in F$$

car $\gamma_j^{-1}x\gamma_j \neq \gamma_k^{-1}x\gamma_k$ si $j \neq k$. Si on définit $\phi_{F,j} : \Gamma \to \mathbb{C}$ par

$$\phi_{F,j}(\gamma) = \langle \pi(\gamma_j)\xi_0 \mid \pi(\gamma)\pi(\gamma_j)\xi_0 \rangle,$$

on a donc bien $\lim_{j\to\infty} \phi_{F,j}(x) = \delta(x)$ pour tout $x \in F \cup \{1\}$. $\square$

PROPOSITION 2. — *Soit G un groupe de Lie réel connexe qui est semi-simple, de centre réduit à $\{1\}$, et sans facteur compact. Soit Γ un sous-groupe discret de G dense pour la topologie de Zariski. Alors Γ est fortement cci.*

Preuve. — Soit F une partie finie de Γ disjointe de $\{1\}$. Il s'agit de montrer qu'il existe une suite infinie $(\gamma_j)_{j\geq 1}$ avec les propriétés requises. On pose $\gamma_1 = 1$ et on procède par récurrence. Supposons qu'il existe une suite $(\gamma_j)_{1\leq j\leq k}$ telle que, pour tout $x \in F$, les éléments $\gamma_j^{-1}x\gamma_j$ sont distincts deux à deux. Pour chaque $j \in \{1, ..., k\}$ et chaque $x \in F$, le fermé de Zariski

$$Z_G(x)\gamma_j = \{y \in G : y^{-1}xy = \gamma_j^{-1}x\gamma_j\}$$

est distinct de G (la notation $Z_G\gamma_j$ indique le translaté par γ_j d'un centralisateur). Comme la réunion d'un nombre fini de fermés de Zariski distincts de G est distincte de G, il suffit de choisir $\gamma_{k+1} \in \Gamma$ tel que

$$\gamma_{k+1} \notin \bigcup_{1\leq j\leq k} \bigcup_{x\in F} Z_G(x)\gamma_j$$

pour avoir les propriétés désirées. $\square$

(Notons que la proposition et sa preuve valent pour un groupe de Lie algébrique réel de centre réduit à $\{1\}$.)

Nous ignorons s'il existe des groupes à classes de conjugaison (autres que $\{1\}$) infinies qui ne sont pas *fortement* cci.

LEMME. — *Soient G un groupe localement compact, H un sous-groupe fermé de G et π une représentation de G.*

(i) *Si $\pi \prec \lambda_G$, alors $\pi_{|H} \prec \lambda_H$.*

(ii) *On suppose de plus que la représentation triviale 1_G de G est faiblement contenue dans la représentation $\mathrm{Ind}_H^G(1_H)$. Si $\pi_{|H} \prec \lambda_H$, alors $\pi \prec \lambda_G$.*

Preuve. — L'assertion (i) résulte de ce que $\pi \prec \lambda_G$ si et seulement si les fonctions de type positif associées à π sont approchables par des fonctions de type positif à supports compacts [DC*, prop. 18.3.5], et de ce que cette dernière condition passe évidemment de π à sa restriction $\pi_{|H}$.

Avant de montrer (ii), rappelons que $\mathrm{Ind}_H^G(\pi_{|H}) = \pi \otimes \mathrm{Ind}_H^G(1_H)$; voir par exemple le théorème 6 au paragraphe VI.11 de [Gaa]. Supposons alors que $\pi_{|H} \prec \lambda_H$. En induisant de H à G, on obtient par «continuité de l'induction» [Fel, th. 4.1] :

$$\pi \otimes \mathrm{Ind}_H^G(1_H) \prec \mathrm{Ind}_H^G(\lambda_H) = \lambda_G .$$

Si $1_G \prec \mathrm{Ind}_H^G(1_H)$, on a donc bien $\pi = \pi \otimes 1_G \prec \lambda_G$. $\square$

REMARQUE. — La condition $1_G \prec \mathrm{Ind}_H^G(1_H)$ de (ii) signifie que G/H est un espace moyennable au sens d'EYMARD [Eym]. Elle est évidemment satisfaite si H est un réseau dans G, auquel cas 1_G est une sous-représentation de $\mathrm{Ind}_H^G(1_H)$.

Preuve du théorème 1. — Notons d'abord que la PROPOSITION 2 s'applique à un réseau de G grâce au théorème de densité de Borel; voir [Bor] ou [Zim, th. 3.2.5]. Rappelons que toute représentation non triviale de G est de classe $(\mathcal{C}_0)$ en vertu du théorème 5.2 de [HoM].

L'assertion (i) résulte donc de ce que la propriété $(\mathcal{C}_0)$ passe évidemment d'une représentation π de G à sa restriction $\pi_{|\Gamma}$, et de la PROPOSITION 1.

Si $\pi = \mathrm{Ind}_B^G(\rho)$ est dans la série principale, on a de plus $\pi_{|\Gamma} \prec \lambda_\Gamma$. En effet, on a d'abord $\rho \prec \lambda_B$ car B est moyennable, puis $\pi \prec \lambda_G = \mathrm{Ind}_B^G(\lambda_B)$ par continuité de l'induction, donc $\pi_{|\Gamma} \prec \lambda_\Gamma$ par le lemme. $\square$

Preuve du théorème 2. — L'assertion $\lambda_\Gamma \prec \pi_{t,\Gamma}$ est contenue dans le THÉORÈME 1. Par ailleurs π_t n'est pas dans le support de la mesure de Plancherel sur $\widehat{G}$ [Lan, § VIII.4], donc $\pi_t \not\prec \lambda_G$ [DC*, n° 18.8.4]. Il résulte de l'assertion (ii) du lemme ci-dessus que $\pi_{t,\Gamma} \not\prec \lambda_\Gamma$, ce qui montre (v).

Soient $s, t \in \,]0,1[$. Posons $\sigma = \mathrm{Ind}_\Gamma^G(1_\Gamma)$. Comme Γ est un réseau dans G, on a $1_G \prec \sigma$ (c'est même vrai au sens fort). Pour toute représentation π de G, on a donc :

$$\pi \otimes 1_G \prec \pi \otimes \sigma = \mathrm{Ind}_\Gamma^G(\pi_{|\Gamma}).$$

Supposons que $\pi_{s,\Gamma} \prec \pi_{t,\Gamma}$. Alors on a :

$$(*) \qquad \pi_s \prec \mathrm{Ind}_\Gamma^G(\pi_{s,\Gamma}) \prec \mathrm{Ind}_\Gamma^G(\pi_{t,\Gamma}) = \pi_t \otimes \sigma.$$

Notons $\widehat{G}_c$ l'adhérence dans $\widehat{G}$ pour la topologie de Fell de la série complémentaire, et décomposons σ en $\sigma = \sigma_1 \oplus \sigma_2$, où $\sigma_1 \prec \lambda_G$ et $\sigma_2 \prec \widehat{G}_c$. Comme

$$\pi_s \not\prec \lambda_G \quad \text{et} \quad \pi_\mathrm{t} \otimes \sigma_1 \prec \pi_\mathrm{t} \otimes \lambda_\mathrm{G} \sim \lambda_\mathrm{G},$$

il résulte de (*) qu'on a :

$$(**) \qquad \pi_s \prec \pi_t \otimes \sigma_2\,.$$

Les produits tensoriels $\pi_t \otimes \pi_{t'}$ ont été calculés par L. PUKANSZKY [Rep], et on sait en particulier que :

- si $t + t' \le 1$, alors $\pi_t \otimes \pi_{t'} \prec \lambda_G$;
- si $t + t' > 1$, alors il existe une représentation τ de G telle que :

$$\tau \prec \lambda_G \quad \text{et} \quad \pi_t \otimes \pi_{t'} = \tau \oplus \pi_{t+t'-1}.$$

Il résulte donc de (**) et de ce que $\pi_t \not\prec \lambda_G$ qu'on a

$$(***) \qquad \pi_s \prec \bigoplus_{t'\,:\,t'>1-t} \pi_{t+t'-1} \subset \bigoplus_{t''\,:\,t''\le t} \pi_{t''}.$$

Ceci implique que $s \leq t$ en vertu de la bicontinuité de l'application $\tau \mapsto \pi_\tau$ (voir les articles [Del] et [EhM] déjà cités avant l'énoncé du THÉORÈME 3). $\square$

La preuve ci-dessus vaut pour tout sous-groupe discret Γ de G ayant les deux propriétés suivantes : Γ est dense dans G au sens de Zariski et l'espace G/Γ est moyennable au sens d'Eymard. Comme exemple d'un tel groupe qui ne soit pas un réseau, on peut donner $\Gamma = \mathrm{Ker}(\Gamma_g \twoheadrightarrow \mathbb{Z}^{2g})$, où Γ_g désigne un réseau dans G isomorphe au groupe fondamental d'une surface close de genre $g \geq 2$, et où $\mathbb{Z}^{2g}$ est identifié au premier groupe d'homologie de cette surface. (Ce groupe Γ est bien Zariski-dense dans G, car la composante connexe de son adhérence de Zariski est un sous-groupe connexe de $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ qui est non moyennable, donc égal à G tout entier. Dans une autre terminologie, Γ est un groupe fuchsien de première espèce qui n'est ni de type fini ni de covolume fini dans G.)

Preuve du théorème 3. — Par continuité de la restriction, l'application $t \mapsto \pi_{t,\Gamma}$ est continue.

Montrons que l'application $\pi_{t,\Gamma} \mapsto t$ est continue. Soit A une partie de $]0,1[$ et soit $s \in]0,1[$ tel que $\pi_{s,\Gamma}$ est dans l'adhérence de $\{\pi_{t,\Gamma} : t \in A\}$, c'est-à-dire tel que :

$$\pi_{s,\Gamma} \prec \bigoplus_{t \in A} \pi_{t,\Gamma} .$$

Alors (voir la preuve du THÉORÈME 2) :

$$\pi_s \prec \bigoplus_{t \in A} \big(\pi_t \otimes \mathrm{Ind}_\Gamma^G(1_\Gamma)\big).$$

Par ailleurs, la décomposition de $L^2(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}))$ sous l'action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est bien connue (voir [Ter, § 3.7, th. 1, p. 254]). La série complémentaire n'apparaissant pas dans cette décomposition, on a

$$\mathrm{Ind}_\Gamma^G(1_\Gamma) \prec 1_G \oplus \lambda_G$$

et par suite :

$$\pi_s \prec \Big(\bigoplus_{t \in A} \pi_t\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{t \in A} (\pi_t \otimes \lambda_G)\Big) \prec \Big(\bigoplus_{t \in A} \pi_t\Big) \oplus \lambda_G .$$

Comme $\pi_s \not\prec \lambda_G$, on a donc :

$$\pi_s \prec \bigoplus_{t \in A} \pi_t .$$

La continuité de $\pi_t \mapsto t$ implique que $s \in \bar{A}$.

Il est clair que l'assertion (vii) du THÉORÈME 3 découle de la bicontinuité de $t \mapsto \pi_{t,\Gamma}$. $\square$

Nous remercions Alain VALETTE pour ses remarques après lecture d'une première version de ce travail.

Ajouté sur épreuves.

1) Comme nous l'a signalé G.A. WILLIS, un groupe n'est jamais réunion d'un nombre fini de classes à gauche relatives à des sous-groupes dont les indices sont tous infinis. (C'est un résultat de B.H. NEUMANN; voir J. London Math. Soc., t. **29**, 1964, p. 236–248.) Il en résulte qu'un groupe cci est nécessairement fortement cci, au sens du numéro 3 ci-dessus.

2) Pour tout groupe Γ comme au THÉORÈME 1, nous savons maintenant que la C^*-algèbre réduite de Γ est simple [BCH].

BIBLIOGRAPHIE

[BCH] BEKKA (M.), COWLING (M.) and DE LA HARPE (P.). — *Some Groups whose Reduced C^*-algebra is Simple*, Prébublication, 1993.

[Bor] BOREL (A.). — *Density Properties for Certain Subgroups of Semi-simple Lie Groups Without Compact Factors*, Ann. of Math., t. **72**, 1960, p. 179–188.

[CoS] COWLING (M.) and STEGER (T.). — *The Irreducibility of Restrictions of Unitary Representations to Lattices*, J. Reine Angew. Math., t. **420**, 1991, p. 85–98.

[Del] DELORME (P.). — *1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles. Produits tensoriels continus de représentations*, Bull. Soc. Math. France, t. **105**, 1977, p. 281–336.

[DC*] DIXMIER (J.). — *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* — Gauthier-Villars, 1969.

[EhM] EHRENPREIS (L.) and MAUTNER (F.I.). — *Some Properties of the Fourier Transform on Semi-simple Lie Groups I*, Ann. of Math., t. **61**, 1955, p. 406–439.

[Eym] EYMARD (P.). — *Moyennes invariantes et représentations unitaires.* — Springer, Lecture Notes in Math. 300, 1972.

[Fel] Fell (J.M.G.). — *Weak Containment and Induced Representations of Groups*, Canad. J. Math., t. **14**, 1962, p. 237–268.

[Gaa] Gaal (S.A.). — *Linear Analysis and Representation Theory.* — Springer, 1973.

[GHJ] Goodman (F.), de la Harpe (P.) and Jones (V.). — *Coxeter Graphs and Towers of Algebras.* — Springer, 1989.

[Har] de la Harpe (P.). — *Operator Algebras, Free Groups and Other Groups*, Colloque d'Orléans, juillet 1992.

[HoM] Howe (R.E.) and Moore (C.C.). — *Asymptotic Properties of Unitary Representations*, J. Funct. Anal., t. **32**, 1979, p. 72–96.

[HoR] Howe (R.E.) and Rosenberg (J.). — *The Unitary Representation Theory of* GL(n) *of an Infinite Discrete Field*, Israel J. Math., t. **67**, 1989, p. 67–8. Voir aussi J. Rosenberg, C. R. Acad. Sc. Paris, t. **309**, 1989, p. 581–586.

[Lan] Lang (S.). — $SL_2(\mathbb{R})$. — Addison-Wesley, 1975.

[MvN] Murray (F.J.) and Von Neumann (J.). — *On Rings of Operators, IV*, Ann. of Math., t. **44**, 1943, p. 716–808.

[Rep] Repka (J.). — *Tensor Products of Unitary Representations of* $SL_2(\mathbb{R})$, Amer. J. Math., t. **100**, 1978, p. 747–774.

[Ter] Terras (A.). — *Harmonic Analysis on Sammetric Spaces and Applications I.* — Springer, 1985.

[Wal] Wallach (N.R.). — *Harmonic Analysis on Homogeneous Spaces.* — M. Dekker, 1973.

[Zim] Zimmer (R.J.). — *Ergodic Theory and Semisimple Groups.* — Birkhäuser, 1984.