BULLETIN DE LA S. M. F.

BERNARD BALLET

Genre de courbes lisses tracées sur certaines surfaces rationnelles de $\mathbb{P}^3$

Bulletin de la S. M. F., tome 121, n° 3 (1993), p. 383-402
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_3_383_0>

Bull. Soc. math. France,
121, 1993, p. 383–402.

GENRE DE COURBES LISSES TRACÉES SUR CERTAINES SURFACES RATIONNELLES DE $\mathbb{P}^3$

PAR

BERNARD BALLET (*)

RÉSUMÉ. — En liaison avec une conjecture de Halphen, on donne dans cet article un intervalle effectif pour le genre d'une courbe lisse de degré donné et tracée sur certaines surfaces rationnelles de $\mathbb{P}^3$ de degré également donné. La construction de ces surfaces généralise la construction effectuée par L. Gruson et C. Peskine en degré 4.

ABSTRACT. — In connection with an Halphen's conjecture, we give in this paper an effective intervall for the genus of a smooth curve of given degree on certain rationnal surfaces in $\mathbb{P}^3$ of given degree as well. The construction of these surfaces generalizes the L. Gruson and C. Peskine's construction of surfaces of degree 4.

Ce travail apporte une contribution à une conjecture d'Halphen, citée dans [1] :

CONJECTURE DES LACUNES. — *Pour tout triplet d'entiers* (d,g,s) *tels que* $s \geq 3$; $d > s(s-1)$ *et* $g \leq G(d,s) - \frac{1}{2}(s-1)(s-2)$ *avec*

$$G(d,s) = 1 + \frac{1}{2s}\{d^2 + ds(s-4) - r(s-r)(s-1)\}$$

où $d + r \equiv 0 \bmod s$ *et* $0 \leq r < s$, *il existe une courbe lisse et irréductible de* $\mathbb{P}^3$ (*espace projectif sur un corps algébriquement clos de caractéristique nulle*) *de degré* d, *de genre* g, *non tracée sur une surface de degré* $< s$.

Le but de cet article est de montrer qu'il existe des intervalles $[m(d,s), M(d,s)]$ avec $M(d,s) \sim G(d,s)$ pour les grandes valeurs de d et $m(d,s) = 0(d)$ qui sont effectifs pour les genres de courbes tracées sur une surface de degré s.

(*) Texte reçu le 29 janvier 1992.
B. BALLET, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences de Saint-Jérôme, Avenue Escadrille Normandie-Niemen, 13397 Marseille Cedex 13.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1993/383/$ 5.00

THÉORÈME. — *Soient deux entiers s et d tels que $s \geq 5$ et $d \geq 6(s-3)$. Alors pour tout entier g vérifiant*

$$1+(s-4)\Big(\frac{d+\rho}{s-3}-3\Big) \leq g \leq \frac{1}{2s}\big\{d^2+d(s-6)-\mathrm{O}(s^2)\big\}$$

avec $d+\rho \equiv 0 \bmod (s-3)$ et $0 \leq \rho \leq s-4$, il existe une courbe lisse et irréductible tracée sur une surface rationnelle de degré s de $\mathbb{P}^3$ et ayant le degré d et le genre g.

On construit dans le premier paragraphe une surface rationnelle de degré s dans $\mathbb{P}^3$, qui généralise la construction faite en degré 4 par L. GRUSON et C. PESKINE dans [2]. On donne dans le deuxième paragraphe des conditions suffisantes pour qu'une courbe tracée sur cette surface soit régulière et irréductible. Dans le troisième paragraphe, on met en évidence, sur la surface, des courbes lisses de degré donné d et dont le genre est en $\mathrm{O}(d)$. Dans le dernier paragraphe, par la même méthode que celle employée dans [2], on construit à partir de ces courbes toutes celles dont le genre appartient à l'intervalle mentionné dans le théorème.

J'ignore si les courbes obtenues peuvent être tracées sur une surface de degré $< s$. Lorsque d est en $\mathrm{O}(s^2)$, des travaux récents [3], [4], [5], [6], [7] ont permis de déterminer le maximum du genre pour une courbe lisse de degré d, non tracée sur une surface de degré $(s-1)$.

Par ailleurs, C. WALTER a obtenu indépendamment un autre intervalle effectif pour le genre en construisant des courbes régulières sur des surfaces de degré s ayant une droite $(s-3)$-uple.

Je tiens à remercier A. HIRSCHOWITZ dont les encouragements et les critiques constructives aux premières ébauches de ce travail m'ont beaucoup aidé. Je remercie également A. DOLCETTI qui avait décelé une erreur dans une version antérieure.

1. Construction d'une surface rationnelle de degré donné dans $\mathbb{P}^3$

Pour tout entier $s \geq 5$, on considère dans le plan projectif $\mathbb{P}^2$ un ensemble de $3s-3$ points disposés de la façon suivante :

$$(\mathrm{G}_1)\quad \begin{cases}\text{$2s+1$ d'entre eux, soient $P, P_1, \dots, P_{2s}$ sont en position générale}\\ \text{au sens de [2] sur une cubique lisse et irréductible Γ, c'est-à-}\\ \text{dire que sur Γ, le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)\otimes\mathcal{O}_\Gamma$, et les classes}\\ \text{des diviseurs $P, P_1, \dots, P_{2s}$ sont $\mathbb{Z}$-linéairement indépendantes,}\\ \text{ce qui entraîne en particulier qu'aucune courbe irréductible du}\\ \text{plan distincte de Γ coupe Γ en un schéma supporté par les points}\\ \text{$P, P_1, \dots, P_{2s}$.}\end{cases}$$

$$(\mathrm{G}_2)\quad \begin{cases}\text{Les $(s-4)$ autres points, soient $P'_1, \dots, P'_{s-4}$ sont en position}\\ \text{générale dans le plan : aucun d'entre eux n'est sur Γ, trois quel-}\\ \text{conques des $3s-3$ points ne sont pas alignés et les droites PP'_i}\\ \text{(pour $1\le i\le s-4$) coupent Γ transversalement.}\end{cases}$$

Soient maintenant Σ la surface obtenue en faisant éclater tous ces points, $\pi : \Sigma \longrightarrow \mathbb{P}^2$ le morphisme d'éclatement. Si E, $(E_i)_{1\le i\le 2s}$ et $(E'_i)_{1\le i\le s-4}$ sont les diviseurs exceptionnels de Σ, on note $e, (e_i)_{1\le i\le 2s}$ et $(e'_i)_{1\le i\le s-4}$ leurs classes; de plus on pose $\ell = \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$. D'autre part, on désigne par $\widetilde{X}$ la transformée propre d'une courbe X du plan. En particulier $\widetilde{\Gamma} \in \left|3\ell - e - \sum_{i=1}^{2s} e_i\right|$; enfin on note $(\,\cdot\,)$ la forme intersection sur Σ.

PROPOSITION 1.1. — *On considère sur Σ la classe de diviseurs*

$$D = s\ell - (s-2)e - \sum_{i=1}^{2s} e_i - \sum_{i=1}^{s-4} e'_i\ .$$

Alors $h^0(\mathcal{L}(D)) = 4$ et $h^1(\mathcal{L}(D)) = 0$.

Démonstration. — Écrivons la suite exacte de $\mathcal{O}_\Sigma$-modules :

$$(1)\qquad 0 \to \mathcal{L}(D-\widetilde{\Gamma}) \longrightarrow \mathcal{L}(D) \longrightarrow \mathcal{L}(D)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}} \to 0.$$

Alors $\mathcal{L}(D)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}$ correspond à un diviseur de degré

$$D\cdot\widetilde{\Gamma} = 3s - (s-2) - 2s = 2$$

et donc $h^0(\mathcal{L}(D)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}) = 2$ et $h^1(\mathcal{L}(D)\otimes\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}) = 0$. D'autre part,

$$D - \widetilde{\Gamma} = (s-3)(\ell - e) - \sum_{i=1}^{s-4} e'_i = \ell - e + \sum_{i=1}^{s-4}(\ell - e - e'_i).$$

Les courbes du système linéaire $|D-\widetilde{\Gamma}|$ consistent donc en la réunion des $(s-4)$ droites $\widetilde{PP'_i}$ et d'une courbe du système $|\ell - e|$ qui est soit la transformée propre d'une droite générale passant par P, soit la réunion d'une droite $\widetilde{PP_i}$ (resp. $\widetilde{PP'_i}$) et d'une droite exceptionnelle E_i (resp. E'_i). Comme $h^0(\mathcal{L}(\ell-e)) = 2$ et $h^1(\mathcal{L}(\ell-e)) = 0$, il en résulte, après tensorisations successives par les présentations des faisceaux structuraux des droites $\widetilde{PP'_i}$ que $h^0(\mathcal{L}(D - \widetilde{\Gamma})) = 2$ et $h^1(\mathcal{L}(D - \widetilde{\Gamma})) = 0$. On déduit alors de la suite exacte (1) que $h^0(\mathcal{L}(D)) = 4$ et $h^1(\mathcal{L}(D)) = 0$.

On va montrer maintenant que le système linéaire $|D|$ est sans point de base, ce qui permettra de définir un morphisme $\alpha : \Sigma \to \mathbb{P}^3$; de plus, on précisera les singularités de la surface image.

PROPOSITION 1.2. — *On considère sur Σ la courbe décomposée*

$$T = \widetilde{\Gamma} \cup \bigcup_{i=1}^{s-4} \widetilde{PP'_1}.$$

Alors le système linéaire $|D|$ sépare un point $A \notin T$ d'un point quelconque $B \neq A$.

Nous noterons dans toute la suite $D(A, B, \ldots)$ le système linéaire des courbes du système $|D|$ passant par les points $A, B, \ldots$ D'autre part une courbe de $|D|$ sera dite T-décomposée si elle est de la forme $T \cup X$ avec $X \in |\ell - e|$. Remarquons qu'une courbe de $|D|$ est T-décomposée dès qu'elle est $\widetilde{\Gamma}$-décomposée. Établissons deux lemmes dont le premier est un cas particulier de la proposition :

LEMME 1.2.1. — *Si $A \notin T$ et si $B \notin T \cup L(A)$ où $L(A)$ désigne l'unique courbe du système $|\ell - e|$ qui passe par A, alors le système $|D|$ sépare les points A et B.*

Démonstration. — Comme $h^0(\mathcal{L}(D)) = 4$, il suffit de montrer qu'on peut trouver deux points Q_1 et Q_2 tels que $D(A, B, Q_1, Q_2) = \emptyset$. Mettons en effet Q_1 et Q_2 sur la droite $\widetilde{PP'_1}$. Comme $D \cdot (\ell - e - e'_1) = 1$, les courbes du système $D(A, Q_1, Q_2)$ se décomposent en $C \cup \widetilde{PP'_1}$ où :

$$C \in \Big|(s-1)\ell - (s-3)e - \sum_{i=1}^{2s} e_i - \sum_{i \geq 2} e'_i\Big|.$$

Comme $C \cdot \widetilde{\Gamma} = 0$, l'hypothèse ($G_1$) implique que C se décompose à son tour en $\widetilde{\Gamma} \cup \big(\bigcup_{i \geq 2} \widetilde{PP'_i}\big) \cup L$ (puisque $(D - \widetilde{\Gamma}) \cdot (\ell - e - e'_i) = -1$ pour tout i) où $L \in |\ell - e|$ et finalement les courbes du système $D(A, Q_1, Q_2)$ sont toutes T-décomposées. Maintenant comme $A \notin T$, $A \in L$ et $T \cup L(A)$ est l'unique courbe de $D(A, Q_1, Q_2)$; enfin comme $B \notin T \cup L(A)$ par hypothèse, il en résulte bien que $D(A, B, Q_1, Q_2) = \emptyset$.

Remarque. — Je dois à A. Hirschowitz de m'avoir indiqué ce type de raisonnement dans le cas $s = 4$.

Lemme 1.2.2. — *Soit B un point de T. Alors on peut toujours trouver un point Q_1 tel que toutes les courbes de $D(B, Q_1)$ soient T-décomposées.*

Démonstration. — Comme $T = \widetilde{\Gamma} \cup \big(\bigcup_{i=1}^{s-4} \widetilde{PP}'_i\big)$, distinguons deux cas :

1) B appartient à l'une des droites $\widetilde{PP}'_i$, soit $\widetilde{PP}'_{i_0}$. Il suffit de mettre Q_1 sur cette droite distinct de B. Comme $D \cdot (\ell - e - e'_{i_0}) = 1$, les courbes de $D(B, Q_1)$ sont bien T-décomposées en utilisant le même argument que dans le lemme précédent.

2) $B \in \widetilde{\Gamma}$. Il y a encore deux cas :

a) B n'appartient à aucune droite exceptionnelle et s'identifie donc à un point de $\mathbb{P}^2$. Si la droite PB ne passe par aucun des points P_i où $1 \le i \le 2s$, on prend pour Q_1 le troisième point d'intersection de la droite PB avec Γ. Les courbes de $D(B, Q_1)$ ont alors avec $\widetilde{\Gamma}$ la même intersection que la transformée propre de la droite PB et l'hypothèse (G_1) implique encore que ces courbes sont T-décomposées. Si maintenant la droite PB passe par l'un des points P_i soit P_{i_0} les courbes de $D(B)$ non T-décomposées se décomposent selon $\widetilde{PP}_{i_0} \cup C$ où

$$C \in \Big|(s-1)\ell - (s-3)e - \sum_{j \ne i_0} e_j - \sum_{i=1}^{s-4} e'_i\Big|,$$

toujours d'après (G_1). Comme $C \cdot E_{i_0} = 0$, il suffit de mettre Q_1 sur E_{i_0} en dehors de $\widetilde{PP}_{i_0}$ pour que les courbes de $D(B, Q_1)$ soient T-décomposées.

b) B appartient à une droite exceptionnelle. Comme $\widetilde{\Gamma} \cdot E'_i = 0$, pour tout $1 \le i \le s-4$, cette droite exceptionnelle ne peut être que E (resp. l'une des droites $(E_i)_{1 \le i \le 2s}$ soit E_{i_1}). Il suffit alors de prendre pour Q_1 le tangentiel de P sur Γ (resp. le tangentiel de P_{i_1}). Les courbes de $D(B, Q_1)$ ont alors avec $\widetilde{\Gamma}$ la même intersection que la transformée propre de la tangente PQ_1(respectivement $P_{i_1}Q_1$), on en conclut par (G_1) que ces courbes sont T-décomposées.

Démontrons maintenant la Proposition 1.2 : il résulte du Lemme 1.2.1 qu'on peut se borner au cas où $B \in T \cup L(A)$ et de montrer qu'on peut disposer deux points Q_1 et Q_2 de façon que $D(A, B, Q_1, Q_2) = \emptyset$. Si $B \in T$, on commence par choisir grâce au Lemme 1.2.2. un point Q_1 de façon que les courbes de $D(B, Q_1)$ soient T- décomposées. Comme $A \notin T$, $T \cup L(A)$ est l'unique courbe de $D(A, B, Q_1)$, il suffit donc de choisir Q_2 en dehors de cette courbe. Si maintenant $B \in L(A)$, on montre, en distinguant le cas "$L(A)$ irréductible" du cas "$L(A)$ décomposée" qu'on peut toujours mettre un point Q_1 sur $L(A)$ de façon que les courbes de $D(A, B, Q_1)$ soient toutes T-décomposées et on est ramené à la situation précédente.

COROLLAIRE. — *Le système linéaire $|D|$ est sans point de base.*

Nous allons maintenant déterminer les points de Σ en lesquels le système $|D|$ sépare les vecteurs tangents.

Remarquons d'abord que sur $\widetilde{\Gamma}$ le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}(D)$ est de degré 2, il définit donc un morphisme $\widetilde{\Gamma} \to \mathbb{P}_1$ avec quatre points de ramification R_1, R_2, R_3, R_4. Ces points sont les points de $\widetilde{\Gamma}$ en lesquels toutes les courbes du système $|D|$ qui y passent sont tangentes à $\widetilde{\Gamma}$: les vecteurs tangents ne sont donc pas séparés en ces points.

Considérons d'autre part, les $(2s-8)$ points d'intersection (U_ℓ) de Γ avec l'ensemble des droites $(PP_i')_{1 \leq i \leq s-4}$. En un tel point (U_ℓ), on peut constituer une base du système $D(U_\ell)$ avec trois courbes dont deux d'entre elles sont T-décomposées et singulières au point U_ℓ : les vecteurs tangents ne sont donc pas non plus séparés en ce point par le système $|D|$.

PROPOSITION 1.3. — *Le système $|D|$ sépare les vecteurs tangents en tout point M distinct des points $(R_i)_{1 \leq i \leq 4}$ et $(U_\ell)_{1 \leq \ell \leq 2s-8}$.*

Démonstration. — Il y a deux cas à distinguer :

1) $M \in T$.

a) $M \in \widetilde{\Gamma}$. Notons Δ la droite générale de $\mathbb{P}^2$ passant par P et considérons la courbe T-décomposée $T \cup \widetilde{\Delta}$ de $D(M)$. Comme M est distinct des points $(U_\ell)_{1 \leq \ell \leq 2s-8}$, M n'appartient à aucune droite PP_i' et c'est donc un point régulier de $T \cup \widetilde{\Delta}$ et la tangente en M à $T \cup \widetilde{\Delta}$ est confondue avec la tangente en M à $\widetilde{\Gamma}$. Puisque $M \neq R_1, R_2, R_3, R_4$, il existe des courbes C de $D(M)$ non T-décomposées recoupant $\widetilde{\Gamma}$ en un point distinct de M. La tangente en M à C est alors distincte de la tangente en M à $\widetilde{\Gamma}$.

b) $M \in \widetilde{PP'_{i_0}}$ pour un certain $1 \leq i_0 \leq s-4$. Considérons la courbe T-décomposée $T \cup \widetilde{\Delta}$ de $D(M)$ comme en 1a). Comme $M \notin \widetilde{\Gamma}$, M est encore régulier sur $T \cup \widetilde{\Delta}$ et sa tangente est cette fois la droite $\widetilde{PP'_{i_0}}$. Si le système $|D|$ ne séparait pas les vecteurs tangents en M, les courbes de $D(M)$ auraient avec $\widetilde{PP'_{i_0}}$ une multiplicité d'intersection au moins égale à 2 et comme $D \cdot \widetilde{PP'_{i_0}} = 1$, ces courbes seraient toutes T-décomposées, le système $D(M)$ serait de dimension 1 ce qui est impossible $(\dim D(M) = 2)$.

2) $M \notin T$. Alors la courbe $T \cup L(M)$ appartient au système $D(M)$ où $L(M)$ désigne l'unique courbe du système $|\ell - e|$ passant par M, de plus les espaces tangents en M à L(M) et à $T \cup L(M)$ respectivement sont les mêmes. Si le système $|D|$ ne séparait pas les vecteurs tangents en M, il en résulterait que les courbes de $D(M)$ auraient avec $L(M)$ une multiplicité d'intersection au moins égale à 2. Considérons alors un point N distinct de M sur $L(M)$. D'après la PROPOSITION 1.2, le système $|D|$ sépare M et N, donc $\dim D(M,N) = 1$ mais ceci est impossible lorsque M est un point régulier sur $L(M)$. En effet, dans ce cas, on montre qu'on peut toujours disposer un point N sur $L(M)$ de telle façon que les courbes de $D(M,N)$ aient avec $L(M)$ une multiplicité d'intersection au moins égale à 3 et soient donc toutes T-décomposées de façon nécessairement unique sous la forme $T \cup L(M)$.

Reste le cas où M est singulier sur $L(M)$, c'est-à-dire lorsque $L(M)$ est décomposée sous la forme $\widetilde{PP}_i \cup E_i$ pour un certain $1 \leq i \leq 2s$ et que M est l'unique point d'intersection de $\widetilde{PP}_i$ avec E_i. Dans ce cas, montrons directement que $|D|$ sépare les vecteurs tangents en M. D'abord on voit facilement, en utilisant une présentation de $\mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}$ que $h^0(\mathcal{L}(D - e_i)) = h^0(\mathcal{L}(D - (\ell - e - e_i))) = 2$. Il en résulte qu'il existe une courbe C_1 (resp. C_2) du système $|D - e_i|$ (resp. $|D - (\ell - e - e_i)|$) qui ne contient pas la droite $\widetilde{PP}_i$ (resp. E_i) comme composante irréductible, sans quoi toutes les courbes du système $|D - e_i|$ (resp. $|D - (\ell - e - e_i)|$) se réduiraient à une seule à savoir la réunion $T \cup \widetilde{PP}_i$ (resp. $T \cup E_i$) ; d'où il résulte que $C_1 \cap \widetilde{PP}_i = C_2 \cap E_i = \emptyset$ et donc $M \notin C_1 \cup C_2$. Alors M est régulier sur les deux courbes $E_i \cup C_1$ et $\widetilde{PP}_i \cup C_2$ du système $|D|$ et ces deux courbes séparent les vecteurs tangents en M.

PROPOSITION 1.4. — *Le système linéaire $|D|$ définit un morphisme $\alpha : \Sigma \to \mathbb{P}^3$ dont l'image est une surface S de degré s. Les images de $\widetilde{\Gamma}$ et des droites $(\widetilde{PP}'_i)_{1 \leq i \leq s-4}$ sont confondues en une droite $(s-2)$-uple Λ de S et α est un isomorphisme de $\Sigma - T$ sur $S - \Lambda$.*

L'existence du morphisme α et le fait que sa restriction à $\Sigma - T$ soit un isomorphisme résultent immédiatement de la PROPOSITION 1.2, du COROLLAIRE et de la PROPOSITION 1.3. Comme une courbe de $|D|$ non T-décomposée coupe $\widetilde{\Gamma}$ en deux points (en général) et chaque droite $\widetilde{PP}'_i$ en un point, cela donne $(s-2)$ points de T ayant la même image par α. La surface S est bien de degré s puisque $D^2 = s^2 - (s-2)^2 - 2s - (s-4) = s$.

2. Conditions suffisantes pour qu'une courbe régulière de la surface Σ ait une image isomorphe sur la surface S

DÉFINITION 2.1. — Soient A et B deux points de la courbe T, distincts ou non. On dira que ces points sont *conjugués* lorsqu'une des deux conditions suivantes sera vérifiée :

1) A et B sont tous les deux confondus avec l'un des points $(R_i)_{1\le i\le 4}$ ou $(U_\ell)_{1\le \ell\le 2s-8}$ (notations de 1.3).

2) $A \neq B$ et le système $|D|$ ne sépare pas les points A et B.

Il résulte alors de l'étude faite au § 1 qu'une courbe régulière de Σ aura une image isomorphe sur S dès qu'elle ne contiendra aucun couple de points conjugués. Nous allons donner des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi :

PROPOSITION 2.2. — *Soit X une classe de diviseurs sur Σ, distincte de D. On fait les hypothèses suivantes :*

1) $h^1(\mathcal{L}(X - \widetilde{\Gamma})) = 0$ *et* $h^1\mathcal{L}(X - (\ell - e - e_i'))) = 0$ *pour tout indice* $1 \le i \le s-4$.

2 a) *Pour* $1 \le i \le s-4$, $X \cdot (\ell - e) \ge X \cdot e_i' \ge 0$.

b) *S'il existe un indice* $1 \le i \le s-4$ *tel que* $X \cdot e_i' = 0$, *alors le système linéaire* $|X - (\ell - e)|$ *est sans point de base, et* $h^1(\mathcal{L}(X - (\ell - e)) = 0$.

c) *Si* $X.e_i' > 0$, *le système linéaire* $|X - (\ell - e - e_i')|$ *est sans point de base.*

Alors la courbe générale du système linéaire $|X|$ est lisse, irréductible et isomorphe à son image sur la surface S.

Démonstration. — Montrons d'abord que la courbe générale de $|X|$ est lisse et irréductible. Pour la lissité, il suffit, d'après le théorème de Bertini [8, p. 274] de montrer que $|X|$ est sans point de base. Choisissons une droite $\widetilde{PP'_i}$. D'après 2a), $X \cdot e_i' \ge 0$; supposons par exemple que $X \cdot e_i' > 0$. Écrivons la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{L}\big(X - (\ell - e - e_i')\big) \longrightarrow \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{L}(X) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{PP'_i}} \to 0.$$

Le faisceau inversible $\mathcal{L}(X) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{PP'_i}}$ est de degré $X \cdot (\ell - e - e_i')$ donc positif d'après 2a) ; il est donc sans point de base sur la droite $\widetilde{PP'_i}$. Comme $|X-(\ell-e-e_i')|$ est sans point de base d'après 2c), la suite exacte ci-dessus montre qu'il en est de même de $|X|$, puisque $h^1(\mathcal{L}(X - (\ell - e - e_i')) = 0$ d'après 1).

Si $X \cdot e'_i = 0$, on fait un raisonnement analogue en utilisant une présentation du faisceau structural d'une droite passant par P et la condition 2b).

Pour l'irréductibilité, il suffit de montrer que $h^1(\mathcal{L}(X+K)) = 0$, K désignant le diviseur canonique sur Σ (car alors $h^1(\mathcal{L}(-X)) = 0$). Or,

$$X + K = X - \widetilde{\Gamma} + \sum_{i=1}^{s-4} e'_i.$$

Pour tout $1 \leq j \leq s-4$, on peut écrire la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{L}\Big(X - \widetilde{\Gamma} + \sum_{i<j} e'_i\Big) \longrightarrow \mathcal{L}\Big(X - \widetilde{\Gamma} + \sum_{i\leq j} e'_i\Big) \\ \longrightarrow \mathcal{L}\Big(X - \widetilde{\Gamma} + \sum_{i\leq j} e'_i\Big) \otimes \mathcal{O}_{E'_j} \to 0.$$

Or, le faisceau inversible $\mathcal{L}(X - \widetilde{\Gamma} + \sum_{i\leq j} e'_i) \otimes \mathcal{O}_{E'_j}$ est de degré $X \cdot e'_j - 1$ qui est ≥ -1 par 2a) ; il est donc non spécial et l'application naturelle

$$h^1\Big(\mathcal{L}\Big(X - \widetilde{\Gamma} + \sum_{i<j} e'_i\Big)\Big) \longrightarrow h^1\Big(\mathcal{L}\Big(X - \widetilde{\Gamma} + \sum_{i\leq j} e'_i\Big)\Big)$$

est surjective. On termine par récurrence, en remarquant que pour $j = 1$, $h^1(\mathcal{L}(X - \widetilde{\Gamma})) = 0$ d'après la condition 1) de la proposition.

Montrons maintenant que la courbe générale du système $|X|$ ne contient aucun couple de points conjugués. Définissons dans l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0(\mathcal{L}(X)))$ les trois familles finies d'ensembles ouverts suivants :

1) Ω_0 : ensemble des courbes $|X|$ dont l'intersection avec $\widetilde{\Gamma}$ ne contient aucun couple de points conjugués.

2) Ω_0^k pour $1 \leq k \leq s-4$, ensemble des courbes $\mathcal{U}$ du système $|X|$ telles que l'ensemble produit $(\mathcal{U} \cap \widetilde{\Gamma}) \times (\mathcal{U} \cap \widetilde{PP'_k})$ ne contienne aucun couple de points conjugués.

3) $\Omega_k^{k'}$ pour $1 \leq k \neq k' \leq s-4$, ensemble des courbes $\mathcal{V}$ du système $|X|$ telles que l'ensemble produit $(\mathcal{V} \cap \widetilde{PP'_k}) \times (\mathcal{V} \cap \widetilde{PP'_{k'}})$ ne contienne aucun couple de points conjugués.

Il suffit de montrer que tous ces ouverts sont non vides : leur intersection sera alors non vide et constituée de courbes ne contenant aucun couple de points conjugués.

1) $\Omega_0 \neq \emptyset$: la suite exacte

$$0 \to \mathcal{L}(X - \widetilde{\Gamma}) \longrightarrow \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathcal{L}(X) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}} \to 0$$

et la condition 1) de la proposition impliquent que l'application naturelle $H^0(\mathcal{L}(X)) \to H^0(\mathcal{L}(X) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}})$ est surjective. Alors si $X \cdot \widetilde{\Gamma} > D \cdot \widetilde{\Gamma} = 2$, la section générale de $\mathcal{L}(X) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}$ ne se décompose pas en produit d'une section de $\mathcal{L}(D) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}$ et d'une section de $\mathcal{L}(X - D) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}$; une telle section est donc l'image d'une section de $\mathcal{L}(X)$ ayant la propriété voulue. Si $X \cdot \widetilde{\Gamma} = 0$, il n'y a rien à démontrer. Si $X \cdot \widetilde{\Gamma} = 1$, comme on vient de voir que $|X|$ est sans point de base, il suffit de remarquer que la courbe générale de $|X|$ ne passe par aucun des points $(R_i)_{1 \leq i \leq 4}$ et $(U_\ell)_{1 \leq \ell \leq 2s-8}$. Enfin si $X \cdot \widetilde{\Gamma} = 2$, l'hypothèse initiale $X \neq D$ et la condition de position générale (G_1) impliquent que le couple de points de l'intersection de la courbe générale de $|X|$ avec $\widetilde{\Gamma}$ n'est pas un couple conjugué et ne contient aucun point $(R_i)_{1 \leq i \leq 4}$ ou $(U_\ell)_{1 \leq \ell \leq 2s-8}$.

2) $\Omega_0^k \neq \emptyset$. Posons $X \cdot (\ell - e - e'_k) = n$. C'est un entier positif d'après la condition 2a) de la proposition. S'il est nul, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $n \geq 1$. Mettons n points distincts $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sur la droite PP'_k et distincts des deux points d'intersection de PP'_k avec Γ. Chacun de ces points A_i a deux conjugués (B_i, C_i) éventuellement confondus sur $\widetilde{\Gamma}$, obtenus comme intersection avec $\widetilde{\Gamma}$ d'une courbe non T-décomposée du système $|D|$ passant par A_i. En admettant pour le moment que le système linéaire $X(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ des courbes de $|X|$ passant par $A_1, \ldots, A_n$ est sans point de base, on peut considérer une courbe $\mathcal{U}$ de ce système ne passant par aucun des points $(B_i, C_i)_{1 \leq i \leq n}$ ni aucun des points $(R_i)_{1 \leq i \leq 4}$ et $(\mathcal{U}_\ell)_{1 \leq \ell \leq 2s-8}$. Il est clair que cette courbe $\mathcal{U}$ appartient à Ω_0^k puisque $\mathcal{U} \cap \widetilde{PP'_k} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$. Reste à montrer que $X(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est sans point de base. Faisons éclater les points $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ et soit Σ_n la surface obtenue : notons $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ les classes des diviseurs exceptionnels. En identifiant X à son image inverse sur Σ_n, il faut montrer que le système linéaire

$$\Big|X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Big|$$

est sans point de base. Soit Δ_n la transformée de la droite PP'_k ; alors

$$\Delta_n \in \Big|\ell - e - e'_k - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Big|$$

En tensorisant une présentation du faisceau structural de Δ_n par

$$\mathcal{L}(X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i),$$

on obtient la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{L}(X - (\ell - e - e'_k)) \longrightarrow \mathcal{L}\Big(X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Big) \longrightarrow \mathcal{L}\Big(X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Big) \otimes \mathcal{O}_{\Delta_n} \to 0$$

Or $\mathcal{L}\big(X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\big) \otimes \mathcal{O}_{\Delta_n}$ est un faisceau inversible de degré

$$\Big(X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Big) \cdot \Big(\ell - e - e'_k - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Big) = n - n = 0\,;$$

il est donc sans point de base sur la droite Δ_n. Il y a alors deux cas : si $X \cdot e'_k > 0$, le système $|X - (\ell - e - e'_k)|$ est sans point de base d'après 2c) et comme d'après la condition 1), $h^1(\ell(X - (\ell - e - e'_k))) = 0$, la suite exacte ci-dessus montre alors qu'il en est de même pour le système $\big|X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\big|$. Si maintenant $X \cdot e'_k = 0$, les conditions $h^1(X - (\ell - e)) = 0$ et 2a) impliquent que les injections

$$\begin{cases} H^0\Big(\mathcal{L}\Big(X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i - e'_k\Big)\Big) \longrightarrow H^0\Big(\mathcal{L}\Big(X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Big)\Big), \\ H^0\Big(\mathcal{L}(X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i - \Delta_n\Big)\Big) \longrightarrow H^0\Big(\mathcal{L}\Big(X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\Big)\Big) \end{cases}$$

ne sont pas des isomorphismes. Il en résulte qu'un point de base éventuel H du système $|X - \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i|$ serait aussi point de base du système $|X - (\ell - e - e'_k)|$ d'après la suite exacte ci-dessus, non situé sur E'_k. Mais comme $(X - (\ell - e - e'_k)) \cdot e'_k = -1$ toutes les courbes de ce système se décomposent en E'_k et une courbe du système $|X - (\ell - e)|$. Le point H serait donc un point de base de ce dernier système, ce qui contredit 2b).

3) $\Omega_k^{k'} \neq \emptyset$. La démonstration est analogue à la précédente, en remarquant que chaque point de $\widetilde{PP}'_k$ a un seul conjugué sur $\widetilde{PP}'_{k'}$ pour $k' \neq k$.

3. Construction de courbes régulières sur la surface S, de degré donné d et avant un genre g en $\mathrm{O}(d)$

Nous allons construire sur la surface Σ des sytèmes linéaires satisfaisant aux conditions de la PROPOSITION 2.2.

Commençons par utiliser certaines courbes construites en degré 4 dans [2]. En contractant simultanément sur Σ les droites exceptionnelles $E_9, \dots, E_{2s}$; $E'_1, \dots, E'_{s-4}$ on obtient une surface Σ_1 isomorphe à l'éclatement du plan aux 9 points $P, P_1, \dots, P_8$.

Rappelons alors les faits suivants (cf. [2]) : si γ est le morphisme $\Sigma_1 \to \mathbb{P}^3$ associé au système linéaire $\left|4\ell - 2e - \sum_{i=1}^{8} e_i\right|$, la surface image S_1 est de degré 4 et on a :

PROPOSITION 3.1. — *Les deux systèmes linéaires*

$$\left|\sigma(\ell - e) + p\omega\right|,\ p \geq 0 \quad \text{et} \quad \left|\sigma(e_7 + e_8) + q\omega\right|,\ q \geq 1,$$

où σ est une isométrie de $\operatorname{Pic}\Sigma_1$ *laissant fixe la classe de diviseurs $\omega = 3\ell - e - e_1 - \cdots - e_8$ sont sans point de base.*

Pour tout couple d'entiers positifs (d_0, g_0) tels que $0 \leq g_0 \leq d_0 - 3$, il existe une isométrie σ et des entiers p et q telle que l'image de la courbe générale de l'un des deux systèmes précédents ait le degré d_0 et le genre g_0. En notant Z la classe de diviseurs correspondante :

- *si g_0 est pair, Z est de la forme $\sigma(\ell - e) + p\omega$ et $g_0 = 2p$;*
- *si g_0 est impair, Z est de la forme $\sigma(e_7 + e_8) + q\omega$ et $g_0 = 2q - 1$.*

Dans les deux cas, on a les égalités $Z \cdot (\ell - e) = d_0 - 2$, $h^1(\mathcal{L}(Z)) = 0$ et $Z \cdot \omega = 2$.

Nous noterons avec les mêmes lettres Z, les images réciproques sur la surface Σ des classes de diviseurs Z et ω par le morphisme de contraction $\Sigma \to \Sigma_1$.

LEMME 3.2. — *Soit Z l'une des classes de diviseurs précédentes pour laquelle on suppose $g_0 \geq 1$. Alors pour tout entier $1 \leq n \leq s - 4$, le système linéaire*

$$|W_n| = \left|Z + n(\ell - e) - \sum_{i=1}^{2n} e_{i+8}\right|$$

est sans point de base et $h^1(\mathcal{L}(W_n)) = 0$.

Démonstration. — On vérifie sans difficulté que $W_n \cdot \widetilde{\Gamma} = 2$. Le faisceau inversible $\mathcal{L}(W_n) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{\Gamma}}$ est donc sans point de base et non spécial.

Étudions

$$W_n - \widetilde{\Gamma} = Z - \omega + n(\ell - e) + \sum_{i>2n} e_{i+8}$$

(ce dernier n'existe évidemment que si $n < s - 4$). Comme

$$Z - \omega + n(\ell - e) = \sigma(\ell - e) + (p - 1)\omega + n(\ell - e)$$

ou

$$Z - \omega + n(\ell - e) = \sigma(e_7 + e_8) + (q - 1)\omega + n(\ell - e)$$

et que $p \geq 1$ car $g_0 \geq 1$ par hypothèse, il résulte de la PROPOSITION 3.1 précédente que $Z - \omega + n(\ell - e)$ est sans point de base et que

$$h^1(\mathcal{L}(Z - \omega + n(\ell - e))) = 0$$

dès que $q \geq 2$. En utilisant des présentations de faisceaux structuraux des droites exceptionnelles E_{i+8} pour $i > 2n$, on en déduit $h^1(\mathcal{L}(W_n - \widetilde{\Gamma})) = 0$, d'où $h^1(\mathcal{L}(W_n)) = 0$. Le système $|W_n|$ est sans point de base puisqu'un point de base éventuel appartiendrait nécessairement au système $|Z - \omega + n(\ell - e)|$. Le résultat est donc acquis pour $q \geq 2$.

Reste le cas $q = 1$ pour lequel W_n s'écrit :

$$\sigma(e_7 + e_8) + \omega + n(\ell - e) - \sum_{i=1}^{2n} e_{i+8}.$$

Posons $W'_n = \sigma(e_7 + e_8) + n(\ell - e))$. On calcule $h^0(\mathcal{L}(W'_n))$ et $h^1(\mathcal{L}(W'_n))$ en tensorisant, par $\mathcal{L}(W'_n)$, des présentations des faisceaux structuraux des droites exceptionnelles contenues dans les systèmes $|\sigma(e_7)|$ et $|\sigma(e_8)|$. On trouve

$$h^0\big(\mathcal{L}(W'_n)\big) = n\big((\ell - e) \cdot \sigma(e_7 + e_8) + 1\big) + 1 \quad \text{et} \quad h^1\big(\mathcal{L}(W'_n)\big) = 0.$$

Maintenant $W_n - \widetilde{\Gamma} = W'_n + \sum_{i>2n} e_{i+8}$ et comme on a $W'_n \cdot e_{i+8} = 0$ pour tout $i > 2n$,

$$h^0\big(\mathcal{L}(W_n - \widetilde{\Gamma})\big) = h^0(\mathcal{L}(W'_n)) \quad \text{et} \quad h^1\big(\mathcal{L}(W_n - \widetilde{\Gamma})\big) = 0.$$

Enfin, il résulte de l'égalité $W_n \cdot \widetilde{\Gamma} = 2$ que :

$$h^0\big(\mathcal{L}(W_n)\big) = n\big((\ell - e) \cdot \sigma(e_7 + e_8) + 1\big) + 3 \quad \text{et} \quad h^1\big(\mathcal{L}(W_n)\big) = 0.$$

Il reste à voir que $|W_n|$ est sans point de base : on raisonne par l'absurde en montrant que s'il y en avait un, soit Q, on pourrait toujours disposer $N = h^0(\mathcal{L}(W_n)) - 1$ points $Q_1, \ldots, Q_N$ de telle façon qu'il n'y ait aucune courbe du système $|W_n|$ passant par les $N + 1$ points $Q, Q_1, \ldots, Q_N$ (on est amené à distinguer les cas $Q \in \widetilde{\Gamma}$, $Q \notin \widetilde{\Gamma}$).

PROPOSITION 3.3. — *Soit toujours Z une classe de diviseurs comme dans la Proposition* 3.1, *pour laquelle $g_0 \geq 1$. Alors, sur la surface Σ, les systèmes linéaires :*

$$|Z_\rho^0| = \Big|Z + (s-4)(\ell - e) - \sum_{i \leq \rho} e'_i\Big|,$$

$$|Z_\rho^n| = \Big|Z + (n+s-4)(\ell - e) - \sum_{i=1}^{2n} e_{i+8} - \sum_{i \leq \rho} e'_i\Big|,$$

$$|Z'^n_\rho| = \Big|Z + (n+2s-8)(\ell - e) - \widetilde{\Gamma} - \sum_{i=1}^{2n} e_{i+8} - \sum_{i \leq \rho} e'_i\Big|,$$

avec $0 \leq \rho \leq s-4$ et $1 \leq n \leq s-4$, contiennent des courbes lisses et irréductibles isomorphes à leurs images sur la surface S de degré s de $\mathbb{P}^3$.

Démonstration. — Nous devons vérifier que ces trois systèmes satisfont les hypothèses de la PROPOSITION 2.2.

1) On peut écrire :

$$Z_\rho^0 - \widetilde{\Gamma} = Z - \omega + \sum_{i=9}^{2s} e_i + (s-4)(\ell - e) - \sum_{i \leq \rho} e'_i,$$

$$Z_\rho^n - \widetilde{\Gamma} = Z - \omega + \sum_{i > 2n} e_{i+8} + (n+s-4)(\ell - e) - \sum_{i \leq \rho} e'_i,$$

$$Z'^n_\rho - \widetilde{\Gamma} = W_n + (2s-8)(\ell - e) - \sum_{i \leq \rho} e'_i,$$

où W_n est la classe de diviseurs du LEMME 3.2.

Comme $Z - \omega$ est égal à $\sigma(\ell - e) + (p-1)\omega$ ou à $\sigma(e_7) + \sigma(e_8) + (q-1)\omega$ et que $p, q \geq 1$, on a $h^1(\mathcal{L}(Z - \omega)) = 0$. On en déduit que

$$h^1\big(\mathcal{L}(Z_\rho^0 - \widetilde{\Gamma})\big) = h^1\big(\mathcal{L}(Z_\rho^n - \widetilde{\Gamma})\big) = 0,$$

en tensorisant par des présentations des droites exceptionnelles E_i pour $i \geq 9$, des droites $\widetilde{PP'_j}$ pour $j \leq \rho$ et d'une droite générale passant par P et en remarquant que

$$(Z_\rho^0 - \widetilde{\Gamma}) \cdot (\ell - e - e'_j) = (Z_\rho^n - \widetilde{\Gamma}) \cdot (\ell - e - e'_j) = d_0 - 5 \geq -1$$

car $d_0 \geq g_0 + 3 \geq 4$, ce qui donne un diviseur non spécial sur chaque droite $\widetilde{PP'_j}$ si $j \leq \rho$.

Pour la classe de diviseurs $Z_\rho^{'n} - \widetilde{\Gamma}$, on se ramène de même à montrer que $h^1(\mathcal{L}(W_n) = 0$, ce qui est une des conclusions du LEMME 3.2.

Montrons maintenant que $h^1(\mathcal{L}(X - (\ell - e - e_i'))) = 0$ pour $1 \leq i \leq s-4$, où X désigne l'une des trois classes de diviseurs Z_ρ^0, Z_ρ^n, $Z_\rho^{'n}$. Il faut distinguer les $i \leq \rho$ et les $i > \rho$ (ce dernier cas ne pouvant se produire que si $\rho \leq s-5$). On peut écrire :

$$Z_\rho^0 - (\ell - e - e_i') = \begin{cases} Z + (s-5)(\ell - e) - \sum\limits_{j \leq \rho,\ j \neq i} e_j' & \text{si } i \leq \rho, \\ Z + (s-5)(\ell - e) - \sum\limits_{j \leq \rho} e_j' + e_i' & \text{si } i > \rho\,; \end{cases}$$

$$Z_\rho^n - (\ell - e - e_i') = \begin{cases} W_n + (s-5)(\ell - e) - \sum\limits_{j \leq \rho,\ j \neq i} e_j' & \text{si } i \leq \rho, \\ W_n + (s-5)(\ell - e) - \sum\limits_{j \leq \rho} e_j' + e_i' & \text{si } i > \rho\,; \end{cases}$$

$$Z_\rho^{'n} - (\ell - e - e_i') = \begin{cases} W_n + \widetilde{\Gamma} + (2s-9)(\ell - e) - \sum\limits_{j \leq \rho,\ j \neq i} e_j' & \text{si } i \leq \rho, \\ W_n + \widetilde{\Gamma} + (2s-9)(\ell - e) - \sum\limits_{j \leq \rho} e_j' + e_i' & \text{si } i > \rho. \end{cases}$$

En utilisant les tensorisations des modules inversibles associés à ces classes de diviseurs par des présentations des faisceaux structuraux des droites $(\widetilde{PP_j'})$ pour $j \leq \rho$, de la droite exceptionnelle E_i', d'une droite générale passant par P et enfin de $\widetilde{\Gamma}$ (pour le dernier), on se ramène à montrer que $h^1(\mathcal{L}(Z)) = 0$ et $h^1(\mathcal{L}(W_n)) = 0$ ce qui découle de la PROPOSITION 3.1 et du LEMME 3.2.

2) La condition 2a) se vérifie immédiatement. On remarque ensuite que la condition 2b) n'est à vérifier que si $\rho \leq s-5$ et on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} Z_\rho^0 - (\ell - e) &= Z + (s-5)(\ell - e) - \sum_{i \leq \rho} e_i', \\ Z_\rho^n - (\ell - e) &= W_n + (s-5)(\ell - e) - \sum_{i \leq \rho} e_i', \\ Z_\rho^{'n} - (\ell - e) &= W_n + \widetilde{\Gamma} + (2s-9)(\ell - e) - \sum_{i \leq \rho} e_i'. \end{aligned}$$

Par les mêmes méthodes qu'en 1), on se ramène pour 2b) et 2c) à montrer que les systèmes $|Z|$ et $|W_n|$ sont sans point de base, ce qui résulte encore des PROPOSITIONS 3.1 et LEMME 3.2 (en remarquant que 2c) ne concerne que les indices $i \leq \rho$).

Donnons maintenant les expressions du degré et du genre des courbes obtenues :

PROPOSITION 3.4. — *Le degré et le genre des courbes lisses des systèmes* $|Z_\rho^0|, |Z_\rho^n|, |Z_\rho^{\prime n}|$ *sont donnés par les formules :*

$$\begin{aligned}
d(Z_\rho^0) &= (s-3)d_0 - \rho,\\
d(Z_\rho^n) &= d_0(s-3) - \rho,\\
d(Z_\rho^{\prime n}) &= (d_0+2)(s-3) - \rho\,;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(Z_\rho^0) &= g_0 + (s-4)(d_0-3),\\
g(Z_\rho^n) &= g_0 + (n+s-4)(d_0-3),\\
g(Z_\rho^{\prime n}) &= g_0 + (n+2s-8)(d_0-1) + 2 - 2n,
\end{aligned}$$

où d_0 *et* g_0 *sont les entiers définis dans la Proposition* 3.1.

On obtient les genres par la formule d'adjonction sur Σ et les degrés par la formule $d(X) = D \cdot X$. On déduit de cette proposition un premier intervalle effectif pour le genre d'une courbe régulière et irréductible de degré donné tracée sur la surface S :

PROPOSITION 3.5. — *Soit* d *un entier* $\geq 6(s-3)$ *et* ρ *l'entier défini par* $d+\rho \equiv 0 \bmod (s-3)$ *avec* $0 \leq \rho \leq s-4$. *Alors pour tout entier* g *vérifiant les inégalités*

$$1 + (s-4)\left(\frac{d+\rho}{s-3} - 3\right) \leq g \leq (3s-11)\left(\frac{d+\rho}{s-3} - 3\right) - 2s + 8,$$

il existe une courbe lisse et irréductible tracée sur la surface S *et ayant le degré* d *et le genre* g.

Rappelons que dans les formules de la PROPOSITION 3.4 précédente, les entiers d_0 et g_0 sont soumis aux conditions $g_0 \geq 1$ et $d_0 \geq g_0 + 3 \geq 4$. D'autre part, si on écrit $d = \delta(s-3) - \rho$ avec $0 \leq \rho \leq s-4$, alors $\delta \geq 6$ puisque $d \geq 6(s-3)$ par hypothèse, et on peut donc choisir pour d_0 n'importe quel entier $\geq \delta - 2$. On déduit alors des formules de la PROPOSITION 3.4 que :

1) en choisissant $d_0 = \delta$, le genre $g(Z_\rho^0)$ parcourt l'intervalle

$$\big[(s-4)(\delta-3)+1, (s-3)(\delta-3)\big]$$

et le genre $g(Z^n_\rho)$ l'intervalle

$$\big[1+(n+s-4)(\delta-3),(n+1+s-4)(\delta-3)\big],$$

quand g_0 parcourt l'intervalle $[1,d_0-3]$.

2) en choisissant $d_0=\delta-2$, le genre $g(Z'^n_\rho)$ parcourt l'intervalle

$$\big[1+(n+2s-8)(\delta-3)+2-2n,(n+1+2s-8)(\delta-3)-2n\big]$$

dans les mêmes conditions. Maintenant quand n parcourt à son tour l'intervalle $[1,s-4]$, tous ces intervalles se raccordent et leur réunion est l'intervalle de l'énoncé.

4. Fin de la preuve du théorème de l'introduction

On vient d'obtenir pour le genre la borne inférieure de l'intervalle mentionné dans ce théorème; la borne supérieure va être atteinte (comme dans [2] quand $s=4$) en considérant des systèmes linéaires de la forme $|X+mD|$:

PROPOSITION 4.1. — *On désigne par X l'une des trois classes de diviseurs de la Proposition* 3.3. *Alors,*

1) *la courbe générale du système linéaire $|X+mD|$ pour $m\geq 0$ est lisse, irréductible et isomorphe à son image sur la surface S.*

2) *le degré d et le genre g d'une telle courbe sont donnés par les formules :*

$$d=d(X)+ms,\quad g=g(X)+F_d(m)$$

en posant $F_d(m)=md-\frac{1}{2}m(m-1)s-3m$.

Démonstration.

1) Il faut encore vérifier les conditions 1) et 2) de la PROPOSITION 2.2.

(i) Pour calculer $h^1(\mathcal{L}(X+mD-\widetilde{\Gamma}))$, on utilise une présentation de $\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}$ désignant une courbe lisse et irréductible du système linéaire sans point de base $|D|$, dont le genre est $(s-2)$. Alors $\mathcal{L}(X+mD-\widetilde{\Gamma})\otimes\mathcal{O}_{\mathcal{D}}$ est un faisceau inversible de degré

$$(X+mD-\widetilde{\Gamma})\cdot D=d(X)+ms-2\geq 6(s-3)+ms-2$$

(en se plaçant dans les conditions de 3.5); il est donc non spécial. On conclut par récurrence sur m, puisque pour $m=0$, $h^1(\mathcal{L}(X-\widetilde{\Gamma}))=0$ d'après 3.3. On démontre de même que

$$h^1\big(\mathcal{L}(X+mD-(\ell-e-e'_i))\big)=0$$

pour tout $1\leq i\leq s-4$.

(ii) Comme $(X+mD)\cdot e_i' = X\cdot e_i' + m$, le degré $(X+mD)\cdot e_i'$ est strictement positif dès que $m \geq 1$. On doit donc seulement vérifier la condition 2c). Il y a deux cas : si $X\cdot e_i' > 0$, alors $|X-(\ell-e-e_i')|$ est sans point de base puisque X vérifie 2c) et comme $|D|$ est sans point de base, il en est de même de $|X-(\ell-e-e_i')+mD|$. Si maintenant $X\cdot e_i' = 0$, on écrit

$$X-(\ell-e-e_i')+mD = X-(\ell-e)+D+e_i'+(m-1)D$$

et comme $|X-(\ell-e)|$ est alors sans point de base par 2b) et que $|D+e_i'|$ est aussi sans point de base, si $m\geq 1$, il en est encore de même pour $|X-(\ell-e-e_i')+mD|$.

2) Les expressions de d et g s'obtiennent par les formules habituelles. Pour achever la démonstration de notre théorème, il nous reste à faire l'inventaire des genres des courbes des systèmes $|X+mD|$ dont le degré $d\geq 6(s-3)$ est fixé. Donnons un petit lemme numérique :

LEMME 4.2. — *Soit d un entier $\geq 6(s-3)$. Considérons l'ensemble d'entiers naturels*

$$M = \big\{m \mid \textit{il existe deux entiers (nécessairement uniques) } \delta_m \text{ et } \rho_m \textit{ tels que } d-ms = \delta_m(s-3)-\rho_m,\ \delta_m \geq 6 \text{ et } 0\leq \rho_m \leq s-4\big\}.$$

Alors cet ensemble est un intervalle $[0,\mu]$ et $\delta_\mu = 6, 7$ ou 8.

Démonstration. — Commençons par diviser d par $(s-3)$:

$$d = \delta_0(s-3)-\rho_0 \quad \text{avec} \quad 0\leq\rho_0\leq s-4.$$

Comme $d\geq 6(s-3)$ par hypothèse, $\delta_0\geq 6$ et donc $0\in M$. D'autre part, on vérifie sans difficulté que si $m\in M$ et si $\delta_m\geq 9$, alors $m+1\in M$ et :

(i) Pour $s\geq 6$:

$$\begin{aligned} &\delta_{m+1} = \delta_m - 1, \quad \rho_{m+1} = \rho_m + 3 && \text{si } \rho_m \leq s-7\,; \\ &\delta_{m+1} = \delta_m - 2, \quad \rho_{m+1} = \rho_m - s + 6 && \text{si } \rho_m > s-7. \end{aligned}$$

(ii) Pour $s = 5$:

$$\begin{aligned} &\delta_{m+1} = \delta_m - 2, \quad \rho_{m+1} = 1 && \text{si } \rho_m = 0\,; \\ &\delta_{m+1} = \delta_m - 3, \quad \rho_{m+1} = 0 && \text{si } \rho_m = 1. \end{aligned}$$

Il en résulte bien que M est un intervalle $[0,\mu]$ avec $\delta_\mu = 6, 7$ ou 8.

Considérons alors deux entiers consécutifs m et $m+1$ de M. Il résulte des formules des PROPOSITIONS 4.1 et 3.5 que le genre g d'une courbe du système $|X+mD|$ (resp. $|X+(m+1)D|$) peut prendre toute valeur de l'intervalle :

$$\big[A(m)+F_d(m), B(m)+F_d(m)\big]$$

$$\big(\text{resp. } \big[A(m+1)+F_d(m+1), B(m+1)+F_d(m+1)\big]\big)$$

en posant :

$$A(m) = 1+(s-4)\Big(\frac{d+\rho_m-ms}{s-3}-3\Big),$$

$$B(m) = (3s-11)\Big(\frac{d+\rho_m-ms}{s-3}-3\Big)-2s+8.$$

Pour que ces deux intervalles se raccordent, il faut et il suffit que :

$$A(m+1)+F_d(m+1)-1 \leq B(m)+F_d(m)$$

ce qui équivaut, tous calculs faits à

$$d+\rho_m\frac{(3s-11)}{s-4}-\rho_{m+1}-s(m+7)+24 \geq 0$$

ce qui se vérifie facilement, en utilisant les relations (i) et (ii) ci-dessus et en tenant compte de ce que $\delta_m \geq 7$ car $m+1 \in M$.

Ainsi les intervalles correspondant à deux entiers consécutifs de l'intervalle M se raccordent et on obtient finalement comme genres possibles tous les entiers de l'intervalle :

$$\big[A(0)+F_d(0),\ B(\mu)+F_d(\mu)\big]$$

correspondant aux extrémités 0 et μ de M, soit

$$\Big[1+(s-4)\Big(\frac{d+\rho_0}{s-3}-3\Big), (3s-11)(\delta_\mu-3)+F_d(\mu)\Big]$$

Rappelons que $F_d(\mu)=\mu d-\frac{1}{2}\mu(\mu-1)s-3\mu$ et que $\delta_\mu = 6, 7$ ou 8.

On vérifie alors que la borne supérieure $(3s-11)(\delta_\mu-3)+F_d(\mu)$ de l'intervalle précédent s'écrit bien sous la forme

$$\frac{1}{2s}\big\{d^2+d(s-6)-\mathrm{O}(s^2)\big\}.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] GRUSON (L.) et PESKINE (Ch.). — Le théorème de spécialité, *Séminaire ENS* 1977–1978, Astérisque **71–72** (Soc. Math. France).

[2] GRUSON (L.) et PESKINE (Ch.). — *Genre des courbes de l'espace projectif*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4), t. **15**, 1982, p. 401–418.

[3] GRUSON (L.) et PESKINE (Ch.). — Genre des courbes dans l'espace projectif, *Algebraic Geometry*, Lecture Notes **687**, pp. 31–60, 1978, Springer.

[4] HARTSHORNE (H.). — *Stable reflexive sheaves III*, Math. Ann., t. **279**, 1988, p. 517–534.

[5] ELLIA (Ph.). — Sur le genre maximal des courbes gauches de degré d non sur une surface de degré $(s-1)$, *Preprint*, 1988.

[6] HARTSHORNE (R.) et HIRSCHOWITZ (A.). — *Nouvelles courbes de bon genre dans l'espace projectif*, Math. Ann., t. **280**, 1988, p. 353–367.

[7] BALLICO (E.) and ELLIA (Ph.). — *The maximal rank conjecture for non special curves in* $\mathbb{P}^3$, Invent. Math., t. **79**, 1985, p. 541–555.

[8] HARTSHORNE (R.). — *Algebraic Geometry*. — Springer, 1977.

[9] WALTER (C.). — *Curves on surfaces with a multiple line*. — Preprint, 1990.