

# BULLETIN DE LA S. M. F.

RÉMI LANGEVIN

FÉLIX PRZYTICKI

## **Entropie de l'image inverse d'une application**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 120, n° 2 (1992), p. 237-250

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1992\\_\\_120\\_2\\_237\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_2_237_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ENTROPIE DE L'IMAGE INVERSE D'UNE APPLICATION

PAR

RÉMI LANGEVIN et FÉLIX PRZYTICKI (\*)

---

RESUME. — Nous montrons que l'entropie de la relation image inverse d'une application rationnelle de la sphère de Riemann ou d'une application monotone par morceaux de l'intervalle est nulle. Nous donnons aussi un exemple d'application dont l'image inverse à une entropie plus grande que celle de l'application de départ, répondant à une question de J. PALIS.

ABSTRACT. — We show that the entropy of the relation inverse to a rational map of the riemann sphere or to a piecewise monotone map of the interval is zero. We give also an exemple of map the inverse image of which has entropy bigger than the entropy of the map itself, answering a question of J. PALIS.

### 1. Introduction

L'entropie topologique d'une application mesure comment les itérées d'une application éloignent des points initialement proches. De même qu'une application, une relation peut être itérée.

Soit donc  $R$  une relation définie sur un espace  $X$  muni d'une métrique  $d$ , compact pour la topologie définie par cette métrique.

*Définitions :*

- $R(x) = \{y \in X \mid x R y\}$ .
- $R(A) = \bigcup_{x \in A} R(x)$ .
- Une relation  $R$  est *compacte* si, pour tout compact  $A$ , l'ensemble  $R(A)$  est compact.

---

(\*) Texte reçu le 5 mars 1991

R. LANGEVIN, Université de Bourgogne, Dépt. de Mathématiques, B.P. 138, 21004 Dijon Cedex, France.

F. PRZYTICKI, Instytut matematyczny, Polskiej Akademii Nauk, Ul. Sniadeckich 8 skryłka Pocztowa Nr 27, 00-950 Warszawa, Pologne.

Classification AMS : 58F23.

• La relation  $f^{-1}$ , image inverse de l'application  $f$ , est définie par :  $xf^{-1}y$  si  $x = f(y)$ .

*Remarque.* — L'application  $f^{-1}$  est compacte si l'application  $f$  est propre.

Rappelons maintenant la définition de l'entropie d'une relation (cf. [L-W]). Cette définition a été suscitée par l'étude des feuilletages (cf. [G-L-W]). Le lecteur trouvera sans doute les notations plus naturelles en pensant à la relation  $R_{\mathcal{F}}$  : être sur la même feuille de  $\mathcal{F}$ , et être contenus dans une boule de rayon 1 pour la métrique induite sur cette feuille.

Nous supposons ici que la relation  $R$  est compacte.

*Définitions :*

• La relation  $R_n$ ,  $n$ -ième itérée de  $R$ , est définie par  $R_0 = \text{Id}$ ,  $x R_n y$  s'il existe une chaîne  $(x, x_1, \dots, x_n = y)$ , telle que  $x R x_1 R \dots R x_n$ .

•  $T_n(x)$ , le  $n$ -ième arbre de  $x$ , est l'espace des chaînes  $\alpha = (x, x_1, \dots, x_j)$  de longueur  $j \leq n$ , satisfaisant  $x R x_1 R \dots R x_j$ .

• Notons  $T(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n(x)$ .

• Notons  $p$  l'application qui supprime le dernier maillon d'une chaîne  $\alpha = (x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  soit  $p(\alpha) = (x, x_1, \dots, x_{n-1})$ .

•  $L_n(x) = \bigcup_{j \leq n} R_j(x)$ .

• La feuille de  $x$ ,  $L(x)$ , est définie par :

$$L(x) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n(x).$$

Donnons encore quelques définitions utiles pour manipuler les chaînes.

*Définitions :*

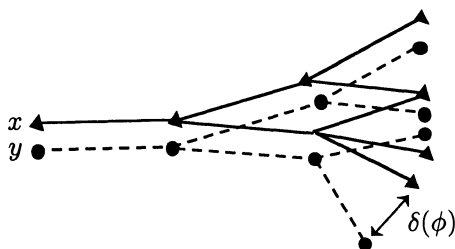
• L'application  $\text{fin} : T_n(x) \mapsto X$  est définie par  $\text{fin}(x, x_1, \dots, x_j) = x_j$ .

• Une application  $\phi$  de  $T(x)$  dans  $X$  est *bien enchaînée* si

$$\phi(p(\alpha)) R \phi(\alpha).$$

• Le *déplacement*  $\delta(\phi)$  d'une application  $\phi$  de l'arbre  $T_n(\phi)$  dans une feuille  $L(y)$  qui envoie la chaîne  $(x)$  sur le point  $y$  est définie par :

$$\delta(\phi) = \sup_{\alpha \in T_n(x)} d(\text{fin}(\alpha), \phi(\alpha))$$



Ceci, plagiant la définition de l'entropie topologique d'une application, nous permet de définir sur  $X$  une suite d'écarts :

$$d_n(x, y) = \inf_{\phi \in \Omega(x, y)} \delta(\phi) + \inf_{\phi \in \Omega(y, x)} \delta(\phi)$$

où  $\Omega(x, y)$  est l'ensemble des applications bien enchainées de  $T_n(x)$  dans  $L(y)$  qui envoient  $(x)$  sur  $y$ . Nous pouvons maintenant définir des ensembles  $(n, \varepsilon, \mathfrak{U})$  générateurs par :  $A \subset \mathfrak{U}$  est  $(n, \varepsilon, \mathfrak{U})$ -générateur si :

$$\forall z \in \mathfrak{U}, \exists x_i \in A \text{ tel que } d(z, x_i) \leq \varepsilon.$$

Soit  $N_R(n, \varepsilon, \mathfrak{U}) = \inf \text{card}(A \text{ } (n, \varepsilon, \mathfrak{U})\text{-générateur})$ .

Définissons enfin l'entropie  $h(R)$  de la relation  $R$  par :

*Définition.*

$$h(R) = \inf_{\varepsilon > 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{Log } N_R(n, \varepsilon, \mathfrak{U}).$$

Il a été démontré dans [L-W] que l'entropie de la relation image inverse d'une application de classe  $C^1$  par morceaux, expansive, de l'intervalle est nulle. On trouvera aussi dans [L-W] des exemples de relations d'entropie non nulle. Nous montrerons ici les résultats suivants :

**PROPOSITION** (dimension 1 réelle). — *Soit  $f : I \rightarrow I$  une transformation de l'intervalle continue par morceaux et monotone par morceaux. L'entropie de la relation image inverse est nulle.*

Récemment Z. NITECKI et le second auteur ont montré ce résultat pour toute application continue de l'intervalle. Voir [N-P].

**THÉORÈME** (dimension 1 complexe). — *Soit  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  une application rationnelle de la sphère de Riemann dans elle-même. L'entropie de la relation image inverse est nulle.*

Nous donnerons une démonstration détaillée du théorème, bien que la plupart des idées nécessaires à la preuve puissent être tirées des articles [Ly<sub>1</sub>] et [Ly<sub>2</sub>] de LYUBITCH; voir aussi [P].

La situation est très différente en dimension plus grande que 1. Il existe dès la dimension réelle 2 des homéomorphismes d'entropie non nulle. L'homéomorphisme inverse a dans ce cas la même entropie. Nous construirons ici un exemple de transformation  $f$  de  $S^2$  satisfaisant :

$$h(f^{-1}) > h(f).$$

Nous remercions J. PALIS pour de fructueuses conversations pendant l'élaboration de ce travail.

## 2. Démonstrations

Démontrons d'abord la proposition.

Soit  $F$  la réunion d'un réseau fini de points de l'intervalle  $I$  au moins  $\frac{1}{2}\varepsilon$  proches, des points de discontinuité de  $f$ , des points de retour de  $f$  (points au voisinage desquels  $f$  n'est pas monotone), et des extrémités de  $I$ . Soit  $N_F$  le nombre de points de  $F$  et soit

$$F(n) = F \cup f(F) \cup \dots \cup f^n(F).$$

Si  $x$  et  $y$  sont deux points appartenant à un même intervalle de  $I \setminus F(n)$ , les arbres  $T_n(x)$  et  $T_n(y)$  sont naturellement isomorphes et deux chaînes analogues  $\alpha$  et  $\alpha'$  de ces deux arbres satisfont  $d(\text{fin}(\alpha), \text{fin}(\alpha')) < \frac{1}{2}\varepsilon$ , puisque  $\text{fin}(\alpha)$  et  $\text{fin}(\alpha')$  appartiennent au même intervalle de  $I \setminus F$ . On en déduit que le nombre de points d'un ensemble  $(n, \varepsilon)$ -séparé est inférieur ou égal au nombre d'intervalles de  $I \setminus F(n)$ , donc à  $nN$ , ce qui montre que l'entropie de  $f^{-1}$  est nulle.

Commençons maintenant la démonstration du théorème.

Notons  $\text{Crit}(f)$  l'ensemble des points critiques de  $f$  et posons

$$\text{Crit}(n) = \bigcup_{j=1}^n f^j(\text{Crit}(f)), \quad n = 1, 2, \dots$$

Notons encore  $\text{CritPer}$  l'ensemble des points périodiques ayant un point critique dans leur orbite. Nous allons séparément chercher un  $(\varepsilon, n)$ -réseau (ensemble  $(\varepsilon, n)$ -générateur) loin de  $\text{Crit}(n)$ , près de  $\text{Crit}(n) \setminus \text{CritPer}$  et près de  $\text{CritPer}$ .

Pour chaque entier  $n$ , définissons la famille  $\mathfrak{D}_n$  des disques  $B(x, r)$  de la sphère de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  centrés en un point  $x$  de  $\mathbb{C}$ , de rayon  $r$  positif, et tel que  $B(x, 2r) \cap \text{Crit}(n) = \emptyset$ .

LEMME 1. — *Il existe une constante  $K_1 > 0$  (qui ne dépend que de  $f$ ) telle que, pour tout  $D \in \mathfrak{D}_n$ , pour tout  $n \geq 1$  et pour  $0 < \varepsilon < 1$  on ait :*

$$N(\varepsilon, n, D) \leq K_1 \varepsilon^{-2}.$$

*Démonstration.* — Chaque branche  $f_\nu^{-1}$  de  $f^{-j}$  sur  $D$ , pour  $0 < j \leq n$ , est — par le théorème de Kœbe — de distorsion bornée, ce qui veut dire que l'on a pour tout  $x, y$  de  $D$  :

$$\frac{|(f_\nu^{-j})'(x)|}{|(f_\nu^{-j})'(y)|} < K_2.$$

La constante  $K_2$  est indépendante de  $D$  et de la branche  $f_\nu^{-j}$  dès que  $f_\nu^{-j}(D)$  évite trois points de  $\widehat{\mathbb{C}}$  choisis au préalable. Il ne faut pas oublier que nous travaillons avec la métrique de la sphère de Riemann où la famille :

$$g_n : B(0, 1) \longrightarrow \mathbb{C} \subset \widehat{\mathbb{C}}, \quad g_n(z) = nz$$

n'est pas formée d'applications de distorsion uniformément bornée sur le domaine  $|z| < \frac{1}{2}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Nous pouvons ici supposer que  $D$  est assez petit pour être disjoint d'une orbite périodique de période supérieure ou égale à 3. En effet si  $f$  est de degré supérieur à 1, il existe au moins deux orbites périodiques de période supérieure ou égale à 3, puisque les points périodiques sont denses dans l'ensemble de Julia qui est infini et que les points périodique de période donnée sont en nombre fini (voir FATOU [Fa] Chap. 4, p. 45). Un disque assez petit est alors disjoint d'au moins une de ces orbites. Les images inverses  $f^{-n}(D)$  sont aussi disjointes de cette orbite. Si  $D$  est trop grand, il suffit de le découper.

Montrons que si  $x$  et  $y$  sont deux points de  $D$  nous avons :

$$\frac{\text{dist}(f_\nu^{-j}(x), f_\nu^{-j}(y))}{\text{dist}(x, y)} \leq \frac{2K_2 \text{diam}(\widehat{\mathbb{C}})}{\text{diam}(D)} = \frac{2K_2}{\text{diam}(D)}$$

(nous supposons que  $\text{diam}(\widehat{\mathbb{C}}) = 1$ ). Soit  $q$  le centre de  $D$ .

Pour obtenir le terme de droite de l'inégalité, observons qu'il existe une courbe  $\gamma$  contenue dans  $f_\nu^{-j}(D)$  qui joint le bord  $\partial(f_\nu^{-j}(D))$  au point  $f_\nu^{-j}(q)$  et est de longueur inférieure au diamètre de  $\widehat{\mathbb{C}}$ . La longueur de  $f^j(\gamma)$  est supérieure ou égale au rayon  $\frac{1}{2} \text{diam}(D)$  de  $D$ , et donc :

$$\frac{\text{longueur}(\gamma)}{\text{longueur } f^j(\gamma)} < \frac{2 \text{diam}(\widehat{\mathbb{C}})}{\text{diam}(D)}.$$

Ceci implique que pour au moins un point  $z$  de  $D$  on a :

$$|(f_\nu^{-j})'(z)| < \frac{2 \operatorname{diam}(\widehat{\mathbb{C}})}{\operatorname{diam}(D)}.$$

Le lemme de Koebe nous fournit la majoration uniforme

$$(f_n^{-j}u)' \leq \frac{K_2 \operatorname{diam}(\widehat{\mathbb{C}})}{\operatorname{diam} D}$$

sur  $D$  qui nous permet de vérifier que si  $\operatorname{dist}(x, y) \leq \varepsilon \frac{\operatorname{diam}(D)}{2K_1}$ , on a  $d_n(x, y) \leq \varepsilon$  et donc que :

$$N(n, \varepsilon, D) \leq \left( \frac{\operatorname{diam}(D)}{\varepsilon \operatorname{diam}(D)/2K_2} \right)^2 = (2K_2)^2 \varepsilon^{-2},$$

ce qui démontre le lemme.

Considérons maintenant un voisinage de CritPer.

LEMME 2. — *Soit  $p$  un point de CritPer. Il existe un voisinage  $D_p$  de  $p$  et des constantes  $K_3$  et  $k$  positives, dépendant seulement de  $f$  telles que pour tout  $0 < \varepsilon < 1$  et tout  $n \geq 0$ , on ait :*

$$N_{f^{-1}}(n, \varepsilon, D_p) \leq K_3 n \varepsilon^{-k}.$$

Remarquons que, puisque CritPer ne contient qu'un nombre fini de points, la constante  $K_3$  peut être commune à tous les points  $p \in \text{CritPer}$ .

*Démonstration.* — Nous allons nous servir de la PROPOSITION 1 et du fait qu'il n'y a pas de récurrence dans les domaines d'attraction des puits.

Nous pouvons supposer que le point  $p$  est laissé fixe par  $f$  (sinon il suffit de considérer un itéré de  $f$ ). Soit  $H$  une application holomorphe qui conjugue  $f$  et l'application  $g(z) = az^d$ , qui est définie sur le disque  $\{|z| < r_0\}$  et dont la dérivée satisfait :  $|H'(z)| < 2$  ainsi que  $|1/H'(z)| < 2$ . Prenons  $D_p = H(\{|z| < r_0\})$  comme voisinage de  $p$ .

Intéressons-nous un moment à l'application  $\phi$  de l'intervalle  $[0, r_0]$  dans lui-même définie par  $\phi(r) = ar^d$ . Le calcul fait pour démontrer la PROPOSITION 1 donne ici la majoration :

$$N_{\phi^{-1}}(n, \delta, [0, r_0]) \leq (n+1)(r_0/\delta + 1)$$

quels que soient  $n$  et  $\delta > 0$ . En revenant à l'application complexe  $az^d$ , c'est-à-dire en tenant compte de l'argument, on obtient :

$$N_{g^{-1}}(n, \delta, \{|z| < r_0\}) \leq 2\pi(n+1)(r_0/\delta + 1)^2.$$

Cependant deux branches  $x_j = g_\nu^{-j}(x_0)$  et  $y_j = g_\nu^{-j}(y_0)$  (où  $g(x_j) = x_{j-1}$  et  $g(y_j) = y_{j-1}$ ) peuvent rester  $\delta$ -proches sans que les images inverses  $g^{-j}(x_0)$  soient contenues dans la boule  $B(0, r_0)$  pour tout  $j \leq n$ .

Dans ce cas il existe des constantes  $C$  et  $\beta$  telles que les branches correspondantes  $f^{-j}(H^{-1}(x_0))$  et  $f^{-j}(H^{-1}(y_0))$  soient  $C\delta^\beta$ -proches, ceci quelque soit  $j$ . En effet les points d'une branche ne peuvent rester proches de points critiques dans le bassin d'attraction immédiate de  $p$  qu'un nombre fini de fois avant de tomber dans un disque  $D \in \mathfrak{D}_\infty$  (où  $\mathfrak{D}_\infty = \bigcup_n \mathfrak{D}_n$ ) dont le diamètre ne dépend pas de  $\delta$ .

En utilisant la propriété de distorsion bornée comme dans la démonstration du LEMME 1, on montre qu'à partir de  $D$  les branches ne peuvent s'écarter beaucoup.

Le même raisonnement règle le cas des branches qui sortent de  $D_p$  en sautant loin de  $p$  ou même hors du bassin de  $p$ . Il suffit maintenant de prendre  $k = 1/\beta$  pour obtenir l'inégalité du LEMME 2.

Considérons maintenant des valeurs critiques loin de CritPer. Montrons d'abord un résultat classique mais important, utilisé par exemple dans [P-U-Z], qui affirme que très peu de temps est passé extrêmement près des points critiques non périodiques.

LEMME 3. — *Étant donné un voisinage arbitraire  $\nu$  de l'ensemble CritPer, pour tout  $\alpha > 0$  (petit) il existe des nombres  $r(\alpha)$  et  $n_0 = n_0(\alpha)$  tels que pour tout  $n \geq n_0$ , étant donnée une suite  $(x = x_0, x_1, \dots, x_n)$  de points de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \nu$  telle que  $f(x_j) = x_{j-1}$ , on ait :*

$$\frac{1}{(n+1)} \text{Card} \left\{ j \in \{0, \dots, n\} \mid \text{dist}(x_j, \text{Crit}(f)) < r(\alpha) \right\} \leq \alpha.$$

*Démonstration.* — Pour tout  $k$  il existe  $\varepsilon = \varepsilon(k)$  tel que

$$\forall 1 \leq \ell \leq k, \forall c \in \text{Crit}(f) \setminus \text{CritPer}, \forall x \in \widehat{\mathbb{C}},$$

on ait : soit  $\text{dist}(x, c) > \varepsilon$ , soit  $d(f^\ell(x), c) > \varepsilon$ , puisque sinon  $c$  serait périodique de période inférieure ou égale à  $k$ .

Soit  $N = \text{Card}(\text{Crit}(f) \setminus \text{CritPer})$ . Prenons  $k = 2N/\alpha$  et

$$r(\alpha) = \min(\varepsilon(k), \text{dist}(\widehat{\mathbb{C}} \setminus \nu, \text{CritPer})).$$

Pour toute chaîne  $(x_k, \dots, x_0)$ , (avec  $f(x_j) = x_{j-1}$ ), nous avons :

$$\text{Card} \left\{ j \in \{0, \dots, k\} \mid \text{dist}(x_j, \text{Crit}(f)) < r(\alpha) \right\} \leq N,$$



puisque chaque point critique de  $\text{Crit}(f) \setminus \text{CritPer}$  ne peut apparaître à distance inférieure à  $r(\alpha)$  que près d'au plus un point de la trajectoire  $(x_k, \dots, x_0)$ , tandis que ces points critiques non périodiques sont à distance supérieure ou égale à  $r(\alpha)$  de  $\text{CritPer}$ . Soit maintenant  $(x_j)$ ,  $j = 0, \dots, n$  une trajectoire de longueur  $n = tk + \ell$ , avec  $t \geq 1$ ,  $0 \leq \ell < k$  et où  $t, \ell, k$  sont entiers, trajectoire choisie comme dans le LEMME 3; nous avons :

$$\begin{aligned} \text{Card} \left\{ j \in \{0, \dots, n\} \mid \text{dist}(x_j, \text{Crit}(f)) < r(\alpha) \right\} \\ \leq (t+1)N = \frac{1}{2} \alpha k(t+1) \leq \alpha n \end{aligned}$$

pour  $t \geq 1$ , c'est-à-dire  $n \geq n(\alpha) = k$ .

*Remarque.* — Nous appliquerons ce lemme en prenant

$$\nu = \bigcup_{p \in \text{CritPer}} D_p,$$

où les disques  $D_p$  seront choisis en utilisant le LEMME 2 et de sorte que  $f(\nu) \subset \nu$ . Il est alors suffisant de supposer que la chaîne  $x$  ne rencontre pas  $\nu$ .

LEMME 4. — *Étant donnés des nombres  $\delta > 0$ ,  $\varepsilon > 0$ , pour tout point  $a \in \text{Crit}_n \setminus \nu$  ( $\nu$  choisi à la fin du LEMME 3), quelque soient  $0 \leq m \leq n$ , si  $n$  est assez grand, toute composante  $V$  de  $f^{-m}(B(a, \exp(-\exp n\delta)))$  est de diamètre inférieur ou égal à  $\varepsilon$ .*

*Démonstration.* — En prenant en compte respectivement tous les points de  $\widehat{\mathbb{C}}$  ou seulement les points éloignés des points critiques, nous observons que :

$$(1) \quad \begin{cases} \exists \beta > 0, \exists \xi > 1, \forall x \in \overline{\mathbb{C}}, \forall \hat{r} > 0, \\ \forall V \text{ composante de } f^{-m}(B(a, \exp(-\exp n\delta))) \end{cases}$$

$$\text{on a :} \quad \text{diam } V \leq \xi \hat{r}^\beta.$$

$$(2) \quad \begin{cases} \forall r > 0, \exists \xi > 1, \forall x \in \overline{\mathbb{C}}, \text{dist}(x, \text{Crit}(f)) \geq r, \\ \forall \hat{r} > 0, \forall V \text{ composante de } f^{-1}(B(x, \hat{r})) \end{cases}$$

$$\text{on a :} \quad \text{diam } V \leq \xi \hat{r}.$$

Posons maintenant  $\exp(-\exp n\delta) = \eta$ . Notons  $V_j$ , pour  $j = 0, \dots, n$ , des composantes de  $f^{-j}(B(a, \eta))$  choisies de sorte que  $f(V_j) = V_{j-1}$  et  $V_n = V$  et choisissons une chaîne  $a_j \in V_j$  telle que  $f(a_j) = a_{j-1}$ .

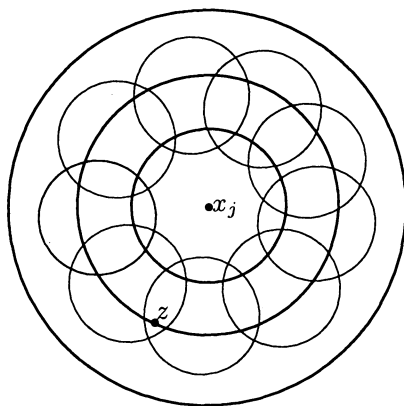
Étant donné  $\alpha > 0$  arbitraire, et en choisissant  $r(\alpha)$  comme dans le LEMME 3, on en déduit en appliquant les propriétés (1) et (2) aux points de la chaîne  $x = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ , et en choisissant, pour appliquer la propriété (2),  $r = r(\alpha)$ , que :

$$\text{diam } V_j \leq \eta^{\beta(\alpha j)} \xi^j \exp(-\exp(n\delta + \alpha j \text{Log } \beta) + j \text{Log } \xi)$$

d'où  $\text{diam } V_j \leq \exp(-\exp(\frac{1}{2}n\delta)) \leq \varepsilon$  quels que soient  $j \leq n$ ,  $\alpha$  assez petit et  $n$  assez grand.

Lorsque  $j$  est supérieur ou égal à  $n_0(\alpha)$ , nous utilisons le LEMME 3, qui garantit que nous n'avons à utiliser la propriété 1) qu'une proportion  $\alpha$  du temps, tandis que sinon nous pouvons utiliser la propriété 2). Ceci et le calcul précédent lorsque  $j \leq n_0(\alpha)$  termine la démonstration du LEMME 4.

Introduisons encore un dernier lemme géométrique.



LEMME 5. — Étant donné un ensemble fini  $F = x_1, \dots, x_N$  de  $\widehat{\mathbb{C}}$  et un nombre  $\eta > 0$ , il existe un recouvrement de  $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{j=1}^N B(x_j, \eta)$  par une famille  $\mathfrak{B}$  de disques  $B(z, r(z))$  telle que

$$B(z, r(z)) \cap \{x_1, \dots, x_N\} = \emptyset$$

et

$$\text{Card } \mathfrak{B} \leq KN \left( \frac{\text{Log } \eta}{\text{Log}(\frac{3}{4})} + 1 \right)$$

où la constante  $K$  ne dépend que de la métrique de  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Démonstration.* — L'idée est de recouvrir des anneaux homothétiques centrés aux points de  $F$ . Rappelons que  $\text{diam } \widehat{C} = 1$ . Pour chaque  $x$ , nous recouvrons  $B(x_j, 1) \setminus B(x_j, \eta)$  par des anneaux

$$A_{j,k} = B(x_j, (\frac{3}{4})^k) \setminus B(x_j, (\frac{3}{4})^{k+1}),$$

pour  $k = 0, \dots, [\text{Log}(\eta)/\text{Log}(\frac{3}{4})]$ , où les crochets désignent la partie entière. Recouvrons ensuite chacun des ensembles

$$A'_{j,k} = A_{j,k} \setminus \bigcup_{t=1}^N B(x_t, (\frac{3}{4})^{k+1})$$

par une famille  $\mathfrak{B}_{j,k}$  de disques de rayon  $\frac{1}{2}(\frac{3}{4})^{k+1}$ . Les constantes sont choisies pour que l'on puisse imposer à ces disques d'être centrés en des points  $z$  du cercle  $\{\text{dist}(z, x_j) = (\frac{3}{4})^k\}$ . En comptant les disques nécessaires pour recouvrir un anneau on trouve une constante  $K$  indépendante de  $j$  et  $k$  telle que  $\text{Card } \mathfrak{B}_{j,k} \leq K$ . On a donc :

$$\text{Card} \bigcup_{j,k} \mathfrak{B}_{j,k} \leq KN \left[ \frac{\text{Log}(\eta)}{\text{Log}(\frac{3}{4})} \right]. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant terminer la démonstration du théorème.

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  et  $n$  entier. Appliquons le LEMME 5 à l'ensemble  $\text{Crit}_n = \{x_1, \dots, x_N\}$  en choisissant  $\eta = \eta_n = \exp(-\exp(n\delta))$ . Nous obtenons une famille  $\mathfrak{B}_n$  de disques extrait du recouvrement  $\mathfrak{D}_n$  de  $\widehat{C} \setminus B_n$  où  $B_n = \bigcup_{x \in \text{Crit}(f)} B(x, \eta_n)$  telle que :

$$\text{Card } \mathfrak{B}_n = Kn(2 \deg(f) - 2) \left( \frac{\exp(n\delta)}{\text{Log}(\frac{4}{3})} + 1 \right).$$

En effet  $\text{Card } \text{Crit}(f) \leq 2 \deg(f) - 2$  et

$$\text{Card } \text{Crit}_n(f) \leq n \text{ Card}(\text{Crit}(f)).$$

Donc par le LEMME 1 :

$$N(\varepsilon, n, \widehat{C} \setminus B_n) = K_3 n \text{ Card}(\text{CritPer}) \varepsilon^{-k}.$$

En choisissant  $\nu$  comme dans les LEMMES 2 et 3 et la remarque qui suit, nous obtenons :

$$N(\varepsilon, n, \nu) \leq K_3 n \text{ Card}(\text{CritPer}) \varepsilon^{-k}.$$

En appliquant le LEMME 4 à chaque point  $x \in \text{Crit}_n \setminus \nu$  nous voyons que  $N(\varepsilon, n, B(x, \eta_n)) = 1$ . Comme  $(\widehat{\mathbb{C}} \setminus B_n) \cup (\bigcup_{x \in \text{Crit}_n \setminus \nu}) \cup \nu = \mathbb{C}$ , nous obtenons, pour  $n$  assez grand l'inégalité :

$$N(\varepsilon, n, \widehat{\mathbb{C}}) \leq C(\varepsilon) n \exp(n\delta)$$

où  $C(\varepsilon)$  est une constante qui ne dépend que de  $f$  et de  $\varepsilon$ . Nous venons de montrer que  $h(f^{-1}) \leq \delta$ . Mais comme  $\delta$  peut être choisi arbitrairement petit, nous avons  $h(f^{-1}) = 0$ .  $\square$

### 3. Exemple de transformation telle que $h(f^{-1}) > h(f)$

Nous allons construire une application  $f$  lisse, disons de la sphère  $S^2$  dans elle même (puisque en fait la construction est locale) telle que  $h(f^{-1}) \geq 2 \text{Log } 2$  tandis que  $h(f) = \log 2$ .

L'application  $f$  envoie de la manière habituelle le carré  $K_1 = [0, 1] \times [0, 1]$  sur un fer à cheval  $H_1$  qui se termine sur la droite  $y = 4$ , (les directions instables sont verticales) (voir la figure 3 page 248.)

Le carré  $K_2 = [0, 1] \times [2, 3]$  est envoyé sur un fer à cheval  $H_2$ . L'image par  $f$  du carré  $[0, 1] \times [1, 2]$  est indiquée sur la figure 3 où sont indiquées les images des segments horizontaux.

Notons  $\mathfrak{B}_1^u$  la lamination instable de l'ensemble basique de la restriction de  $f$  à  $K_1$ , et  $\mathfrak{B}_2^u$  la lamination instable de l'ensemble basique de la restriction de  $f$  à  $K_2$ . Soit  $C$  l'ensemble de Cantor formé par l'intersection  $K_2 \cap \mathfrak{B}_1^u \cap \mathfrak{B}_2^u$ . Si deux points  $x$  et  $y$  de  $C$  appartiennent à des composantes différentes de  $(f|_{K_1})^n(K_1) \cap K_2$  leurs images inverses  $(f|_{K_1})^{-j}(x)$  et  $(f|_{K_1})^{-j}(y)$  sont pour un nombre  $1 \leq j \leq n$  dans des composantes différentes de  $K_1 \cap (f|_{K_1})^{-1}(K_1)$  et donc loin l'une de l'autre. Il en est de même si l'on considère les images par  $(f|_{K_2})^{-j}$  de deux points  $x$  et  $y$  de  $C$  appartenant à des composantes différentes de  $K_2 \cap (f|_{K_2})^n(K_2)$ . Cependant dans  $L(x)$  le seul candidat à rester proche de  $(f|_{K_i})^{-j}(y)$  pour  $j = 0, 1, \dots, n$  est  $(f|_{K_i})^{-j}(x)$ ;  $i = 1, 2$ .

Si nous supposons par exemple que les composantes de

$$K_i \cap (f|_{K_i})^{-1}(K_i)$$

sont séparées par une distance de 0.1 nous obtenons :

$$N((0.1), n, C) \geq 2^n \cdot 2^n = 4^n \quad \text{et} \quad h(f^{-1}) \geq 2 \text{Log } 2.$$

Afin de construire une application  $f$  globalement définie sur  $S^2$  il suffit de l'obtenir comme une perturbation du fer à cheval de la figure 4 (page 249) en créant un nouveau fer à cheval près du puits  $P$ .



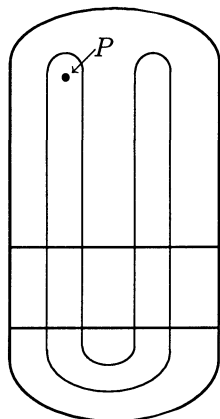


Figure 4.

transformation de  $S^2$  ayant seulement (pour des raisons topologiques) deux points critiques quadratiques.

## BIBLIOGRAPHIE

- [F] FATOU (P.). — *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. France, t. **47**, 1919, p. 161–271 et t. **48**, 1920, p. 208–314.
- [G-L-W] GHYS (E.), LANGEVIN (R.) et WALCZAK (P.). — *Entropie géométrique des feuilletages*, Acta Math., t. **160**, 1988, p. 105–142.
- [L-W] LANGEVIN (R.) et WALCZAK (P.). — *Entropie d'une dynamique*, C.R. Acad. Sci. Paris, 1991.
- [Lyu1] LYUBICH (M.). — *Entropy of analytic endomorphisms of the Riemann sphere*, Functional Anal. Appl., t. **15.4**, 1981, p. 83–84.
- [Lyu2] LYUBICH (M.). — *Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere*, Ergodic Theory Dynamical Systems, t. **3**, 1983, p. 351–386.
- [N-P] NITECKI (Z.) and PRZYTICKI (F.). — *The entropy of the relation inverse to a map II*, Preprint, 1990.

- [P] PRZYTICKI (F.). — *On the Perron-Frobenius-Ruelle operator for rational maps on the Riemann sphere and for Hölder continuous functions*, Bol. Soc. Brasil. Mat., t. **20**, **2**, 1990, p. 95–125.
- [P-U-Z] PRZYTICKI (F.), URBANSKI (M.) and ZDUNIK (A.). — *Harmonic Gibbs and Hausdorff measures on repellers for holomorphic maps*, Partie I in Ann. of Math., n° 130, 1989, p. 1–40 et partie II à paraître dans Studia Math. n° 97.3.