

# BULLETIN DE LA S. M. F.

BENALI BENZAGHOU

JEAN-PAUL BÉZIVIN

## **Propriétés algébriques de suites différentiellement finies**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 120, n° 3 (1992), p. 327-346

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1992\\_\\_120\\_3\\_327\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_3_327_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE SUITES DIFFÉRENTIELLEMENT FINIES

PAR

BENALI BENZAGHOU ET JEAN-PAUL BEZIVIN (\*)

---

RÉSUMÉ. — On dit qu'une suite  $u(n)$ , à valeurs dans un corps commutatif  $K$  est récurrente linéaire si la série génératrice  $f(x) = \sum u(n)x^n$  est une fraction rationnelle, et différentiellement finie si  $f(x)$  vérifie une équation différentielle linéaire homogène à coefficients dans  $K[x]$ . Dans cet article, nous nous intéressons aux problèmes de caractériser les suites  $u(n)$  différentiellement finies telles que  $1/u(n)$  le soit aussi, et les suites  $u(n)$  différentiellement finies vérifiant une équation polynomiale à coefficients suites récurrentes linéaires.

ABSTRACT. — We say that the sequence  $u(n)$  of elements of a commutative field  $K$  is a linear recurrent sequence if the generating function  $f(x) = \sum u(n)x^n$  is a rational function, and differentially finite if  $f(x)$  satisfy a linear homogeneous differential equation with coefficients in  $K[x]$ . In this paper, we study the problem of finding the differentially finite sequence  $u(n)$  such that  $1/u(n)$  is also differentially finite, and the differentially finite sequences that satisfy a polynomial equation with linear recurrent sequences coefficients.

### 1. Introduction et Notations

Soient  $K$  un corps commutatif de caractéristique nulle et  $u(n)$  une suite d'éléments de  $K$ . Nous dirons que  $u(n)$  est une *suite récurrente linéaire* si elle vérifie une relation de récurrence de la forme

$$(1) \quad \sum_{i=0}^t a_i u(n+i) = 0$$

pour  $n$  assez grand, les  $a_i$  étant des constantes de  $K$  non toutes nulles. Il est bien connu qu'une telle suite admet, pour  $n$  assez grand, une expression

---

(\*) Texte reçu le 28 mars 1991, révisé le 29 octobre 1991.

J.-P. BEZIVIN, Université de Caen, Département de Mathématique et de Mécanique, 14032 Caen Cedex.

B. BENZAGHOU, Université H. Boumediene, Mathématiques, El Alia, B.P. n° 32, Bab Ezzouar, Alger (Algérie).

de la forme

$$(2) \quad u(n) = \sum_1^s P_i(n) \alpha_i^n.$$

où les  $\alpha_i$  sont des éléments non nuls d'une clôture algébrique  $\bar{K}$  de  $K$ , et les  $P_i$  des polynômes non nuls de  $\bar{K}[X]$ .

A une telle suite  $u(n)$ , on associe sa série génératrice  $f(x) = \sum u(n)x^n$  qui est la série formelle à coefficients dans  $K$ . Dire que  $u(n)$  est une suite récurrente linéaire est alors équivalent à dire que la série  $f(x)$  est la série de Taylor à l'origine d'une fraction rationnelle; c'est pourquoi nous notons l'ensemble des suites récurrentes linéaires par  $R(K)$ .

On parle aussi, en raison de l'expression (2), de polynômes exponentiels pour les suites récurrentes linéaires. Une partie de  $R(K)$  est formée des sommes exponentielles; ce sont les éléments de  $R(K)$  tels que dans l'expression (2), les polynômes  $P_i$  soient des constantes non nulles.

Nous noterons  $S(K)$  cette partie de  $R(K)$ ; sur la série génératrice  $f$ , l'appartenance de  $u(n)$  à  $S(K)$  signifie que la fraction rationnelle  $f$  n'a que des pôles simples dans une clôture algébrique de  $K$ .

Nous aurons besoin aussi de la notion de suite différentiellement finie ou  $D$ -finie; une telle suite sera une suite vérifiant une relation de récurrence de la forme :

$$(3) \quad \sum_{i=0}^t Q_i(n) u(n+i) = 0$$

pour  $n$  assez grand, avec  $Q_i \in K[X]$  pour tout  $i$ .

Il est équivalent de dire que la série génératrice  $f(x)$  vérifie une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes, d'où cette appellation, introduite par STANLEY dans [11].

Nous noterons  $J(K)$  l'ensemble de ces suites. Enfin, nous introduisons une dernière classe de suites d'éléments de  $K$ , que nous appellerons *suites algébriques*; ce sont les suites  $u(n)$  d'éléments de  $K$  telles que la série génératrice  $f(x)$  soit une série algébrique sur  $K(X)$ , c'est-à-dire vérifie une équation  $P(x, f(x)) = 0$  où  $P(X, Y)$  est un polynôme non nul de  $K[X, Y]$ .

Nous noterons  $A(K)$  ce dernier ensemble. On a  $S(K)$  inclus dans  $R(K)$ ,  $R(K)$  inclus dans  $A(K)$  et enfin  $A(K)$  inclus dans  $J(K)$ . Il est bien connu que  $J(K)$  est un anneau commutatif non intègre pour les opérations usuelles sur les suites; il en est de même de  $S(K)$  et de  $R(K)$ , mais pas de  $A(K)$ . Cependant, le produit d'une suite de  $A(K)$  par une suite de  $R(K)$  est encore dans  $A(K)$ , comme on s'en rend compte aisément en utilisant la formule (2).

Le produit usuel  $w(n) = u(n)v(n)$  de deux suites  $u(n)$  et  $v(n)$  est encore appelé *produit de Hadamard*, car le produit défini sur l'ensemble des séries formelles par  $f * g = \sum u(n)v(n)x^n$  si  $f = \sum u(n)x^n$  et  $g = \sum v(n)x^n$  a été introduit et étudié par HADAMARD pour ses bonnes propriétés vis à vis des singularités des séries  $f, g, f * g$  quand le corps de base est  $\mathbb{C}$ .

Les propriétés algébriques de  $S(K)$  et  $R(K)$  ont été étudiées depuis longtemps, et sont assez bien connues (voir [1], [5], [7], [8]). Par contre, en ce qui concerne les suites  $D$ -finies, on connaît bien moins de résultats, voir l'article [11] déjà cité.

Dans cet article, nous allons examiner un certain nombre de problèmes dans  $J(K)$ , analogues aux problèmes résolus dans  $R(K)$ , et aussi les relations entre éléments de  $J(K)$  et  $R(K)$ . Dans chaque partie, nous ferons si nécessaire une brève introduction indiquant ce qui est connu dans le cas de  $R(K)$ .

Nous utiliserons assez largement des outils d'analyse complexe, de sorte que nous supposons désormais  $K = \mathbb{C}$ . Mais comme on le voit facilement, pour toute suite  $u(n)$  de  $J(K)$ , il existe un sous-corps  $K_0$ , de type fini sur  $\mathbb{Q}$ , tel que  $u(n)$  appartienne à  $J(K_0)$ ; par suite, pour des propriétés algébriques, on peut toujours considérer que l'on s'est placé dans  $\mathbb{C}$ , de sorte que supposer  $K = \mathbb{C}$  ne nuit pas à la généralité des énoncés.

## 2. Suites de $J(K)$ vérifiant une relation de dépendance algébrique

Dans cette partie, nous considérons les suites  $D$ -finies qui vérifient une relation de dépendance algébrique sur les suites polynômes en la variable  $n$ . Nous aurons besoin d'une définition.

*Définition 2.1.* — On dit qu'une suite  $u(n)$  est un *emboîtement* de suites fractions rationnelles s'il existe un entier naturel positif  $d$  tel que, pour tout  $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ , il existe une fraction rationnelle  $F_r(X)$  dans  $\mathbb{C}(X)$  telle que  $u(kd+r) = F_r(k)$  pour tout  $k$  assez grand.

Une suite  $u(n)$  qui est un emboîtement de suites fractions rationnelles est  $D$ -finie, et aussi vérifie une relation de dépendance algébrique sur les suites polynômes en la variable  $n$ ; on vérifie en effet facilement que :

$$w(n) = \prod_{r=0}^{d-1} \left[ u(n) - F_r\left(\frac{n-r}{d}\right) \right]$$

est une suite nulle à partir d'un certain rang.

Nous allons démontrer que la réciproque est vraie :

THÉORÈME 1. — Soit  $u(n)$  une suite  $D$ -finie, vérifiant  $P(n, u(n)) = 0$ , où :

$$P(X, Y) = \sum_0^t A_j(X) Y^j \in \mathbb{C}[X, Y]$$

n'est pas nul. Alors  $u(n)$  est un emboîtement de suites fractions rationnelles.

*Démonstration.* — On ne peut pas supposer que  $P(X, Y)$  est irréductible, car  $J(\mathbb{C})$  n'est pas intègre. Nous pouvons cependant supposer que  $P(X, Y)$  n'a pas de facteurs multiples.

Considérons comme équation en la variable  $z$ ,  $P(z, Y) = 0$  définit au voisinage de l'infini des fonctions algébriques  $\psi_1, \dots, \psi_t$  qui seront donc distinctes.

On a par hypothèse, pour  $n$  assez grand, l'égalité :

$$(4) \quad \prod_1^t (u(n) - \psi_j(n)) = 0 \quad (n \geq N_0).$$

Quitte à supposer  $n$  un peu plus grand, on peut supposer aussi que  $\psi_j(n) \neq \psi_i(n)$  si  $i \neq j$ ,  $n \geq N_0$ . Nous supposons aussi que pour tout  $i$ , il existe une infinité de valeurs de  $n$  telles que  $u(n) = \psi_i(n)$ .

Puisque la suite  $u(n)$  est dans  $J(\mathbb{C})$ , on a une relation non triviale de la forme :

$$\sum_0^s H_j(n) u(n+j) = 0 \quad \text{pour } n \text{ assez grand, avec } H_0 H_s \neq 0.$$

Nous supposons  $H_0(n) H_s(n) \neq 0$  pour  $n \geq N_0$ . Ces réductions étant faites, pour tout  $n \geq N_0$ , il existe d'après (4) un entier  $\ell \in \{1, \dots, t\}$ , déterminé de façon unique, tel que  $u(n) = \psi_\ell(n)$ ; nous notons  $\ell(n)$  cet entier.

Posons  $\omega(n) = (\ell(n), \dots, \ell(n+s))$  pour  $n \geq N_0$ .

L'application  $\omega$  est à valeurs dans l'ensemble fini  $\{1, \dots, t\}^{s+1}$ .

Soit  $\omega_0$  un élément de cet ensemble qui est atteint une infinité de fois,  $\omega_0 = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_s)$  et soit  $A = \{n, n \geq N_0, \omega(n) = \omega_0\}$ , ensemble que nous notons aussi  $\{n_k; k \geq 1\}$ .

Soit  $\varphi(z)$  la fonction algébrique définie par :

$$\varphi(z) = \sum_0^s H_j(z) \psi_{\ell_j}(z+j).$$

Pour  $n \in A$ , on a :

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \sum_0^s H_j(n) \psi_{\ell_j}(n_j) \\ &= \sum_0^s H_j(n) \psi_{\ell(n+j)}(n+j) \\ &= \sum_0^s H_j(n) u(n+j) = 0.\end{aligned}$$

Puisque  $A$  est infini, on en déduit que  $\varphi(z) = 0$ . Considérons maintenant l'ensemble  $A' = \{n+1, n \in A\}$ .

Pour  $n$  dans  $A$ , on a  $\ell(n+1) = \ell_1, \dots, \ell(n+s) = \ell_s$  par définition de  $A$ . Par contre,  $\ell(n+s+1)$  peut a priori varier avec  $n \in A$ . Soit  $B$  une partie infinie de  $A$  telle que  $\ell(n+s+1)$  soit constant, et égal à  $\ell_{s+1}$ .

Le raisonnement que nous venons de faire pour  $A$ , appliqué à  $B$ , montre que l'on a :

$$(5) \quad \prod_0^s H_j(z+1) \psi_{\ell_{j+1}}(z+j+1) = 0.$$

On remplace alors  $z$  par  $n \in A$  quelconque dans (5) d'où :

$$\sum_0^{s-1} H_j(n+1) \psi_{\ell_j}(n+j+1) + H_s(n+1) \psi_{\ell_{s+1}}(n+s+1) = 0.$$

On a  $\psi_{\ell_{j+1}}(n+j+1) = u(n+j+1)$  pour  $0 \leq j \leq s-1$ , car  $n \in A$ , donc :

$$(6) \quad \sum_0^{s-1} H_j(n+1) u(n+j+1) + H_s(n+1) \psi_{\ell_{s+1}}(n+s+1) = 0.$$

Tenant compte de  $\sum_0^s H_j(n+1) u(n+j+1) = 0$ , il en résulte que :

$$H_s(n+1) \psi_{\ell_{s+1}}(n+s+1) = H_s(n+1) u(n+s+1)$$

et puisque  $H_s(n+1) \neq 0$ , on a  $u(n+s+1) = \psi_{\ell_{s+1}}(n+s+1)$ , donc  $\ell(n+s+1) = \ell_{s+1}$  pour tout  $n$  dans  $A$ , et pas seulement pour les éléments de  $B$ .

On en déduit par récurrence que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la fonction  $n \in A \mapsto \ell(n+k)$  est constante; nous noterons cette valeur constante par  $\ell_k$ . Pour tout  $k$ , on a donc :

$$(7) \quad \sum_0^s H_j(z+k) \psi_{\ell_{j+k}}(z+j+k) = 0.$$

Soit  $\mathbb{L}$  le corps de fonctions engendré sur  $\mathbb{C}(z)$  par

$$\psi_{\ell_0}(z), \quad \psi_{\ell_1}(z+1), \dots, \psi_{\ell_{s-1}}(z+s-1).$$

La relation  $\varphi(z) = 0$  et  $H_s(z) \neq 0$  montrent que  $\psi_{\ell_s}(z+s) \in \mathbb{L}$ .

En procédant par récurrence, la relation (7) montre alors que, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\psi_{\ell_k}(z+k) \in \mathbb{L}$ .

Soit  $\ell$  un indice qui apparaît une infinité de fois dans la suite  $\ell_k$ ; il existe donc une suite croissante  $k_n$  d'entiers tels que  $\psi_{\ell}(z+k_n) \in \mathbb{L}$ .

Si la fonction algébrique  $\psi_{\ell}$  a un point de branchement  $z_0$ , il en résulte que, pour tout  $n$ ,  $z_0 - k_n$  est un point de branchement pour  $\psi_{\ell}(z+k_n)$ , donc appartient à l'ensemble des points de branchement pour  $\mathbb{L}$ , qui est fini. Ceci est clairement impossible, et par suite  $\psi_{\ell}$  est méromorphe dans tout  $\mathbb{C}$ . Étant algébrique, c'est donc une fraction rationnelle.

Tous les indices parmi  $\{\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_{s-1}\}$  interviennent une infinité de fois, et tout indice  $\ell$  parmi  $\{1, \dots, t\}$  est tel qu'il existe une infinité de valeurs de  $n$  telles que  $\ell(n) = \ell$ , grâce à nos hypothèses. Par suite, toutes les fonctions  $\psi_{\ell}$  sont des fractions rationnelles.

Nous reprenons maintenant la relation (7), que nous pouvons écrire aussi :

$$(8) \quad \sum_0^s H_j(z) \psi_{\ell_{j+k}}(z+j) = 0$$

en y remplaçant  $z+k$  par  $z$ .

Soit  $k$  un entier  $\geq 2$ , et  $T$  tel que  $n_1 + T = n_k$ . On a  $\ell(n_1 + T + h) = \ell(n_k + h) = \ell_h$  pour  $h = 0, 1, \dots, s-1$ , d'où on tire, en prenant  $k = 0$  et  $k = T$  dans la relation (8), que  $\psi_{\ell_s}(z+s) = \psi_{\ell_{s+T}}(z+s)$ , donc  $\ell_s = \ell_{s+T}$ .

En procédant par récurrence sur  $m$ , on voit donc en utilisant la relation (8) que  $\ell_m = \ell_{m+T}$  pour tout  $m$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $m \geq n_1$ . Comme  $\ell(m+n_1) = \ell_m$ ,  $\ell(m+T+n_1) = \ell_{m+T}$ , il en résulte que la suite  $\ell(n)$  est périodique à partir d'un certain rang. Quitte à faire une translation sur l'indice, on peut supposer qu'elle est périodique.

Nous avons posé au départ  $u(n) = \psi_{\ell(n)}(n)$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $n = kT + r, r \in \{0, 1, \dots, T-1\}, k \in \mathbb{N}$ , donc

$$u(n) = u(kT + r) = \psi_{\ell(kT+r)}(kT + r) = \psi_{\ell(r)}(kT + r).$$

Soit  $F_r(X) = \psi_{\ell(r)}(XT + r) \in \mathbb{C}(X)$ . On a alors :

$$\forall k, \forall r \in \{0, 1, \dots, T-1\}, \quad u(kT + r) = F_r(k),$$

ce qui prouve que  $u(n)$  est un emboîtement de suites fractions rationnelles, et termine la démonstration du THÉOREME 1.

### 3. Suites de $J(K)$ dont l'inverse au sens de Hadamard est dans $J(K)$

Dans cette partie, nous considérons le problème suivant :

*Soit  $u(n)$  une suite  $D$ -finie. On suppose que  $u(n) \neq 0$  pour toute valeur de  $n$ , et que la suite  $v(n) = 1/u(n)$  est  $D$ -finie. Que peut-on dire de la suite  $u(n)$  ?*

Dans le cas des suites récurrentes linéaires, on peut montrer que si  $u(n)$  et  $1/u(n)$  sont toutes deux dans  $R(\mathbb{C})$ , alors  $u(n)$  est un emboîtement de suites géométriques, c'est-à-dire qu'il existe un entier naturel  $d$  non nul et pour  $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  des constantes  $\lambda_r, \mu_r$  dans  $\mathbb{C}$  non nulles telles que  $u(kd + r) = \lambda_1 \mu_r^k$  (cf. [1]). La suite  $v_r(k) = u(kd + r)$  vérifie alors  $v_r(k+1) = \mu_r v_r(k)$ .

Dans le cas des suites algébriques, on a exactement le même résultat : si  $u(n)$  est une suite de  $A(\mathbb{C})$  telle que  $u(n) \neq 0$  pour tout  $n$  et  $1/u(n)$  appartient à  $A(\mathbb{C})$ , alors  $u(n)$  est un emboîtement de suites géométriques, (cf. [2]).

On peut construire de manière analogue une classe de suites  $D$ -finies dont l'inverse au sens de Hadamard est aussi  $D$ -finie.

Nous dirons que la suite  $u(n)$  est un *emboîtement de suites hypergéométriques* s'il existe un entier  $d$  non nul et, pour tout  $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ , des fractions rationnelles  $F_r(k)$  non nulles telles que  $v_r(k) = u(kd + r)$  vérifie la relation :

$$v_r(k+1) = F_r(k)v_r(k)$$

pour tout  $k$  assez grand et pour tout  $r$ .

Il est clair que toute suite  $u(n)$  qui est un emboîtement de suites hypergéométriques est une suite  $D$ -finie, et, si de plus  $u(n) \neq 0$  pour tout  $n$ ,  $v(n) = 1/u(n)$  est aussi un emboîtement de suites hypergéométriques, donc  $D$ -finie.

Nous pensons que la réciproque est vraie :



CONJECTURE  $C_1$ . — Une suite  $u(n)$   $D$ -finie telle que  $u(n) \neq 0$  pour tout  $n$  est telle que  $v(n) = 1/u(n)$  est aussi  $D$ -finie si et seulement si  $u(n)$  est un emboîtement de suites hypergéométriques.

Ceci fournit donc une description conjecturale de l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau  $J(\mathbb{C})$ .

Cette description signifie qu'une série  $f(X) = \sum u(n)X^n$   $D$ -finie est telle que son inverse au sens de Hadamard  $\sum X^n/u(n)$  est  $D$ -finie si et seulement si  $f(X)$  est obtenue par emboîtement de séries hypergéométriques  $F\left(\begin{smallmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{smallmatrix} \middle| X\right)$ , ou de leurs transformées par  $\mathcal{L}_s(F)$ , où

$$\mathcal{L}_s\left(\sum u(n)X^n\right) = \sum \frac{u(n)}{(n!)^s} X^n, \quad s \in \mathbb{Z}.$$

Nous allons démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 2. — La conjecture  $C_1$  est vraie quand la suite  $u(n)$  vérifie une relation de récurrence à coefficients polynômes de longueur inférieure ou égale à 2.

Démonstration. — Le cas où la longueur de la récurrence vérifiée par  $u(n)$  est égale à 1, est le cas où, pour  $n$  assez grand, on a une relation de la forme

$$u(n+1) = F(n)u(n)$$

où  $F$  est une fraction rationnelle non nulle. Par suite,  $u(n)$  est une suite hypergéométrique, et il n'y a rien à démontrer.

Nous supposons donc dans la suite qu'il y a une relation de la forme :

$$(9) \quad u(n+2) = A_1(n)u(n+1) + A_0(n)u(n)$$

pour  $n$  assez grand, où  $A_1$  et  $A_0$  sont des fractions rationnelles.

On déduit de (9) que, pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on a une relation :

$$(10) \quad u(n+j) = A_{1,j}(n)u(n+1) + A_{0,j}(n)u(n)$$

pour  $n$  assez grand, où  $A_{1,j}$  et  $A_{0,j}$  sont des fractions rationnelles.

Nous nous plaçons tout d'abord dans le cas où il existe un entier  $j \geq 2$ , tel que  $A_{1,j} = 0$ . On a donc :

$$u(n+j) = A_{0,j}(n)u(n).$$

En prenant  $d = j$ , on voit alors facilement que  $u(n)$  est un emboîtement de suites hypergéométriques, ce qui termine la démonstration dans ce cas.

Nous supposons désormais  $A_{1,j} \neq 0$ , pour tout  $j \geq 2$ .

Nous savons que  $v(n) = 1/u(n)$  est  $D$ -finie. On a donc une relation de récurrence

$$(11) \quad \sum_{j=0}^t H_j(n)/u(n+j) = 0 \quad (H_0 H_t \neq 0).$$

On remplace dans (11)  $u(n+j)$  par l'expression (10). Il vient :

$$\sum_{j=0}^t \frac{H_j(n)}{A_{1,j}(n)u(n+1) + A_{0,j}(n)u(n)} = 0.$$

Posons  $a(n) = u(n+1)/u(n)$ . On a alors :

$$(12) \quad \sum_{j=0}^t \frac{H_j(n)}{A_{1,j}(n)a(n) + A_{0,j}(n)} = 0.$$

On a  $A_{1,0} = 0$ ,  $A_{0,0} = 1$ ,  $A_{1,1} = 1$ ,  $A_{0,1} = 0$ ,  $A_{1,j} \neq 0$  pour  $j \geq 2$ .

On multiplie (12) par  $a(n) \prod_{j=2}^t (A_{1,j}(n)a(n) + A_{0,j}(n))$  et on trouve la relation :

$$\sum_{j=0}^t H_j(n) \prod_{k \neq j} (A_{1,k}(n)a(n) + A_{0,k}(n)) = 0.$$

Ceci est une relation de la forme  $P(n, a(n)) = 0$ , où  $P \in \mathbb{C}(X)[Y]$ , avec  $d_Y^\circ P \leq t$ .

Le terme  $Y^t$  n'apparaît que dans l'expression

$$H_0(X)Y \prod_2^t (A_{1,k}(X)Y + A_{0,k}(X)),$$

les autres termes étant de degré  $\leq t-1$  en la variable  $Y$ . Le coefficient de  $Y^t$  dans ce facteur est égal à

$$H_0(X) \prod_2^t A_{1,j}(X) \neq 0$$

et par suite  $P(X, Y) \neq 0$ .

En chassant les dénominateurs, on trouve donc une relation de dépendance algébrique non triviale pour  $a(n)$ , sur les fonctions polynômes en la variable  $n$ .

La suite  $u(n)$  est  $D$ -finie, ainsi que la suite  $1/u(n)$ , donc il en est de même pour  $a(n)$ .

Nous pouvons alors appliquer le THÉORÈME 1 : la suite  $a(n)$  est un emboîtement de suites fractions rationnelles. Il existe donc un entier  $d \geq 1$ , et pour tout  $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  des fractions rationnelles  $F_r(X)$  telles que :

$$a(kd + r) = F_r(k)$$

ou encore :

$$(13) \quad u(kd + r + 1) = F_r(k)u(kd + r).$$

Fixons  $r_0 \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ . En écrivant (13) pour  $r = r_0, r_0+1, \dots$ , on trouve :

$$\begin{aligned} u(kd + r_0 + d) &= F_{r_0}(k)F_{r_0+1}(k) \cdots \\ &\quad F_{d-1}(k)F_0(k+1) \cdots F_{r_0-1}(k+1)u(kd + r_0). \end{aligned}$$

Soit, en posant  $v_{r_0}(k) = u(kd + r_0)$  et

$$G_{r_0}(X) = F_{r_0}(X) \cdots F_{d-1}(X)F_0(X+1) \cdots F_{r_0-1}(X+1),$$

qui est une fraction rationnelle :

$$v_{r_0}(k+1) = G_{r_0}(k)v_{r_0}(k),$$

ce qui prouve que  $u(n)$  est un emboîtement de suites hypergéométriques, et termine la démonstration du THÉORÈME 2.

*Remarques :*

1) On peut en fait démontrer en suivant la même démarche que dans le THÉORÈME 1, le résultat suivant :

*Soit  $u(n)$  une suite  $D$ -finie, que l'on suppose non nulle pour tout  $n$  (mais on ne suppose pas  $1/u(n)$   $D$ -finie). On suppose que  $a(n) = u(n+1)/u(n)$  vérifie une relation algébrique non triviale à coefficients polynômes en la variable  $n$ , alors  $u(n)$  est un emboîtement de suites hypergéométriques (et par suite  $1/u(n)$  est  $D$ -finie).*

L'hypothèse faite ici est que  $u(n)$  et  $u(n+1)$  vérifient une relation de dépendance algébrique non triviale homogène à coefficients polynômes en la variable  $n$ .

2) Comme exemple d'application du THÉORÈME 2, on a le résultat suivant : la fonction entière  $f(z) = \sum \frac{z^n}{n! + 1}$  ne vérifie aucune équation différentielle linéaire homogène à coefficients polynômes. En effet, la suite  $u(n) = n! + 1$  vérifie la relation :

$$nu(n+2) - (n^2 + 3n + 1)u(n+1) + (n^2 + 2n + 1)u(n) = 0,$$

de sorte que si  $v(n) = 1/u(n)$  est  $D$ -finie,  $u(n)$  est un emboîtement de suites hypergéométriques.

Il existe donc un entier  $d \geq 1$ , et pour  $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  des fractions rationnelles  $F_r(k)$  telles que l'on ait :

$$u((k+1)d+r) = F_r(k)u(kd+r).$$

On en déduit que

$$[(kd+r)!(kd+r) \cdots (kd+r+d) + 1] = F_r(k)[(kd+r)! + 1],$$

donc que  $F_r(k) = 1 = (kd+r) \cdots (kd+r+d)$  pour tout  $k$ , ce qui est absurde.

Nous pouvons aussi démontrer la conjecture  $C_1$  dans le cas où la suite  $u(n)$  n'est plus la suite  $D$ -finie la plus générale, mais une suite récurrente linéaire (dont l'inverse au sens de Hadamard  $v(n) = 1/u(n)$  est donc  $D$ -finie).

En fait, nous allons démontrer un résultat un peu plus général.

THÉORÈME 3. — Soient  $a(n)$  une suite récurrente linéaire (algébrique) et  $b(n)$  une suite récurrente linéaire. On suppose que  $b(n) \neq 0$  pour tout  $n$ , et que la suite  $c(n) = a(n)/b(n)$  est  $D$ -finie. Alors il existe un polynôme non nul  $P(n)$  tel que  $P(n)c(n)$  soit une suite récurrente linéaire (algébrique).

Réciproquement, on voit facilement qu'une suite  $c(n) = a(n)/P(n)$ , où  $a(n)$  est récurrente linéaire (algébrique) et  $P$  un polynôme, est  $D$ -finie.

Nous en déduirons le résultat suivant :

COROLLAIRE 1. — Soit  $b(n)$  une suite récurrente linéaire telle que  $b(n) \neq 0$  pour tout  $n$ . On suppose que  $1/b(n)$  est une suite  $D$ -finie. Alors  $b(n)$  est un emboîtement de suites hypergéométriques.

Démonstration du théorème 3. — On écrit  $b(n) = \sum_1^s P_j(n)\alpha_j^n$ , où les  $P_j \in \mathbb{C}[X]$  sont non nuls, et les  $\alpha_j$  des éléments non nuls de  $\mathbb{C}$ .

Nous aurons besoin de la notion de suite non dégénérée :

*Définition.* — Soit  $b(n) = \sum_1^s P_j(n) \alpha_j^n$  une suite de  $R(\mathbb{C})$ . On dit que  $b(n)$  est *non dégénérée* si aucun des  $\alpha_j$  n'est une racine de l'unité différente de 1 et si aucun quotient  $\alpha_i/\alpha_j$ , avec  $i$  différent de  $j$ , n'est une racine de l'unité.

Nous pouvons supposer dans la suite que  $b(n)$  est non dégénérée. En effet, si ce n'est pas le cas, il suffit de se placer sur des progressions arithmétiques  $kd+r$  convenables. Nous suivons alors une méthode utilisée dans [4].

Nous définissons la *longueur* de la suite  $b(n)$  comme étant l'entier

$$L(b) = \sum_1^t (d^\circ(P_i) + 1).$$

Une suite de longueur 1 est de la forme  $\beta \alpha^n$  où  $\alpha, \beta$  sont des éléments non nuls de  $\mathbb{C}$ . Dans ce cas,  $a(n)/b(n)$  est visiblement récurrente linéaire (algébrique) de sorte que le résultat à démontrer est vrai.

Nous procédons ensuite par récurrence sur  $L(b) = L$ , en supposant acquis le résultat pour les suites  $b(n)$  de longueur inférieure ou égale à  $L$ . Soit donc  $b(n)$  une suite de longueur  $L + 1$ . Il existe des  $Q_j \in [X]$ , tels que :

$$\sum_0^m Q_j(n) \frac{a(n+j)}{b(n+j)} = 0 \quad \text{avec} \quad Q_m(X) \neq 0.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} (14) \quad Q_m(n)b(n) \cdots b(n+m-1) \frac{a(n+m)}{b(n+m)} \\ = - \sum_{j=0}^{m-1} Q_j(n)a(n+j) \prod_{k \neq j} b(n+k) \end{aligned}$$

est une suite récurrente linéaire (une suite algébrique). Posons :

$$M_i(n) = b(n+m) - \alpha_1^{m-i} b(n+i).$$

On a  $M_i(n) = H_1(n)\alpha_1^n + H_2(n)\alpha_2^n + \cdots + H_t(n)\alpha_t^n$  avec

$$H_j(X) = P_j(X+m)\alpha_1^m - \alpha_1^{m-i}\alpha_j^i P_j(X+i)$$

de sorte que  $d^\circ H_1 \leq d^\circ P_1 - 1$ ,  $d^\circ H_j \leq d^\circ P_j$ , donc  $L(M_i) \leq L$  pour tout  $i$ .

On remplace  $b(n+i)$  dans (14) en fonction de  $b(n+m)$  et  $M_i(n)$  et on en déduit que

$$w(n) = Q_m(n)M_0(n) \cdots M_{m-1}(n) \frac{a(n+m)}{b(n+m)}$$

est une suite récurrente linéaire (une suite algébrique). On a donc

$$Q_m(n)M_0(n) \cdots M_{m-2}(n) \frac{a(n+m)}{b(n+m)} = \frac{w(n)}{M_{m-1}(n)}$$

qui est  $D$ -finie comme produit des suites  $D$ -finies

$$Q_m(n), \quad M_0(n), \dots, M_{m-2}(n) \quad \text{et} \quad \frac{a(n+m)}{b(n+m)},$$

et quotient de la suite récurrente linéaire (algébrique)  $w(n)$  par la suite récurrente  $M_{m-1}(n)$ , qui est de longueur inférieure ou égale à  $L$ .

L'hypothèse de récurrence s'applique, et il existe un polynôme non nul  $G_{m-1}$  tel que :

$$G_{m-1}(n) \frac{w(n)}{M_{m-1}(n)} = G_{m-1}(n)Q_m(n)M_0(n) \cdots M_{m-2}(n) \frac{a(n+m)}{b(n+m)}$$

est une suite récurrente linéaire (suite algébrique).

Poursuivant le procédé, on montre l'existence d'un polynôme non nul  $P$  tel que  $P(n)a(n)/b(n)$  est une suite récurrente linéaire (une suite algébrique), ce qui termine la démonstration.

*Démonstration du Corollaire 1.* — Nous pouvons appliquer le THÉORÈME 3 avec  $a(n) = 1$  pour tout  $n$ . On peut de plus supposer que  $b(n)$  est non dégénérée, on écrit :

$$b(n) = \sum_1^s P_i(n)\alpha_i^n.$$

D'après le THÉORÈME 3, il existe un polynôme non nul  $P$  tel que  $P(n)/b(n) = c(n)$  soit récurrente linéaire. On écrit :

$$c(n) = \sum_1^k Q_j(n)\beta_j^n.$$

On a alors la relation :

$$P(n) = \left( \sum_1^s P_i(n) \alpha_i^n \right) \left( \sum_1^h Q_j(n) \beta_j^n \right).$$

On écrit cette relation :

$$(15) \quad P(n) = \sum Q_\gamma(n) \gamma^n$$

où les  $\gamma$  parcourent  $\Gamma = \{ \alpha_i \beta_j ; 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq h \}$  et où on a posé :

$$Q_\gamma(X) = \sum P_i(X) Q_j(X),$$

la somme étant étendue aux indices  $(i, j)$  tels que  $\alpha_i \beta_j = \gamma$ . Il résulte de (15) et de l'unicité de l'écriture d'une suite récurrente linéaire sous la forme (2) que l'on a :

$$Q_1(X) = P(X), \quad Q_\gamma(X) = 0 \quad \text{si} \quad \gamma \neq 1.$$

Soit  $z$  un nombre complexe, choisi de façon que  $P(z) \neq 0$ ,  $P_j(z) \neq 0$  pour tout  $j$  et  $Q_i(z) \neq 0$  pour tout  $i$ . Posons

$$v(n) = \sum_1^s P_j(z) \alpha_j^n.$$

Alors cette suite récurrente linéaire est telle que  $v(n) \neq 0$  pour tout  $n$  et

$$\frac{1}{v(n)} = \sum_1^h \frac{Q_i(z)}{P(z)} \beta_i^n$$

est aussi récurrente linéaire, comme le montre la relation (15) pour  $X = z$ . On sait que dans ce cas, ou  $s = 1$ , ou la suite  $v(n)$  est dégénérée; mais par hypothèse,  $v(n)$  est — comme  $b(n)$  — non dégénérée; donc  $s = 1$ ,  $b(n) = P_1(n) \alpha_1^n$ , qui est une suite hypergéométrique, et ceci termine la démonstration du COROLLAIRE 1.

#### 4. Dépendance algébrique sur l'anneau $S(K)$

Dans cette partie, nous nous intéressons aux suites  $D$ -finies  $u(n)$  qui vérifient une relation non triviale de la forme :

$$(17) \quad \sum_{i=0}^s A_i(n)u(n)^i = 0$$

où  $A_i$  est une somme exponentielle pour tout  $i$ .

Il est clair qu'une somme exponentielle vérifie une relation analogue à (17). Nous conjecturons que c'est le seul cas.

CONJECTURE  $C_2$ . — Soit  $u(n)$  une suite  $D$ -finie vérifiant une relation de dépendance algébrique non triviale de la forme (17), les coefficients  $A_i(n)$  étant des sommes exponentielles non dégénérées. Alors  $u(n)$  est une somme exponentielle.

Ce type de propriété ressemble à des résultats dûs à RITT (cf. [9]), dans le cadre des sommes exponentielles complexes.

Nous allons démontrer quelques cas particuliers de la CONJECTURE  $C_2$ . Nous commençons par des équations de la forme  $u(n)^k - A(n) = 0$ .

THÉORÈME 4. — Soit  $A(n)$  une somme exponentielle,  $k$  un entier non nul, et  $u(n)$  une suite  $D$ -finie telle que  $u(n)^k - A(n) = 0$ . Alors  $u(n)$  est une somme exponentielle.

Démonstration. — Nous pouvons supposer, quitte à se placer sur des progressions arithmétiques convenables, que  $A(n)$  est non dégénérée.

Soit  $f(z) = \sum u(n)z^n$  la série génératrice de  $f$ .

La série  $f(z)$  a un rayon de convergence non nul, comme on le déduit de la relation  $u(n)^k = A(n)$ , et fini, sauf dans le cas où  $A(n)$  est nulle, auquel cas il n'y a rien à démontrer.

La série  $f(z)$  est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients polynômes. Par suite  $f(z)$  n'a qu'un nombre fini de singularités dans  $\mathbb{C}$ .

Toute série  $g(z)$  de la forme  $g(z) = \sum u(kd + r)z^k$  a pour singularités éventuelles des puissances  $d$ -ième des éléments de l'ensemble  $S$  des singularités de  $f$ . Comme cet ensemble est fini, on peut, quitte à se placer sur des progressions arithmétiques convenables, supposer que  $f$  n'a pas deux singularités distinctes, dont le quotient est une racine de l'unité. Soit alors :

$$(18) \quad \sum_{i=0}^t Q_i(n)u(n+i) = 0$$

une relation de récurrence vérifiée par  $u(n)$ , avec  $Q_0, Q_t \neq 0$ .



Nous posons :

$$R(Y, X_0, \dots, X_t) = \prod \left( \sum_0^t Q_i(Y) \varepsilon_i X_i \right)$$

où le produit est fait sur tous les  $(t+1)$ -uplets  $(\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_t)$  avec  $\varepsilon_i$  racine  $k$ -ième de l'unité pour tout  $i$ .

Par construction, il existe un polynôme  $S$  tel que :

$$(19) \quad S(Y, X_0^k, \dots, X_t^k) = R(Y, X_0, \dots, X_t).$$

En remplaçant  $Y$  par  $n$  et  $X_i$  par  $u(n+i)$  dans (19), et en tenant compte de  $u(n+i)^k = A(n+i)$  pour tout  $i$ , il vient :

$$(20) \quad S(n, A(n), \dots, A(n+t)) = 0.$$

Comme  $A(n)$  est une somme exponentielle, on peut appliquer la même méthode que nous avons utilisée pour démontrer le COROLLAIRE 1 : pour tout  $x$  dans  $\mathbb{C}$ , on a :

$$S(x, A(n), \dots, A(n+t)) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par suite, en choisissant  $x$  tel que  $Q_i(x) \neq 0$  si  $Q_i \neq 0$  :

$$\prod \left( \sum_0^t \varepsilon_i Q_i(x) u(n+i) \right) = 0.$$

Il existe donc un choix de  $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_t)$  tel que la suite

$$v(n) = \sum_0^t \varepsilon_i Q_i(x) u(n+i)$$

soit nulle pour un ensemble  $E$  d'indices  $n$ , dont la densité supérieure est strictement positive.

La suite  $v(n)$  est, comme  $u(n)$  une suite  $D$ -finie. On a donc

$$\sum_0^m H_j(n) v(n+j) = 0 \quad \text{avec} \quad H_m \neq 0.$$

On montre alors comme dans [3, lemme 1], que, pour tout  $d$ , la suite  $v(kd+r)$ ,  $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ , vérifie une relation de récurrence analogue, de longueur inférieure ou égale à  $m$ .

D'autre part, le fait que la densité supérieure de  $E$  soit positive montre qu'il existe dans  $E$  une infinité de progressions arithmétiques, de même raison  $d$  et de longueur  $m$  (cf. [3, p. 135]). On en déduit qu'il existe un entier  $r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  tel que  $v(kd+r) = 0$  pour  $k$  assez grand. Par suite, la série (où on a posé  $g(z) = \sum v(n)z^n$ )

$$(21) \quad h(z) = \sum \xi^{-r} g(\xi z) \quad \text{est un polynôme.}$$

Si  $g(z)$  a une singularité dans  $\mathbb{C}$ , (21) montre qu'elle a une autre singularité dont le quotient avec la première est une racine de l'unité.

D'autre part, on montre facilement que :

$$(22) \quad z^t g(z) = \left( \sum_0^t \varepsilon_i Q_i(x) z^{t-i} \right) f(z) + Q(z)$$

où  $Q$  est un polynôme.

Il résulte de (22) que toute singularité de  $g$  est une singularité de  $f$ , et donc  $g$  ne peut avoir de singularité dans  $\mathbb{C}$ , puisque  $f$  n'a pas de couple de singularités dont le quotient est une racine de l'unité. Donc  $g(z)$  est une fonction entière, et par suite  $f(z)$  est, par la formule (22), le quotient d'une fonction entière par un polynôme. On peut donc écrire :

$$(23) \quad f(z) = R(z) + W(z)$$

où  $R$  est une fraction rationnelle régulière à l'origine et nulle à l'infini, et  $w(z)$  une fonction entière. Si l'on pose

$$R(z) = \sum a(n)z^n, \quad W(z) = \sum b(n)z^n,$$

on a donc  $u(n) = a(n) + b(n)$ . Il existe deux constantes  $c_1, c_2$  positives telles que :

$$|a(n)| \leq c_1 c_2^n \quad \text{et} \quad \overline{\lim} \sqrt[n]{|b(n)|} = 0.$$

On a d'autre part :

$$(24) \quad u(n)^k = a(n)^k + \sum_1^s c_k^j b(n)^j a(n)^{k-j} = A(n).$$

On réécrit (24) sous la forme :

$$(25) \quad A(n) - a(n)^k = \sum_1^s c_k^j b(n)^j a(n)^{k-j} = c(n).$$

La fonction  $\sum c(n)z^n$  est une fonction rationnelle nulle à l'infini, puisque  $A(n) - a(n)^k$  est récurrente linéaire. Le second membre de la relation (25) montre aussi que cette fonction est entière.

Par suite  $\sum c(n)z^n = 0$ , ie  $c(n) = 0$  pour tout  $n$ . On a donc  $A(n) = a(n)^k$  tout  $n$ .

L'égalité  $A(n) = a(n)^k$  et le fait que  $A(n)$  soit une somme exponentielle permet de montrer que si  $a(n) = \sum_1^h G_i(n)\gamma_i^n$ , où les  $G_i$  sont des polynômes, alors, pour  $x$  tel que  $G_i(x) \neq 0$  pour tout  $i$ , on a, en posant  $a_1(n) = \sum_1^h G_i(x)\gamma_i^n$ , encore  $A(n) = a_1(n)^k$  en suivant la même méthode que pour le COROLLAIRE 1. On peut donc supposer que  $a(n)$  est une somme exponentielle.

L'égalité  $A(n) = u(n)^k$  montre alors que  $u(n)^k = a(n)^k$  de sorte qu'il existe une suite  $\theta_n$  à valeurs dans les racines  $k$ -ièmes de l'unité telle que  $u(n) = \theta_n a(n)$  pour tout  $n$ .

Posons  $a(n) = \sum_1^h G_i \gamma_i^n$ ; on a donc  $u(n) = \sum_1^h G_i \theta_n \gamma_i^n$ .

Il en résulte que  $u(n)$  est somme d'au plus  $h$  éléments de  $\mathbb{C}$  appartenant tous au sous-groupe de type fini du groupe multiplicatif de  $\mathbb{C}$  engendré par les  $G_i$ , les  $\gamma_i$  et les racines  $k$ -ièmes de 1.

Le théorème 4 de [2] s'applique alors et montre que, puisque  $u(n)$  est  $D$ -finie,  $u(n)$  est une somme exponentielle, et ceci termine la démonstration.

*Remarque.* — On a là un énoncé semblable à la conjecture de la racine  $k$ -ième au sens de Hadamard d'une suite récurrente linéaire; sur ce sujet, voir [1] et [10].

**THÉORÈME 5.** — *La conjecture  $C_2$  est vraie si  $u(n)$  vérifie une relation de dépendance algébrique de degré au plus deux.*

*Démonstration.* — Nous commençons par le cas de degré 1. On a alors  $A_1(n)u(n) - A_0(n) = 0$ , donc pour  $n$  assez grand on a  $u(n) = A_0(n)/A_1(n)$ . On peut appliquer le THÉORÈME 3. Il existe donc un polynôme non nul  $P(n)$  tel que  $P(n)u(n)$  soit récurrente linéaire. Posons :

$$P(n)u(n) = P(n) \frac{A_0(n)}{A_1(n)} = w(n) = \sum Q_j(n)\gamma_j^n.$$

Donc  $P(n)A_0(n) = \left(\sum Q_j(n)\gamma_j^n\right)A_1(n)$ .

Nous utilisons encore une fois la méthode du COROLLAIRE 1 et le fait que  $A_0(n)$ ,  $A_1(n)$  soient des sommes exponentielles, pour montrer que si  $x \in \mathbb{C}$  tel que  $P(x) \neq 0$ ,  $Q_j(x) \neq 0$  pour tout  $j$ , on a

$$P(x)A_0(n) = \left(\sum Q_j(x)\gamma_j^n\right)A_1(n),$$

de sorte que  $u(n) = 1/P(x) \sum Q_j(x) \gamma_j^n \in S(\mathbb{C})$ , d'où l'assertion.

Nous passons maintenant au cas du degré 2. La suite  $D$ -finie  $u(n)$  vérifie donc une relation

$$A_2(n)u(n)^2 + A_1(n)u(n) + A_0(n) = 0$$

où les  $A_i(n)$  sont des sommes exponentielles non dégénérées.

Posons  $v(n) = A_2(n)u(n)$ . La suite  $v(n)$  est encore  $D$ -finie, et vérifie :

$$v(n)^2 + A_1(n)u(n) + A_0(n)A_2(n) = 0.$$

On écrit

$$w(n) = v(n) + \frac{1}{2}A_1(n).$$

La suite  $w(n)$  est  $D$ -finie et vérifie la relation :

$$w(n)^2 = \frac{1}{4}A_1(n)^2 - A_0(n)A_2(n) = A(n) \quad \text{et} \quad A(n) \in S(\mathbb{C}).$$

On peut donc appliquer le THÉORÈME 4, et par suite  $w(n)$  est une somme exponentielle. Il en est donc de même de  $v(n) = A_2(n)u(n)$ . Le cas  $k = 1$  que nous venons de démontrer montre alors que  $u(n)$  est dans  $S(\mathbb{C})$ , et ceci termine la démonstration.

*Remarque.* — On peut se poser la question plus générale suivante : soit  $u(n)$  une suite  $D$ -finie qui vérifie une relation de la forme

$$\sum A_i(n)u(n)^i = 0$$

où les  $A_i$  sont des suites récurrentes linéaires (et non plus des sommes exponentielles) non dégénérées. Existe-t-il alors un polynôme  $P$  non nul tel que  $P(n)u(n)$  soit une suite récurrente linéaire ?

Les méthodes utilisées pour les cas où nous savons démontrer la conjecture  $C_2$  ne marchent évidemment pas dans ce cadre.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BENZAGHOU (B.). — *Algèbres de Hadamard*, Bull. Soc. Math. France, t. **98**, 1970, p. 209–252.
- [2] BEZIVIN (J.-P.). — *Sur un théorème de G. Polya*, J. Reine Angew. Math., t. **364**, 1986, p. 60–68.
- [3] BEZIVIN (J.-P.). — *Une généralisation du théorème de Skolem-Mahler-Lech*, Quart. J. Math. Oxford, t. **40**, 1989, p. 133–138.
- [4] BEZIVIN (J.-P.). — *Quotient de fonctions entières et quotients de Hadamard de séries formelles*, Ann. Inst. Fourier, t. **39**, 1989, p. 737–752.
- [5] CIERLENCO (I.), MIGNOTTE (M.) et PIRAS (F.). — *Suites récurrentes linéaires : propriétés algébriques et arithmétiques*, Enseign. Maths, t. **33**, 1987, p. 67–108.
- [6] JUNG (R.). — *Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébriques-logarithmiques sur leur cercle de convergence*, Comment. Math. Helv., t. **3**, 1931, p. 266–306.
- [7] POLYA (G.). — *Arithmetische Eigenschaften der Reihenentwicklungen rationaler Funktionen*, J. Reine Angew. Math., t. **151**, 1921, p. 1–31.
- [8] REUTENAUER (C.). — *Sur les éléments inversibles de l'algèbre de Hadamard des séries rationnelles*, Bull. Soc. Math. France, t. **110**, 1982, p. 225–232.
- [9] RITT (J.-F.). — *Algebraic combination of polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **31**, 1929, p. 654–689.
- [10] RUMELY (R.) and VAN DER POORTEN (A.). — *A note on the  $k$ -th root of a rational function*, J. Austr. Math. Soc., t. **43**, 1987, p. 314–327.
- [11] STANLEY (R.P.). — *Differentially finite power series*, European J. Combin., t. **1**, 1980, p. 175–188.