

BULLETIN DE LA S. M. F.

N. SONINE

Note sur une formule de Gauss

Bulletin de la S. M. F., tome 9 (1881), p. 162-166

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__162_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1881__9__162_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Note sur une formule de Gauss; par M. N. SONINE.

(Séance du 15 juillet 1881.)

La propriété fondamentale et la plus simple de la fonction $\Gamma(x)$, définie pour des valeurs à partie réelle positive de la variable x par l'intégrale

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt,$$

consiste dans l'équation aux différences finies

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

On en tire aisément le théorème célèbre de Gauss.

En effet, en désignant par n un nombre entier positif, on aura

$$\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{x}{n} + 1\right) = \frac{x}{n} \Gamma\left(\frac{x}{n}\right),$$

et, si l'on élimine x entre ces deux équations, on obtient

$$(1) \quad \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} = n \frac{\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)}.$$

Mais le rapport de l'expression $\frac{F(x+n)}{F(x)}$ se réduit aisément au produit des rapports dans lesquels les valeurs de la variable ne diffèrent que de l'unité, à savoir

$$\frac{F(x+n)}{F(x)} = \frac{F(x+n)}{F(x+n-1)} \frac{F(x+n-1)}{F(x+n-2)} \dots \frac{F(x+2)}{F(x+1)} \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Cette transformation, appliquée au second membre de l'équa-

tion (1), conduit au résultat suivant

$$\frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} \\ = n \frac{\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+2}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n}{n}\right)}{\Gamma(x+1)},$$

ou, en posant

$$(2) \quad \frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} = \varphi_n(x), \\ \varphi_n(x) = n \varphi_n(x+1).$$

Cette dernière équation admet pour solution particulière $\varphi_n(x) = A^x$ ou $A = \frac{1}{n}$, et la solution générale sera

$$\varphi_n(x) = n^{-x} \theta_n(x),$$

$\theta_n(x)$ étant une fonction périodique telle que $\theta_n(x) = \theta_n(x+1)$.
D'après cela, l'équation (2) devient

$$(3) \quad \theta_n(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{\Gamma(x)} n^x.$$

Remplaçons-y n par le produit mn de deux nombres entiers, ce qui fournit

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_{mn}(x) \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+m-1}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+m}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{\Gamma(x)} n^x n^x, \end{array} \right.$$

et composons le produit

$$\theta_n\left(\frac{x}{m}\right)\theta_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots\theta_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right) \\ = \frac{\Gamma\left(\frac{x}{mn}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+m}{mn}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{\Gamma\left(\frac{x}{m}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+m-1}{m}\right)} n^{x+\frac{m-1}{2}},$$

dans lequel le numérateur du second membre est égal à

$$0_{mn}(x)\Gamma(x)m^{-x}n^{-x},$$

en vertu de l'équation (4), tandis que le dénominateur s'exprime par

$$0_m(x)\Gamma(x)m^{-x},$$

en vertu de l'équation (3). En substituant ces valeurs, on aura

$$0_m(x)0_n\left(\frac{x}{m}\right)0_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots 0_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)=0_{mn}(x)n^{\frac{m-1}{2}},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{0_m(x)}{\sqrt{m}} \frac{0_n\left(\frac{x}{m}\right)}{\sqrt{n}} \frac{0_n\left(\frac{x+1}{m}\right)}{\sqrt{n}} \dots \frac{0_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}{\sqrt{n}} = \frac{0_{mn}(x)}{\sqrt{mn}},$$

et si l'on désigne $\frac{0_n(x)}{\sqrt{n}}$ par $\sigma_n(x)$, on trouve définitivement

$$(5) \quad \sigma_m(x) = \frac{\sigma_{mn}(x)}{\sigma_n\left(\frac{x}{m}\right)\sigma_n\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots\sigma_n\left(\frac{x+m-1}{m}\right)},$$

où naturellement $\sigma_n(x) = \sigma_n(x+1)$. Pour $n = \infty$, la fonction $\sigma_n(x)$ ne pourra dépendre que de x , et, en posant $\lim \sigma_n(x) = \frac{1}{f(x)}$, l'équation (5) fournira, pour $n = \infty$,

$$(6) \quad \sigma_m(x) = \frac{f\left(\frac{x}{m}\right)f\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots f\left(\frac{x+m-1}{m}\right)}{f(x)},$$

où $f(x) = f(x+1)$. On s'assure aisément que cette expression de $\sigma_m(x)$ satisfait identiquement à l'équation (5), pour chaque valeur de m et de n . C'est donc l'expression la plus générale de la fonction $\sigma_m(x)$.

D'après cela, l'équation (3) pourra prendre la forme

$$\begin{aligned} & \Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) \\ &= n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x)\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)}. \end{aligned}$$

Mais le premier membre ne devient assurément infini pour aucune valeur de x , à partie réelle positive et finie; quant au second membre, le facteur $n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x)$ possède la même propriété; donc, ou le second facteur

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)},$$

qui est une fonction périodique, ne doit pas non plus devenir infini; et par conséquent ne sera qu'une constante a_n , indépendante de x ; ou les infinis de ce facteur doivent coïncider *tous* avec les zéros de $\Gamma(x)$, de sorte que le produit de ce facteur par $\Gamma(x)$ reste toujours fini : mais alors les infinis dont il s'agit, et la manière dont se comporte la fonction périodique dans ces infinis, seraient indépendants de n ; ce qui est évidemment inadmissible. On doit donc admettre définitivement

$$\frac{f\left(\frac{x}{n}\right)f\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots f\left(\frac{x+n-1}{n}\right)}{f(x)} = a_n.$$

On tire de là, en remplaçant x successivement par $\frac{x}{m}, \frac{x+1}{m}, \dots, \frac{x+m-1}{m}$ et faisant la multiplication des résultats,

$$\frac{f\left(\frac{x}{mn}\right)f\left(\frac{x+1}{mn}\right)\dots f\left(\frac{x+mn-1}{mn}\right)}{f\left(\frac{x}{m}\right)f\left(\frac{x+1}{m}\right)\dots f\left(\frac{x+m-1}{m}\right)} = a_n^m,$$

où le premier membre est évidemment égal à $\frac{a_{mn}}{a_m}$. Donc, en échangeant entre elles les lettres m, n , on trouve

$$a_{mn} = a_m a_n^m = a_n a_m^n,$$

et on en conclut aisément

$$n^{-1}\sqrt[n]{a_n} = m^{-1}\sqrt[m]{a_m} = \text{constante absolue } a,$$

c'est-à-dire $a_n = a^{n-1}$. La formule (1), devenue maintenant

$$\Gamma\left(\frac{x}{n}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{n}\right)\dots\Gamma\left(\frac{x+n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-x}\Gamma(x)a^{n-1},$$

permet de déterminer a par les valeurs $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$: il suffit d'admettre $x = 1$, $n = 2$, et on trouve

$$a = \sqrt{2\pi}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

A notre connaissance, on n'a pas encore cherché le terme complémentaire dans le produit qui représente $\Gamma(x)$. En nous bornant au cas de la variable réelle, nous avons trouvé, au moyen d'une méthode générale, le résultat suivant

$$\Gamma(x+1) = \frac{1 \cdot 2 \dots n}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} (n+1)^x \\ \times \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{x+n}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{x+cn}} \left[\frac{1 + \frac{x}{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^x} \right]^\theta.$$

où $0 < \theta < 1$.